

Spolehlivostní a citlivostní analýza vrtule

Západočeská univerzita v Plzni

Katedra mechaniky

Bc. Lukáš Němec

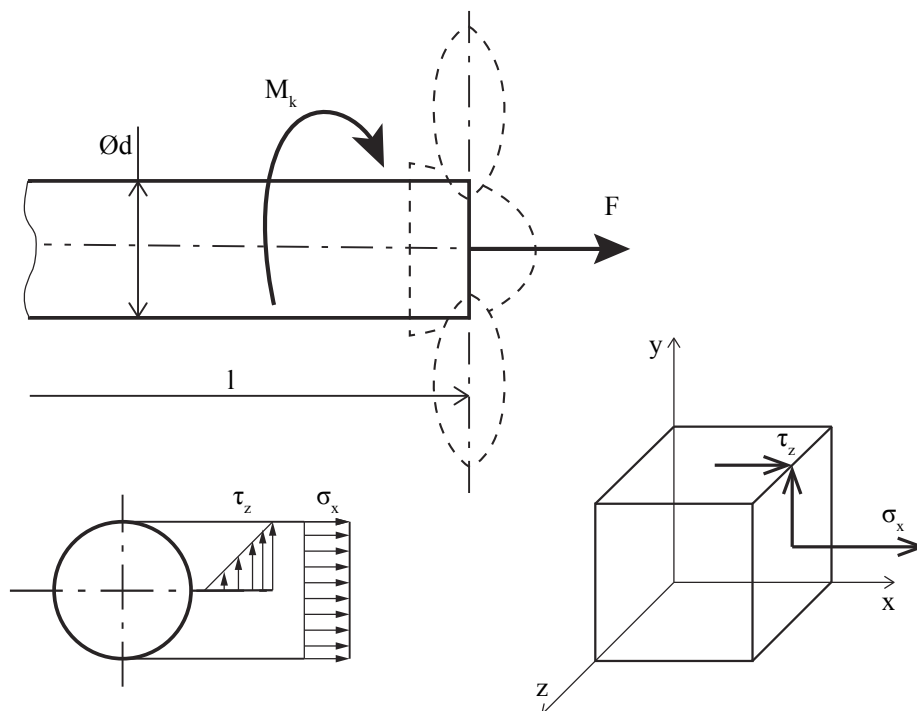
18. září 2017

Obsah

1	Spolehlivostní a citlivostní analýza „vrtule“	3
1.1	Citlivostní analýza	7
1.2	Pravděpodobnostní analýza spolehlivosti	17
1.3	Zhodnocení výsledků	19

1 Spolehlivostní a citlivostní analýza „vrtule“

Tento text je věnován jednoduchému příkladu kombinovaně namáhaného hřídele na tah-krut viz. obr. 1 na němž je názorně ukázán praktický přístup pravděpodobnostního posouzení spolehlivosti.



Obrázek 1: Kombinovaně namáhaný hřídel tah-krut

Hřídel o průměru d a délce l je kombinovaně namáhán na tah-krut, tahem F a kroutícím momentem M_k na jeho volném konci. Návrhové hodnoty hřídele jsou uvedeny v tab. 1. Hřídel je uvažován jako houževnatý materiál, který je homogenní a izotropní. Je uvažován předpoklad malých přetvoření a platnost Hookova zákona [2].

Z analýzy napjatosti vyplývá, že se jedná o případ rovinné (dvouosé) napjatosti, všechna napětí v tělese leží v jedné rovině a kolmo k této rovině jsou složky napětí nulová - osová síla F vyvolává v celém průřezu rovnoměrně rozložené normálové napětí σ_x a největší smykové napětí τ_z od krouticího momentu M_k vznikne na povrchu průřezu, kde bude i největší redukované napětí σ_{red} .

Prvním úkolem bude ověřit zda hřídel vyhoví pevnostní podmínce, dle návrhových hodnot. Druhým úkolem bude pravděpodobnostní popis vybraných návrhových hodnot a jejich citlivostní analýza a posledním úkolem bude spolehlivostní analýza.

Návrhové veličiny	Jednotky
Modul pružnosti v tahu E	210 GPa
Poissonovo číslo μ	0,3
Průměr hřídele d	90 mm
Délka hřídele l	2 m
Mez kluzu R_e	400 MPa
Bezpečnostní koeficient k	4,5
Tah F	300 kN
Kroutící moment M_k	5,39 kNm

Tabulka 1: Návrhové hodnoty hřídele

V této části jsou analytické vztahy pro výpočet potřebných veličin. Tyto vztahy jsou převzaty z teorie lineární pružnosti a pevnosti [2].

Pro výpočet normálového napětí σ je potřeba určit obsah průřezu hřídele

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,09^2}{4} = 0,0064 \text{ m}^2, \quad (1)$$

a následné dosazení vztahu (1) do vztahu pro výpočet normálové napětí [2]

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{3 \cdot 10^5}{0,0064} = 47,2 \text{ MPa}. \quad (2)$$

Pro výpočet smykového napětí τ je potřeba určit průřezový modul v krutu [1]

$$W_k = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 0,09^3}{4} = 1,43 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3, \quad (3)$$

a následné dosazení (3) do vztahu pro výpočet smykového napětí [2]

$$\tau_z = \frac{M_k}{W_k} = \frac{5390}{1,43 \cdot 10^{-4}} = 37,7 \text{ MPa}. \quad (4)$$

Pro prodloužení hřídele [2] platí

$$\Delta l = \frac{Fl_o}{AE} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 2}{0,0064 \cdot 210 \cdot 10^9} = 0,45 \text{ mm}, \quad (5)$$

kde celková délka

$$l = l_o + \Delta l = 2000 + 0,45 = 2000,45 \text{ mm}, \quad (6)$$

kde l_o je délka hřídele před zatížením.

Následujícím krokem je určení polárního momentu průřezu [1]

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0,09^4}{32} = 6,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \quad (7)$$

a modulu pružnosti ve smyku [2]

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{210 \cdot 10^9}{2(1 + 0,3)} = 80,8 \text{ GPa}, \quad (8)$$

dosazením (7) a (8) do vztahu pro úhel natočení [2]

$$\varphi = \frac{M_k l}{G J_p} = \frac{5390 \cdot 2}{80,8 \cdot 10^9 \cdot 6,4 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{180}{\pi} = 1,19^\circ. \quad (9)$$

Pevnostní podmínka [2] pro tvárný materiál má tvar

$$\sigma_{\text{red}} \leq \sigma_D = \frac{\sigma_k}{k} = \frac{400}{4,5} = 88,889 \text{ MPa} \quad (10)$$

kde σ_{red} je redukované napětí [2], které lze vypočítat ze vztahů jednotlivých pevnostních hypotéz a σ_D je dovolené napětí.

Pro tvárný materiál jako jsou nízkouhlíkové oceli jsou nejpoužívanější pevnostní hypotézy: Trescova podmínka maximálního smykového napětí (τ_{max}) a von Misesova podmínka hustoty deformační energie (HMH).

