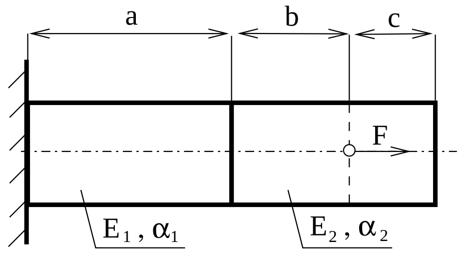
Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

1.3 Řešené příklady

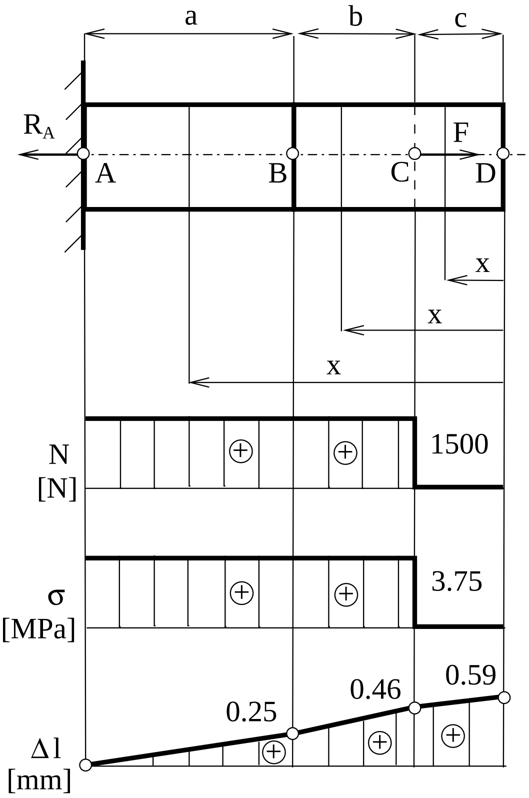
Příklad 1:

U prutu čtvercového průřezu o straně h vyrobeného ze dvou materiálů, který je zatížen silou F a změnou teploty ΔT (viz obr. 1) vyšetřete a zakreslete reakce, rozložení vnitřní síly N, napětí σ a prodloužení Δl podél jeho osy, je-li dáno:
$a = 0.5\,\mathrm{m}$, $b = 0.3\,\mathrm{m}$, $c = 0.2\,\mathrm{m}$, $h = 20\,\mathrm{mm}$, $\alpha_1 = 1.2 \cdot 10^{-5}\,{}^\circ\mathrm{C}^{-1}$, $\alpha_2 = 1.65 \cdot 10^{-5}\,{}^\circ\mathrm{C}^{-1}$, $F = 1.5\,\mathrm{kN}$, $\Delta T = 40\,{}^\circ\mathrm{C}$, $E_1 = 2.1 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Pa}$, $E_2 = 1.2 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Pa}$.



Obr. 1

Řešení:



Obr. 2

Jako první vyšetříme reakce, které vznikají ve vetknutí prutu. Vzhledem k tomu, že je prut namáhán pouze osovou silou, vzniká ve vetknutí v bodě A pouze reakce R_A. Její směr volme např. v souladu s obr. 2. Velikost této reakce určíme ze silové podmínky rovnováhy ve směru osy prutu

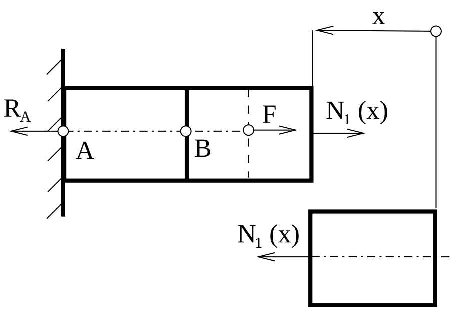
$$R_A - F = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = F = 1500\,\mathrm{N}\,. \qquad (1)$$

V dalším kroku řešení vyšetříme rozložení vnitřních statických účinků vznikajících v libovolném řezu v důsledku působení vnějšího zatížení. Vzhledem k charakteru vnějšího zatížení bude v libovolném řezu kolmém na osu prutu vznikat pouze normálová vnitřní síla N. Její velikost určíme z rovnováhy vnitřních sil v řezu s vnějšími účinky po jedné straně řezu.

Díky tomu, že se vnější zatížení podél prutu mění, nebude zřejmě možné hledanou vnitřní sílu N popsat podél celého prutu stejnou funkcí. Za tímto účelem je vhodné rozdělit prut na příslušný počet částí tak, aby v každé části byla vnitřní síla popsána jedinou funkcí. Stejná úvaha bude nutná i při vyšetřování normálového napětí σ, kdy ale samozřejmě počet částí, na kterých bude napětí popsáno jedinou funkcí, nemusí obecně souhlasit s počtem částí v případě normálové síly N. V tomto případě je při vyšetřování N i σ nutné díky proměnnému zatížení a konstantnímu průřezu prutu rozdělit prut pouze na 2 části (část AC a CD na obr. 2).

Nyní tedy z podmínek rovnováhy mezi vnitřními účinky v daném řezu a vnějšími účinky po jedné straně řezu stanovíme funkce N_1 a N_2 popisující vnitřní síly v jednotlivých polích prutu. Poloha obecného řezu, v němž budeme formulovat příslušné podmínky rovnováhy, bude přitom dána souřadnicí x, kterou v každém poli kótujme například z volného konce prutu, viz obr. 2.

Pole I: $x \in \langle 0, c \rangle$



Obr. 3

Vedeme řez v obecném místě x a zaorientujeme vnitřní sílu N_1 ve směru vnější normály k řezu (viz obr. 3). Nyní formulujeme podmínku rovnováhy pro levou nebo pravou část prutu, z obou podmínek musíme získat stejnou funkci $N_1(x)$:

Podmínka rovnováhy na levé části prutu:

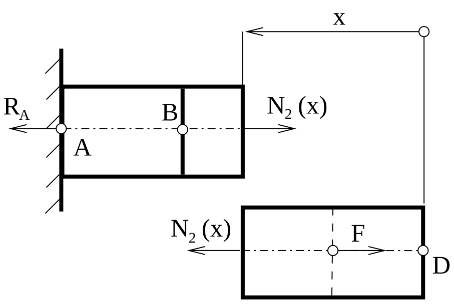
$$\begin{aligned} R_A - F - N_1(x) = 0 \Rightarrow N_1(x) &= R_A - F \\ N_1(x) &= 1500 - 1500 = 0\,\mathrm{N}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Podmínka rovnováhy na pravé části prutu:

$$N_1(x) = 0. \tag{3}$$

Jak je zřejmé, pomocí obou podmínek rovnováhy získáme shodně $N_1(x) = 0\,\mathrm{N}$. Analogickým způsobem vyšetříme vnitřní sílu v části AC, tj. funkci $N_2(x)$.

Pole II: $x \in \langle c, a+b+c \rangle$.



Obr. 4

Podmínka rovnováhy na levé části prutu (viz obr. 4):

$$R_A - N_2(x) = 0 \Rightarrow N_2(x) = R_A = 1500\,\mathrm{N}\,. \tag{4}$$

Podmínka rovnováhy na pravé části prutu:

$$N_2(x) - F = 0 \Rightarrow N_2(x) = F = 1500\,\mathrm{N}\,. \tag{5}$$

Výsledné rozložení vnitřní síly N je zakresleno na obr. 2.

Poznámka: Zápis vnitřních sil jako funkcí proměnné x, tj. $N_1(x)$ a $N_2(x)$, je v tomto případě pouze formální, neboť, jak jsme si ověřili, vnitřní síla na daném intervalu x je rovna příslušné konstantě, tj. $N_1(x) = N_1 = 0\,\mathrm{N}$, $N_2(x) = N_2 = 1500\,\mathrm{N}$.

V následujícím kroku stanovíme velikosti napětí v jednotlivých částech prutu jako intenzitu příslušných vnitřních sil.