Pro výpočet redukovaného napětí u rovinné napjatosti dle zmíněných hypotéz platí následující vztahy

$$\sigma_{\text{red}}^{\tau_{\text{max}}} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2} \quad (11)$$

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{HMH}} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_z^2} \quad (12)$$

jelikož v našem případě je normálové napětí σ_y rovno nule, normálové napětí $\sigma_x = \sigma$ a smykové napětí $\tau_z = \tau$, lze předešlé vztahy upravit na

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma^2 + (\alpha\tau)^2} \quad (13)$$

kde $\alpha = 2$ dle hypotézy τ_{max} a $\alpha = \sqrt{3}$ dle hypotézy HMH. Po dosazení získáme

$$\sigma_{\text{red}}^{\tau_{\text{max}}} = \sqrt{47,2^2 + (2 \cdot 37,7)^2} = 88,86 \text{ MPa} \quad (14)$$

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{HMH}} = \sqrt{47,2^2 + (\sqrt{3} \cdot 37,7)^2} = 80,48 \text{ MPa} \quad (15)$$

Obě hypotézy splňují pevnostní podmínku a hřídel tedy vyhověl návrhovým hodnotám. V dalším odstavci se na tento problém podíváme z pravděpodobnostního hlediska.

Při bližším porovnání výše zmíněných hypotéz plyne, že největší rozdíl v určení σ_{red} může být až 15% - při čistém smyku. Řada autorů ověřovala obě podmínky avšak ani jedna nebyla jednoznačně určena jako více odpovídající skutečnosti. Experimentální výsledky ukazují, že skutečný stav leží mezi těmito dvěma řešeními. Proto lze obě hypotézy považovat za stejně pravděpodobné a pro pevnostní výpočet zvolit tu, která je pro danou úlohu jednodušší [2]. V případě tohoto textu bude však použita hypotéza τ_{max} jelikož se jeví jako více konzervativní oproti hypotéze HMM.

1.1 Citlivostní analýza

Úkolem citlivostní analýzy je zjištění závislosti mezi vstupními a výstupními parametry.

Citlivostní analýza byla realizována v programu OptiSLang. Hřídel byl vymodelován pomocí programovacího jazyku Python, dle definovaných vztahů v předešlém odstavci. Vstupní náhodné veličiny byly simulovány numerickou metodou Latin Hypercube Sampling, dále LHS ve 150 iteracích [5].

Veličiny, které byly vybrány pro analýzu jsou uvedeny v tab. 2. V tab. 3 jsou uvedeny pravděpodobnostní modely vstupních veličin spolu s jejich parametry. Jelikož se jedná o ukázkový příklad nemá výběr pravděpodobnostních modelů hlubšího významu.

Vstupní parametry	Výstupní parametry
Modul pružnosti v tahu E	Normálové napětí σ
Průměr hřídele D	Smykové napětí τ
Tah F	Absolutní prodloužení hřídele Δl
Kroutící moment M_k	Úhel natočení hřídele φ

Tabulka 2: Vstupní a výstupní parametry analýzy

Vstupní parametr	Pravděpodobnostní rozdělení	Střední hodnota μ \ \ Dolní mez	Variační koef. \ \ Horní mez
Modul pružnosti v tahu E	Gaussovo	$\mu = 210 \cdot 10^9$	$v = 5 \%$
Průměr nosníku D	Rovnoměrné	0,0555	0,0595
Tah F	Gumbellovo	$\mu = 3 \cdot 10^5$	$v = 5\%$
Kroutící moment M_k	Weibullovo	$\mu = 5390$	$v = 10\%$

Tabulka 3: Pravděpodobnostní modely vstupních parametrů

V následující části jsou vysvětleny dva pojmy, které jsou dále používány:

Lineární korelační koeficient měří statistickou závislost lineárního vztahu mezi dvěma veličinami. Lineární korelační koeficient r , může nabývat hodnot z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Hodnota korelačního koeficientu $r = -1$ značí nepřímou úměru (antikorelaci, $y = -kx$). Hodnota korelačního koeficientu $r = 1$ značí zcela přesně lineární vztah ($y = kx$). Pokud je korelační koeficient roven $r = 0$ (nekorelovanost), pak mezi veličinami není žádná statisticky zjistitelná lineární závislost¹ [3].

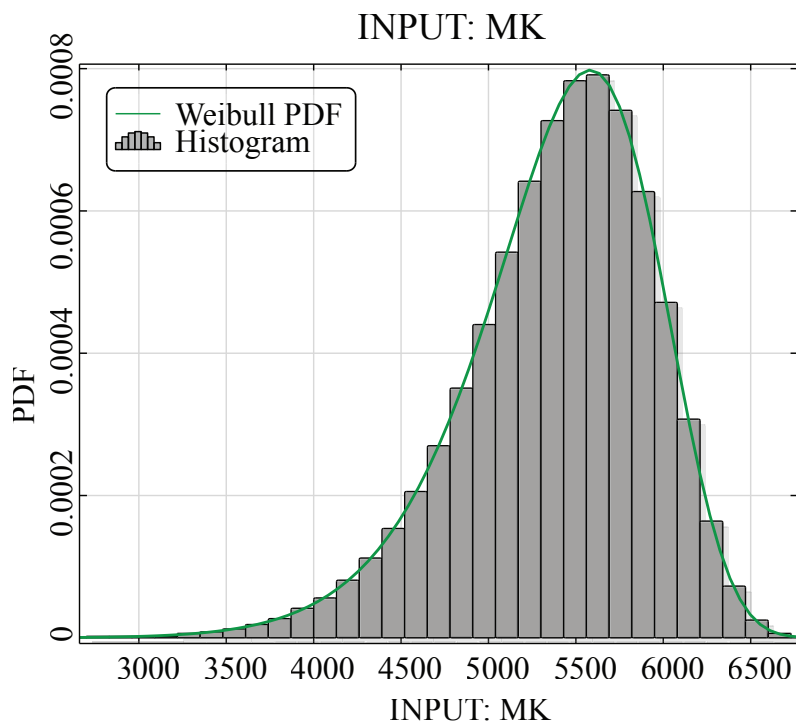
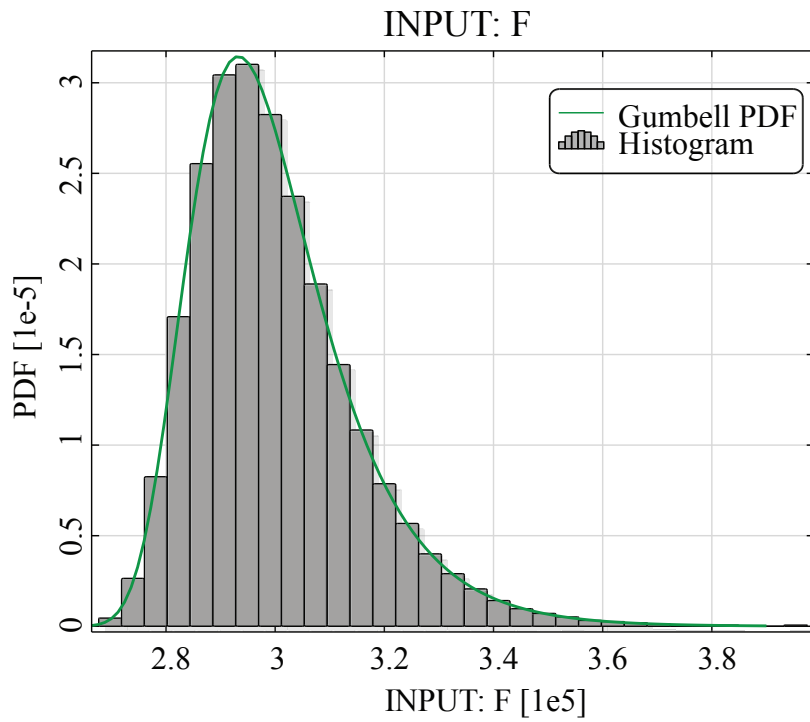
¹Lze analyzovat i kvadratický korelační koeficient, který měří statistickou závislost kvadratického vztahu.