Pole I: $x \in \langle 0, c \rangle$

$$\sigma_1(x) = \frac{N_1(x)}{A} = \frac{0}{A} = 0\,\text{MPa}\,. \tag{6}$$

Pole II: $x \in \langle c, a+b+c \rangle$

$$\sigma_2 = \frac{N_2(x)}{A} = \frac{F}{h^2} = \frac{1500}{0.02^2} = 3.75 \cdot 10^6\,\text{Pa} = 3.75\,\text{MPa}\,. \tag{7}$$

Rozložení napětí je opět zakresleno do obr. 2.

Na závěr řešení vyšetříme rozložení posuvů podél prutu a jeho celkové prodloužení Δl. Rozložení prodloužení (posuvů) podél osy prutu stanovíme pomocí určení prodloužení prutu v charakteristických bodech A, B, C a D. Vzhledem k tomu, že mezi těmito body je vnitřní síla konstantní (viz vyšetření sil N_1 a N_2) a prut má konstantní průřez i mechanické vlastnosti, bude prodloužení mezi těmito body rozloženo lineárně. Při stanovování Δl v jednotlivých bodech A, B, C a D musíme již brát v úvahu i vliv teploty a rozdílné vlastnosti obou materiálů.

Je zřejmé, že $\Delta l_A = 0$ (vetknutí prutu). Prodloužení (posuv) Δl_B v bodě B určíme jako prodloužení části AB vlivem působení síly F a změny teploty ΔT, tj.

$$\begin{aligned}\Delta l_B &= \frac{N_2 a}{E_1 A} + a\alpha_1 \Delta T = \frac{Fa}{E_1 h^2} + a\alpha_1\Delta T = \\ &= \frac{1500 \cdot 0.5}{2.1 \cdot 10^{11} \cdot 0.02^2} + 0.5 \cdot 1.2 \cdot 10^{-5} \cdot 40 = 2.5 \cdot 10^{-4}\,\text{m} = 0.25\,\text{mm}\end{aligned} \tag{8}$$

Výsledné prodloužení (posuv) Δl_C v bodě C určíme jako součet prodloužení Δl_B a prodloužení části BC vlivem F a ΔT, tj.

$$\begin{aligned}\Delta l_C &= \Delta l_B + \frac{N_2 b}{E_2 A} + b\alpha_2\Delta T = \\ &= 2.5 \cdot 10^{-4} + \frac{1500 \cdot 0.3}{1.2 \cdot 10^{11} \cdot 0.02^2} + 0.3 \cdot 1.65 \cdot 10^{-5} \cdot 40 = 4.6 \cdot 10^{-4}\,\text{m} = 0.46\,\text{mm}\end{aligned} \tag{9}$$

a nakonec prodloužení (posuv) Δl_D v bodě D určíme jako součet Δl_C a prodloužení části CD vlivem změny teploty

$$\Delta l_D = \Delta l_C + c\alpha_2\Delta T = 4.6 \cdot 10^{-4} + 0.2 \cdot 1.65 \cdot 10^{-5} \cdot 40 = 5.9 \cdot 10^{-4}\,\text{m} = 0.59\,\text{mm} \tag{10}$$

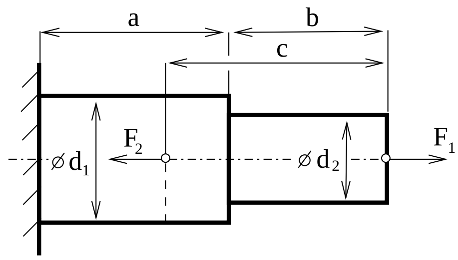
Výsledné rozložení prodloužení Δl je znázorněno na obr. 2.