Koeficient determinace R^2 , kde $R^2 \in \langle 0, 100\% \rangle$, vyjadřuje závislost výstupní veličiny na lineární kombinaci všech vstupních veličin. Pokud je $R = 100\%$, znamená to, že závislá výstupní proměnná je přesně lineární kombinací vstupních veličin.

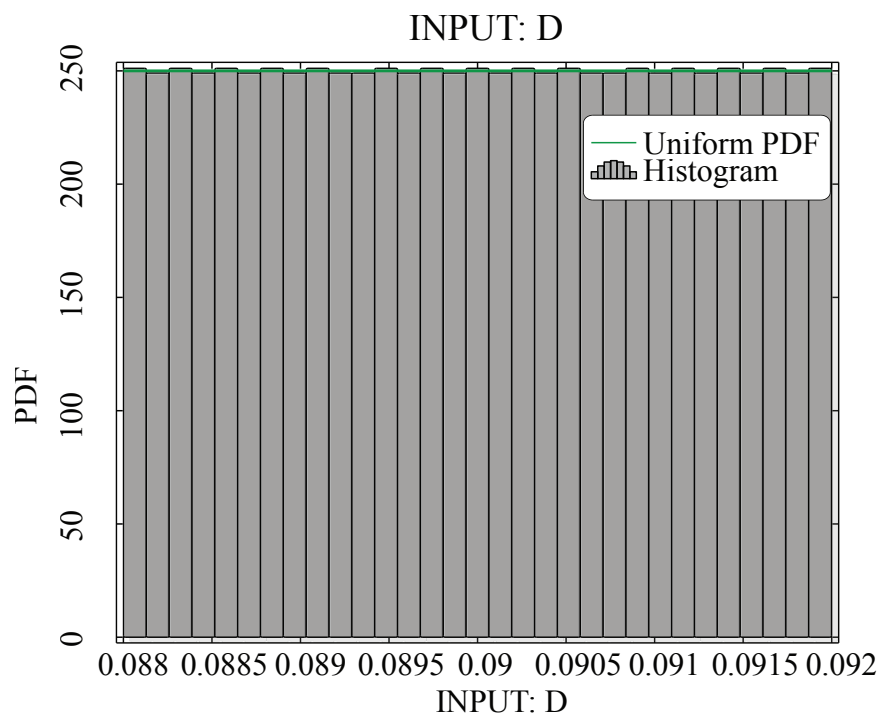
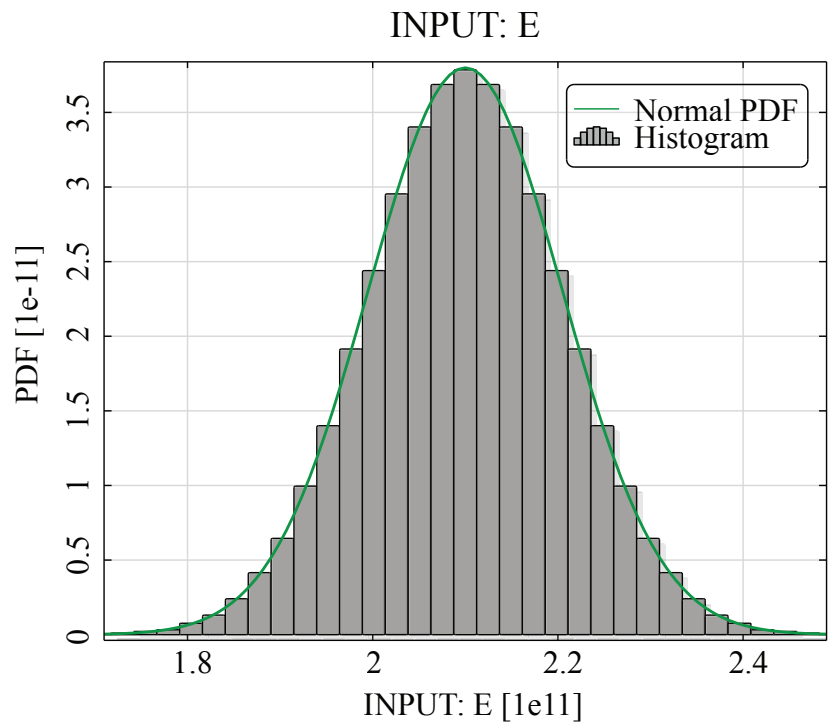
Jinými slovy, tento koeficient reprezentuje procentuální podíl (nebo-li míru) vstupních parametrů působících na danou výstupní veličinu, a který může být vysvětlen lineárním vztahem (ať už přímo nebo nepřímo úměrným). Pokud je suma těchto podílů menší než 100%, zbylý podíl procent vyjadřuje změnu, která je způsobena kvadratickým vztahem či zůstává nevysvětlena [3].

Následuje rozbor výsledků, které jsou na následujících stranách:

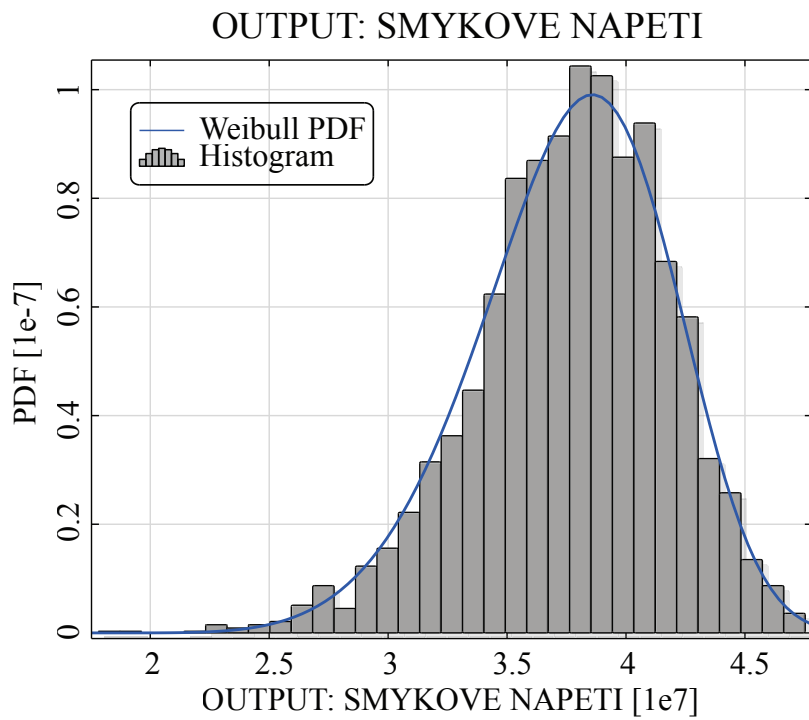
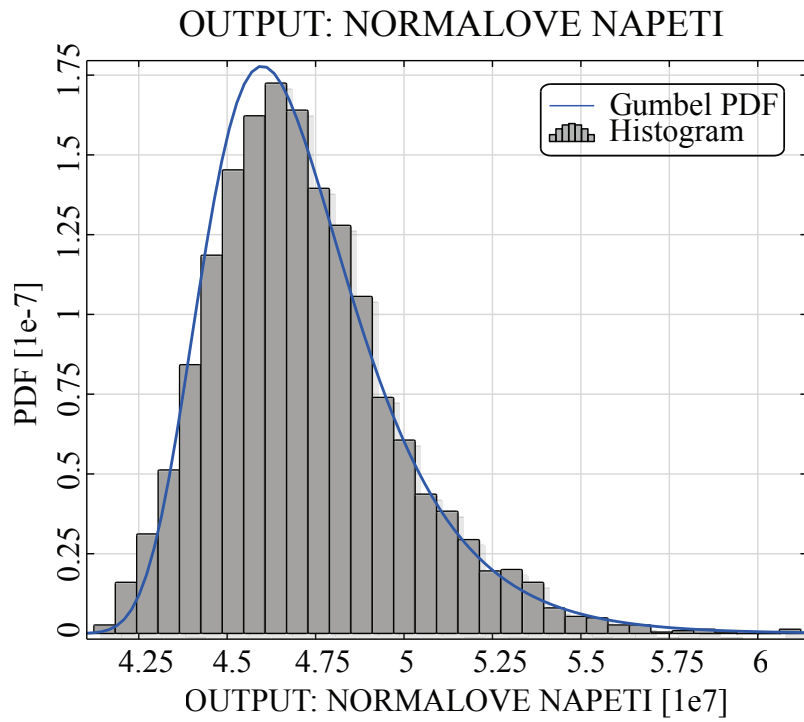
- Na obr. 2 a 3 jsou vidět histogramy a pravděpodobnostní modely vstupních parametrů.
- Na obr. 4 a 5 jsou vidět histogramy výstupních parametrů společně s jejich aproximovaným modelem pravděpodobnosti.
- Na obr. 6 a 7 jsou korelační koeficienty výstupních parametrů. Na obr. 6 je vidět lineární závislost zatížení a daných napětí. Pokud zvýším zatížení tahem F či kroutícím momentem M_k zvýší se i daná napětí. U korelačního koeficientu $r \leq 0,5$ neexistuje lineární závislost mezi těmito parametry.
- Na obr. 7 jsou vidět významné závislosti tahu F a modulu pružnosti v tahu E na poměrné prodloužení Δl . Pokud zvýším tah F zvýší se mi tím i poměrné prodloužení Δl . Se vzrůstajícím modulem pružnosti v tahu E však toto prodloužení klesá. Poslední významnou závislostí je závislost mezi kroutícím momentem M_k a úhlem natočení hřídele φ . Pokud zvýším M_k zvýším tím φ .
- Na obr. 8 a 9. jsou vidět koeficienty determinace R^2 výstupních parametrů. U všech výstupních parametrů je dosaženo více jak v 99 % lineární kombinace vstupních parametrů.



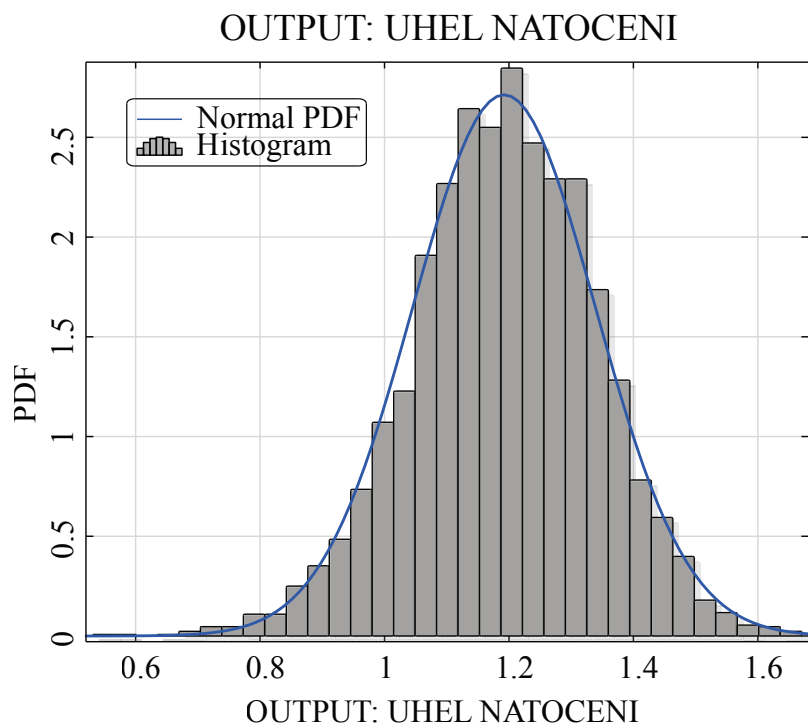
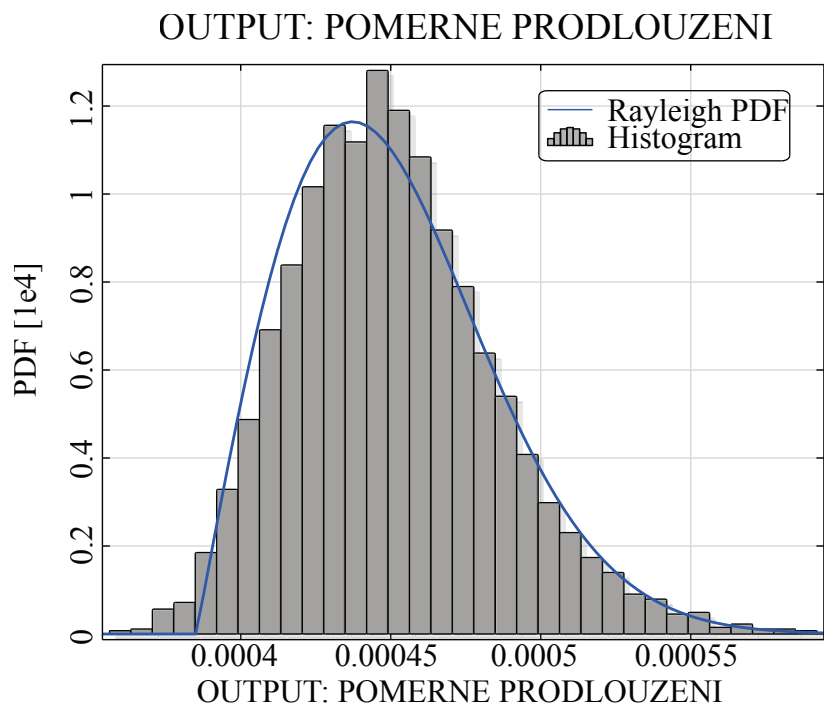
Obrázek 2: Histogramy tahu F a kroučícího momentu M_k