TAH - TLAK

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

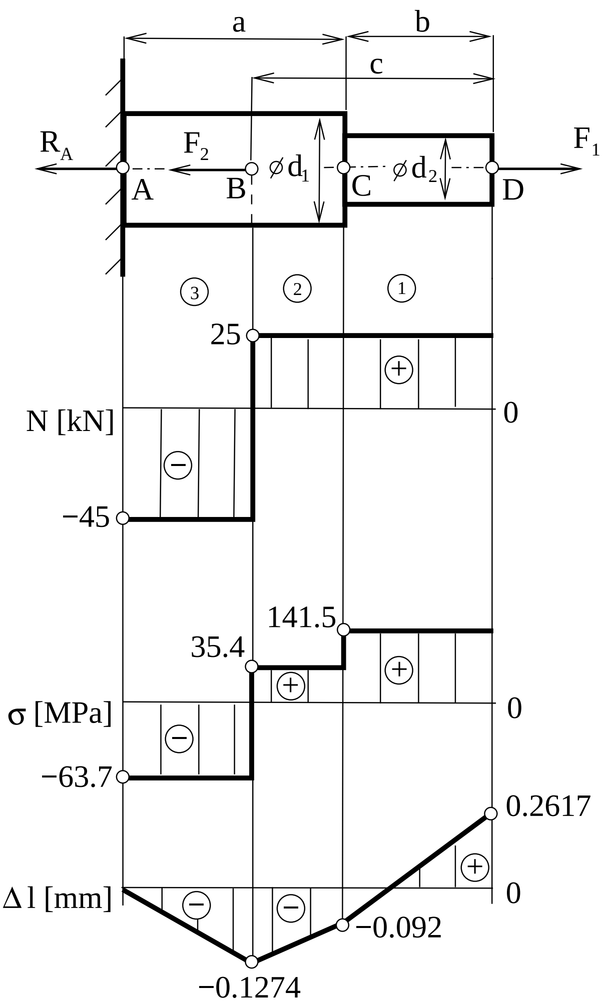
Příklad 2:

Pro prut znázorněný na obr. 1 vyšetřete a nakreslete průběh účinků vnitřních sil podél prutu, průběh napětí podél prutu a průběh prodloužení prutu, je-li dáno:
$a = 600\,\mathrm{mm}$, $b = 500\,\mathrm{mm}$, $c = 700\,\mathrm{mm}$, $d_1 = 30\,\mathrm{mm}$, $d_2 = 15\,\mathrm{mm}$, $F_1 = 25\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 70\,\mathrm{kN}$, $E = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$.



Obr. 1

Řešení:



Obr. 2

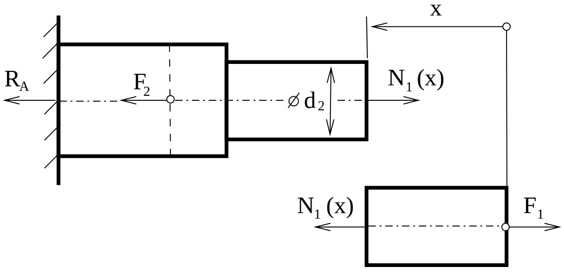
Při řešení zadaného příkladu je nutné nejprve vyšetřit všechny neznámé reakce, které spolu se zatížením splňují podmínky statické rovnováhy tělesa. Jak je vidět na obr. 1, všechny vnější zatěžující účinky, síly F_1 a F_2, působí na jedné nositelce. Je tedy zřejmé, že i doposud neznámá reakce R_A, která působí ve vetknutí, leží na dané nositelce - ose prutu. Její směr můžeme zvolit libovolně, dále viz volba dle obr. 2. Pro uvedení tělesa do stavu statické rovnováhy tedy postačuje určit reakce R_A ze silové podmínky rovnováhy ve směru osy prutu

$$R_A + F_2 - F_1 = 0 \Rightarrow R_A = F_1 - F_2 = -45\,\mathrm{kN}\,. \quad (1)$$

Pomocí metody řezu následně vyšetříme vnitřní silové účinky vyvolané vnějšími silami F_1, F_2 a R_A (reakce počítáme mezi vnější účinky). Splňuje-li těleso podmínky statické rovnováhy, rovnice (1), pak v libovolném myšleném řezu působí vnitřní síly, které uvádějí danou část tělesa do stavu statické rovnováhy. Vzhledem k vnějšímu zatížení je opět zřejmé, že i výslednice vnitřních silových účinků musí působit na stejné nositelce jako zátěžné síly. Směr vnitřní síly můžeme volit libovolně. Volme ji však tak, aby směřovala ve směru vnější normály k povrchu řezu. Tato síla, bude-li potom kladná, způsobuje v místě řezu tahové napětí.