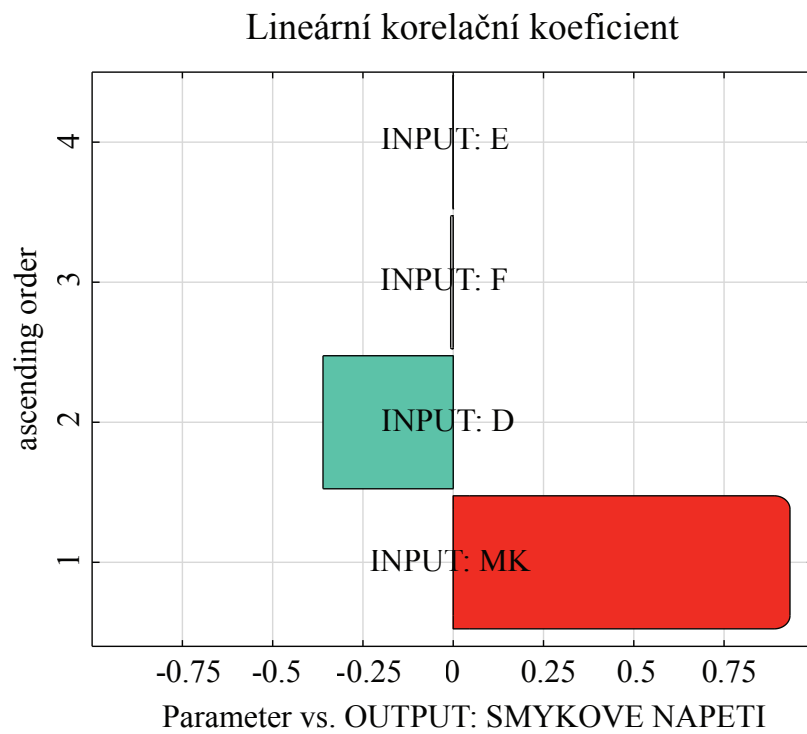
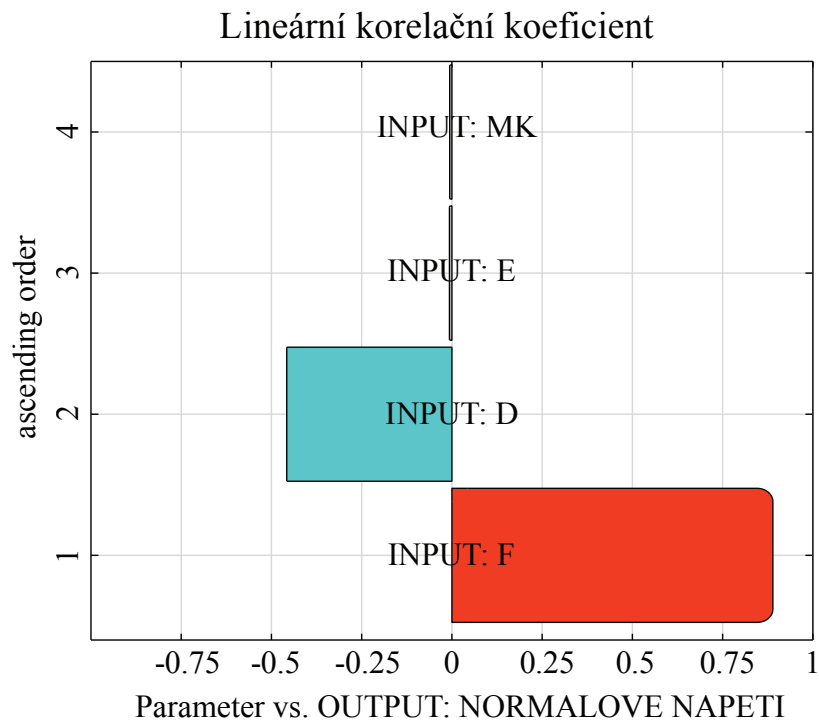
Obrázek 3: Histogramy průměru D a modulu pružnosti v tahu E



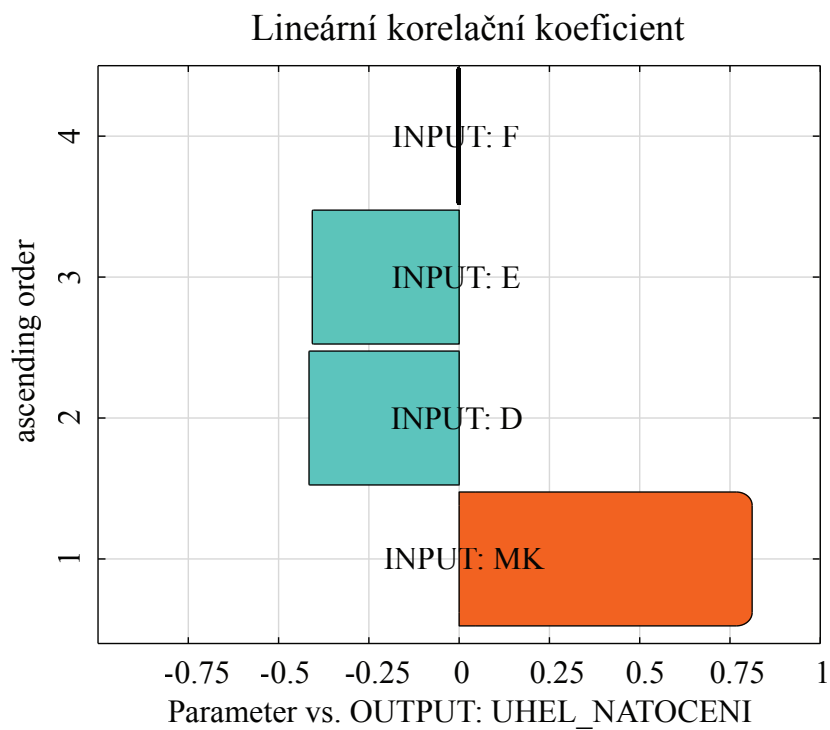
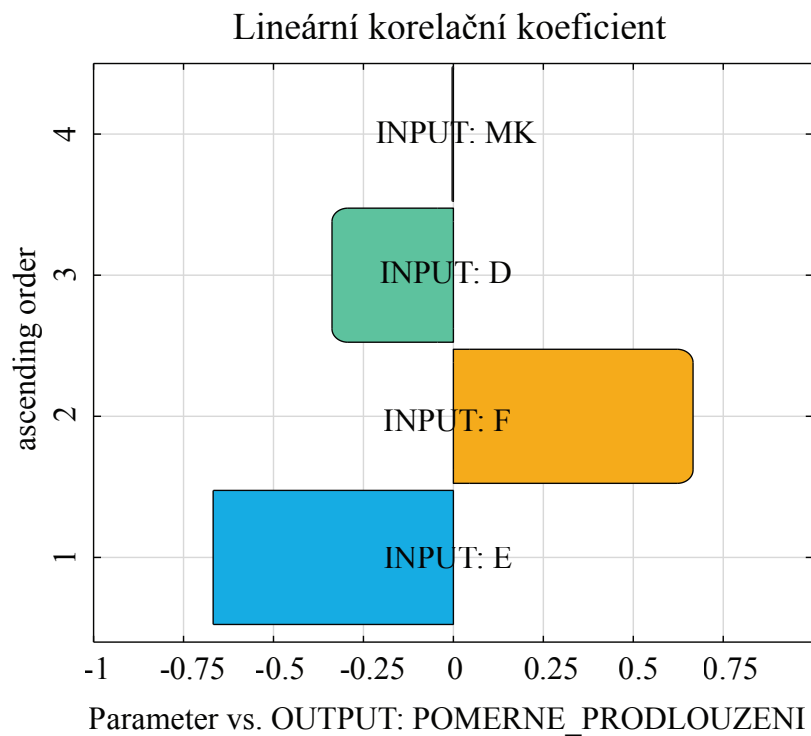
Obrázek 4: Histogramy normálového napětí σ a smykového napětí τ



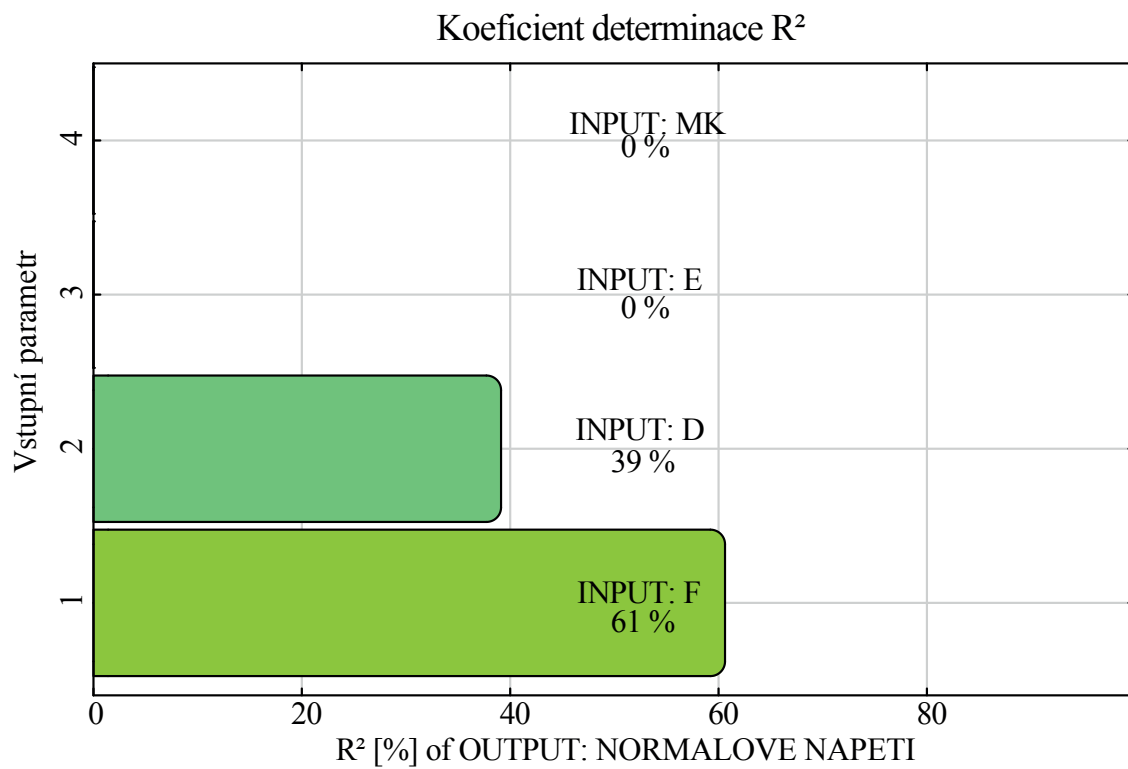
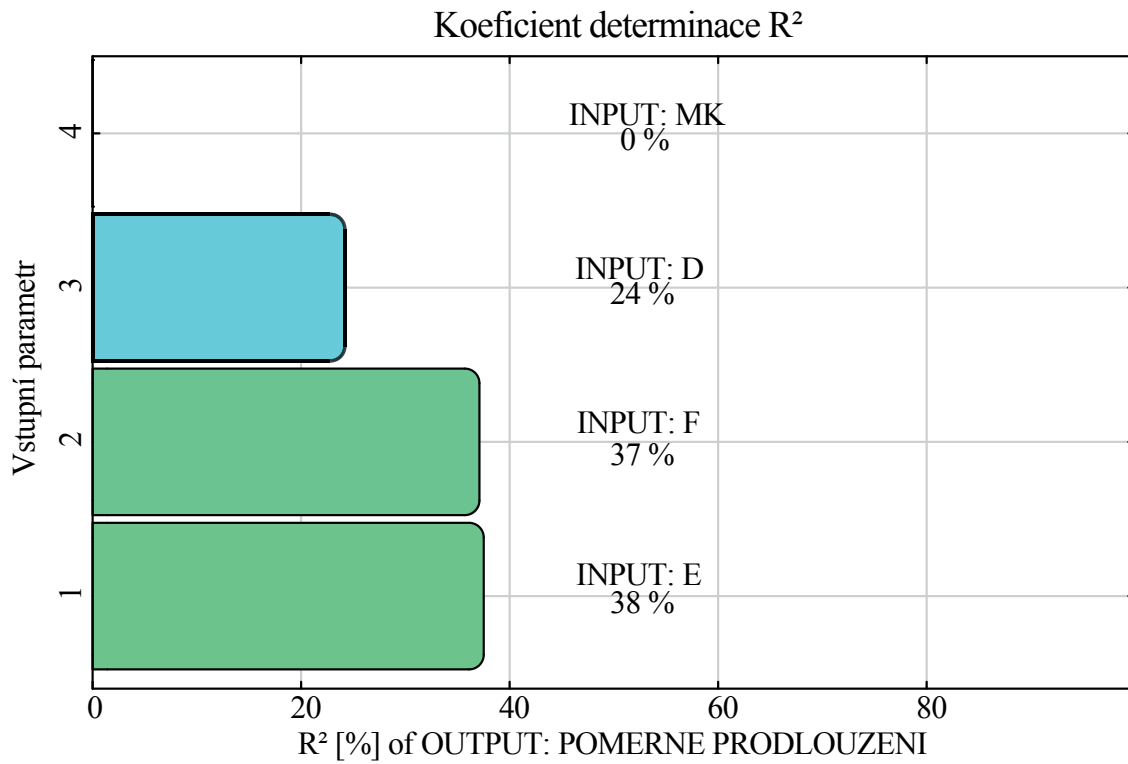
Obrázek 5: Histogramy úhlu natočení φ a poměrného prodloužení Δl