Mezi místy, kde působí osamělé silové účinky a místy, kde dochází ke změně průřezu, bude zřejmě možné popsat hledané vnitřní účinky různými funkcemi. V souladu s tímto rozdělíme těleso na 3 části, viz obr. 2.

Pole I: $x \in \langle 0, b \rangle$



Obr. 3

Proveďme tedy řez v libovolném místě intervalu $x \in (0, b)$ (viz obr. 3). Potom z podmínky rovnováhy mezi vnějšími a vnitřními silami platí

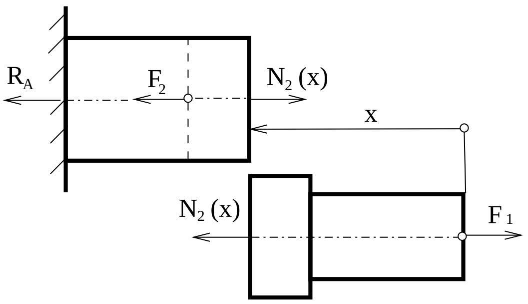
$$N_1(x) - F_1 = 0 \Rightarrow N_1(x) = F_1 = 25\,\mathrm{kN}\,, \quad (2)$$

nebo

$$\begin{aligned} R_A + F_2 - N_1(x) = 0 \Rightarrow N_1(x) = &\ R_A + F_2 \\ = &\ 25\,\mathrm{kN}\,. \quad (3) \end{aligned}$$

Vnitřní síly na zbývajících intervalech určíme obdobně:

Pole II: $x \in \langle b, c \rangle$



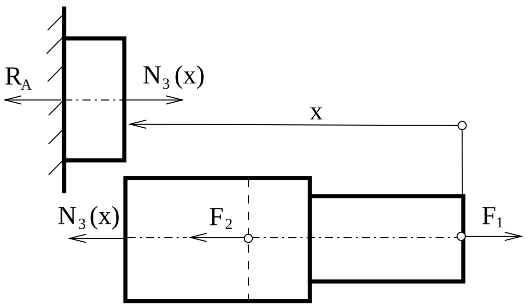
Obr. 4

$$N_2(x) - F_1 = 0 \Rightarrow N_2(x) = F_1 = 25\,\mathrm{kN}, \quad (4)$$

nebo

$$\begin{aligned} R_A + F_2 - N_2(x) = 0 \Rightarrow N_2(x) = &\ R_A + F_2 \\ = &\ 25\,\mathrm{kN}. \quad (5) \end{aligned}$$

Pole III: $x \in \langle c, b + a \rangle$



Obr. 5

$$\begin{aligned} N_3(x) + F_2 - F_1 = 0 \Rightarrow N_3(x) = &\ F_1 - F_2 \\ = &\ -45\,\mathrm{kN}, \quad (6) \end{aligned}$$

nebo

$$R_A - N_3(x) = 0 \Rightarrow N_3(x) = R_A = -45\,\mathrm{kN}. \quad (7)$$

Výsledné rozložení vnitřních sil podél osy prutu je zobrazeno na obr. 2.

Nyní můžeme přistoupit k vyšetření napětí v jednotlivých částech prutu. Při jejich stanovení uvažujme, že vnitřní síly jsou rovnoměrně rozložené po jednotlivých průřezech. Potom bude platit:

Pole I: $x \in \langle 0, b \rangle$

$$\sigma_1(x) = \frac{N_1(x)}{A_1} = \frac{4N_1(x)}{\pi d_2^2} = 141.5\,\mathrm{MPa} \tag{8}$$

Pole II: $x \in \langle b, c \rangle$

$$\sigma_2(x) = \frac{N_2(x)}{A_2} = \frac{4N_2(x)}{\pi d_1^2} = 35.4\,\mathrm{MPa} \tag{9}$$

Pole III: $x \in \langle c, b+a \rangle$

$$\sigma_3(x) = \frac{N_3(x)}{A_2} = \frac{4N_3(x)}{\pi d_1^2} = -63.7\,\mathrm{MPa} \tag{10}$$

Ve vztazích (8) až (10) odpovídá kladná hodnota tahovému napětí a záporná tlakovému napětí. Průběh napětí podél osy prutu je opět zobrazen na obr. 2.