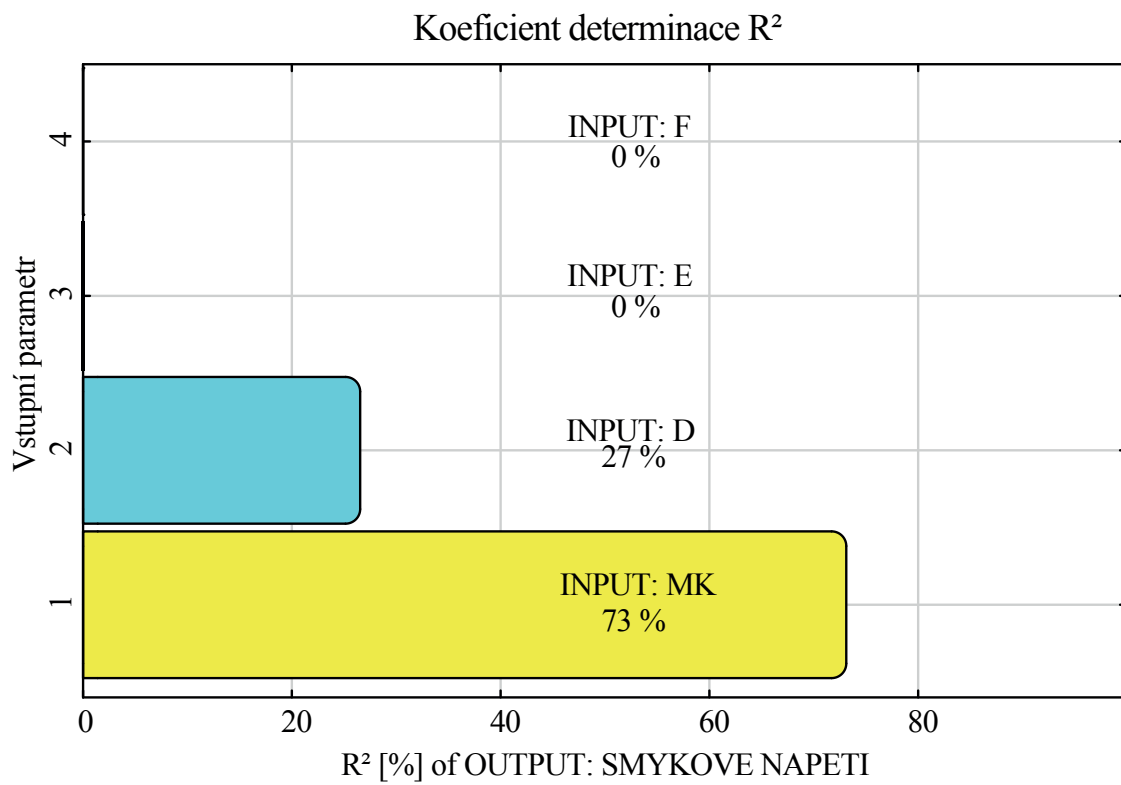
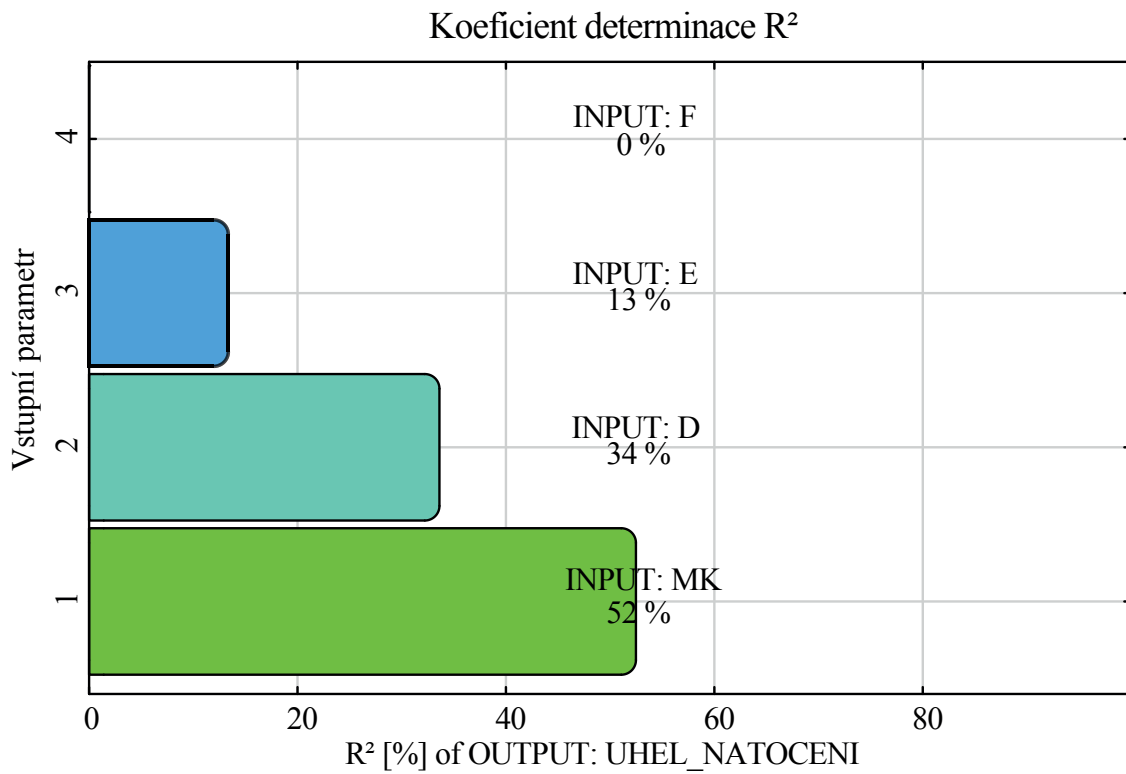
Obrázek 6: Lineární korelační koeficient normálového napětí σ a smykového napětí τ



Obrázek 7: Lineární korelační koeficient úhlu natočení poměrného prodloužení Δl a φ



Obrázek 8: Koeficient determinace poměrného prodloužení Δl a normálového napětí σ



Obrázek 9: Koeficient determinace úhlu natočení φ a smykového napětí τ

1.2 Pravděpodobnostní analýza spolehlivosti

Charakter analýzy zůstává obdobný jako u předešlé úlohy s tím rozdílem, že se zde navíc vyhodnocují spolehlivé a nespolehlivé simulace na základě pevnostní podmínky dle hypotézy τ_{max}

$$\sigma_{red} \tau_{max} \leq \sigma_D , \quad (16)$$

nespolehlivá simulace je vyhodnocena tak, že je v každém kroku spočteno redukované napětí σ_{red} a pokud toto napětí přesáhne dovolené napětí σ_D je simulace označena za nespolehlivou, v opačném případě je simulace považována za spolehlivou. Následně se jednoduchým výpočtem spočte pravděpodobnost poruchy

$$p_f = \frac{\text{Počet nespolehlivých simulací}}{\text{Celkový počet simulací}} , \quad (17)$$

pro kterou platí že musí splňovat podmínku

$$p_f < p_d , \quad (18)$$

kde p_d je návrhová pravděpodobnost [4]. Součást je vyhodnocena jako spolehlivá pokud není překročena tato podmínka.