Pro úplné splnění zadání příkladu nám ještě zbývá stanovení prodloužení prutu. Protože na jednotlivých částech prutu 1, 2 a 3 je vždy poměrná deformace konstantní, můžeme prodloužení těchto částí vypočítat jako

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{\sigma_1(x)}{E} b = 0.3537\,\mathrm{mm}\,, \\ \Delta l_2 &= \frac{\sigma_2(x)}{E}(c-b) = 0.0354\,\mathrm{mm}\,, \\ \Delta l_3 &= \frac{\sigma_3(x)}{E}(a+b-c) = -0.1274\,\mathrm{mm}\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Uvážíme-li, že vzhledem k vetknutí levé strany prutu v bodě A je prodloužení $\Delta l_A = 0$, můžeme pro prodloužení v ostatních bodech prutu psát:

Bod B: $x = a + b - c$

$$\Delta l_B = \Delta l_3 = -0.1274\,\mathrm{mm} \tag{12}$$

Bod C: $x = b$

$$\Delta l_C = \Delta l_3 + \Delta l_2 = -0.092\,\mathrm{mm} \tag{13}$$

Bod D: $x = 0$

$$\Delta l_D = \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = 0.2617\,\mathrm{mm}. \tag{14}$$

Průběh prodloužení mezi těmito body je lineární, viz obr 2.

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

Příklad 3:

Ocelový prut kruhového průřezu $d = 15\,\mathrm{mm}$ a $l_0 = 800\,\mathrm{mm}$ je vyroben z oceli s modulem pružnosti $E = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$ a s mezí kluzu $Re = 240\,\mathrm{MPa}$. Jakou maximální silou F může být zatížen, má-li být bezpečnost vůči mezi kluzu $k = 1.5$? Jaké bude poměrné prodloužení ε a absolutní prodloužení prutu Δl?

Řešení:
Zadaná hodnota meze kluzu Re a k ní vztažená hodnota součinitele bezpečnosti k vypovídá o tom, že se jedná o houževnatý materiál. V takovém případě pak určíme dovolené napětí jako

$$\sigma_D = \frac{Re}{k} = \frac{240}{1.5} = 160\,\mathrm{MPa}\,. \tag{1}$$

Toto napětí odpovídá maximální síle F, kterou lze ocelový prut namáhat a jejíž velikost určíme ze vztahu

$$F = \sigma_D A = \sigma_D \frac{\pi d^2}{4} = 160 \cdot \frac{3.14 \cdot 15^2}{4} = 28.274\,\mathrm{kN}\,. \tag{2}$$

Dále pomocí hodnoty σ_D a pomocí Hookeova zákona pro jednoosou napjatost určíme odpovídající poměrnou deformaci

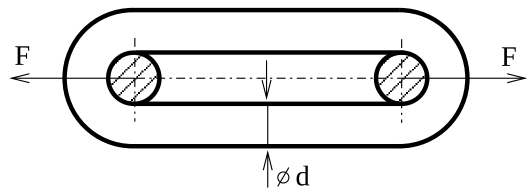
$$\varepsilon = \frac{\sigma_D}{E} = \frac{160}{2 \cdot 10^5} = 8 \cdot 10^{-4} \tag{3}$$

a pomocí ní absolutní prodloužení

$$\Delta l = \varepsilon\, l_0 = 0.64\,\mathrm{mm}\,. \tag{4}$$

Příklad 4:

Stanovte průměr d článku řetězu (viz obr. 1), je-li dovolené zatížení řetězu $F = 50\,\mathrm{kN}$. Řetěz je vyroben z oceli o mezi kluzu $Rp\,0.2 = 500\,\mathrm{MPa}$, součinitel bezpečnosti má být $k = 2$.



Obr. 1

Řešení:
Vzhledem ke geometrii článku řetězu (viz obr. 1) přenáší každý ze dvou průřezů článku sílu $\frac{F}{2}$. Tato vnější síla vyvolá vnitřní sílu

$$N = \frac{F}{2}\,, \quad \text{které odpovídá napětí} \quad \sigma = \frac{N}{A}\,. \tag{1}$$

Z pevnostní podmínky plyne, že toto napětí musí být nejvýše rovno dovolenému napětí σ_D, tj.

$$\sigma = \sigma_D\,, \tag{2}$$

kde hodnotu dovoleného napětí určíme ze vztahu

$$\sigma_D = \frac{Rp\,0.2}{k}\,. \tag{3}$$

Po dosazení (1) a (3) do (2) můžeme psát

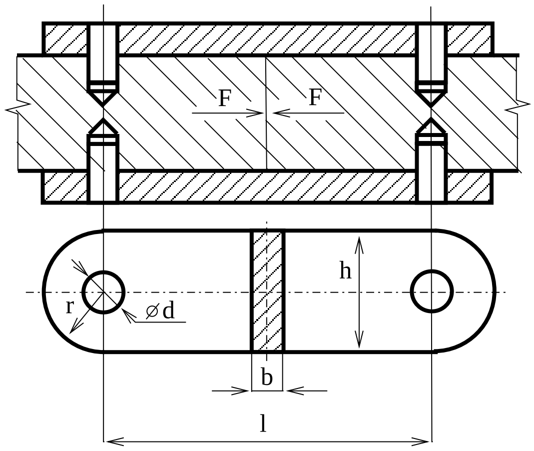
$$\frac{N}{A} = \frac{Rp\,0.2}{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{2A} = \frac{Rp\,0.2}{k} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{Fk}{2Rp\,0.2}\,. \tag{4}$$

Je zřejmé, že obsah průřezu A můžeme vyjádřit jako $A = \frac{\pi d^2}{4}$. Potom z rovnice (4) plyne

$$d = \sqrt{\frac{2Fk}{\pi Rp\,0.2}} = 11.28\,\mathrm{mm} \doteq 11.3\,\mathrm{mm}\,. \tag{5}$$

Příklad 5:

Pomocí dvou zděří mají být spojena dvě absolutně tuhá tělesa tak, aby mezi nimi vznikla přítlačná síla $F = 2.10^4\,\mathrm{N}$ (viz obr. 1). Vzdálenost absolutně tuhých kolíků je $l = 300\,\mathrm{mm}$. Jaká musí být vzdálenost otvorů nezatížených zděří, je-li dáno: $h = 30\,\mathrm{mm}$, $b = 5\,\mathrm{mm}$, $E = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{Nmm}^{-2}$.



Obr. 1

Řešení:
Předpokládejme, že se vliv přítlačné síly F rovnoměrně přenese na horní a dolní zděř. Sílu F_1 působící na jednu zděř lze potom určit jako

$$F_1 = \frac{F}{2} = 1 \cdot 10^4\,\mathrm{N}. \tag{1}$$

Aby mohla v obou zděřích vzniknout taková síla, musí se každá zděř prodloužit o Δl. Označíme-li původní délku zděře před deformací l_0, lze pro poměrné prodloužení ε psát

$$\Delta l = \varepsilon l_0 = \varepsilon\,(l - \Delta l)\ . \tag{2}$$

Vzhledem k tomu, že je $\Delta l << l$, můžeme Δl vůči délce l zanedbat a rovnici (2) tak přepsat do tvaru

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{\sigma}{E} l = \frac{F_1 l}{Ebh} = 0.1\,\mathrm{mm}\,. \tag{3}$$

Vzdálenost otvorů zděří před montáží musí tedy být $l_0 = 299.9\,\mathrm{mm}$.