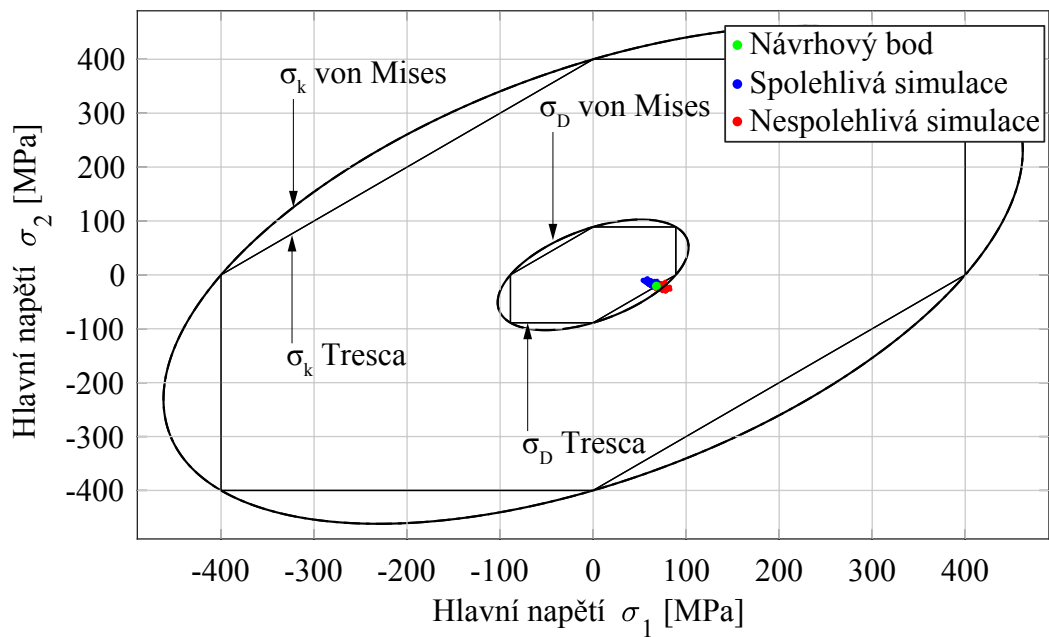
Analýza spolehlivosti hřídele byla opět provedena v programu OptiSLang, kde bylo spočteno 3704 simulací metodou LHS s uvažováním 10% odchylky od vypočtené p_f [4]. Byly uvažované stejné pravděpodobnostní modely jako u citlivostní analýzy a byla dodefinována pouze návrhová pravděpodobnost o hodnotě $p_d = 0,27\%$.

Předešlé informace společně s vypočtenou p_f jsou uvedeny v následující tabulce

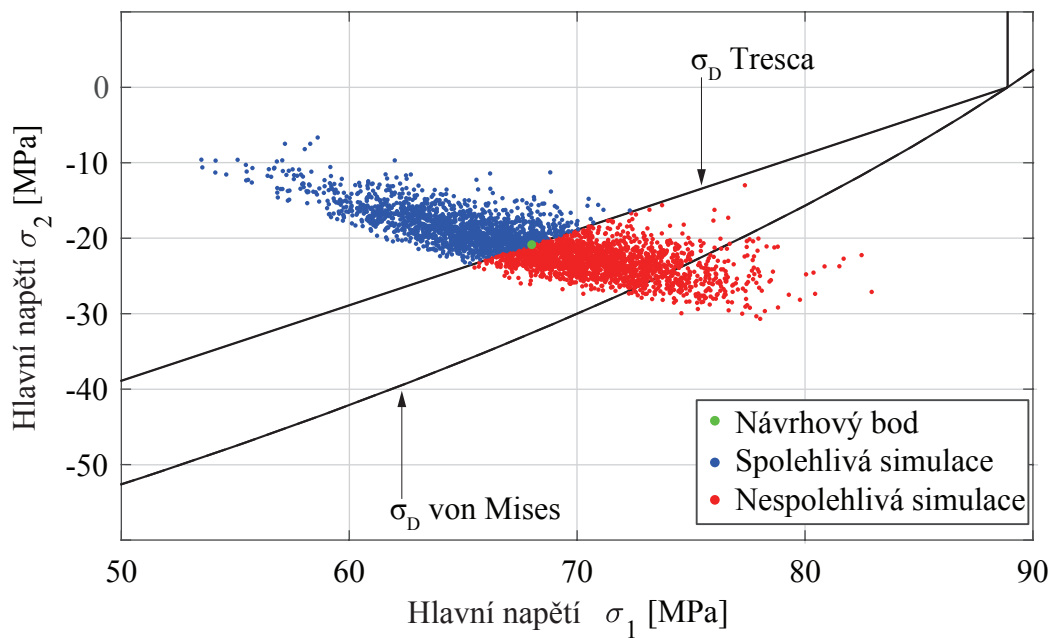
Simulace pomocí metody	LHS
Počet simulací	3704
Chyba p_f	10%
Návrhová pravděpodobnost p_d	0,27%
Podmínka spolehlivosti	hypotéza τ_{max}
Vypočtená p_f	53,36 ± 5,34%

Jak je vidět vypočtená hodnota p_f nesplnila podmínku (18) a hřídel je tedy nespolehlivý, diskuze k tomuto výsledku bude uvedena v závěru této práce.

Na obr. 10 a 11 je zobrazen tento problém v Haigově prostoru hlavních napětí [2]. Na prvním obr. je zobrazen graf ve kterém jsou zobrazeny všechny simulace a mezní křivky pro mez kluzu σ_k a dovolené napětí σ_D pro hypotézu HMH a τ_{max} . Na dalším obr. je detail oblasti ve které se pohybuje náš příklad spolu s mezními křivkami zmíněných hypotéz pro σ_D . Je zde vidět jednoznačně rozdíl mezi spolehlivou a nespolehlivou simulací, který je vymezen pevnostní podmínkou hypotézy τ_{max} .



Obrázek 10: Prostor hlavních napětí



Obrázek 11: Prostor hlavních napětí detail

1.3 Zhodnocení výsledků

Výsledky citlivostní a spolehlivostní analýzy jsou zcela dle očekávání a charakteru definované úlohy.

Výsledek spolehlivostní analýzy, kde ve více jak v 50% simulací dojde k selhání je v celku pochopitelný.

K posouzení spolehlivost je zde totiž použita pevnostní podmínka (16), což je ale nesmysl. Je totiž porovnávána pravděpodobnostně vypočtená hodnota σ_{red} s deterministicky určenou hodnotou σ_D , ve které jsou již zahrnuty veškeré nahodilosti plynoucí z materiálu, zatížení apod. Logickým krokem je tedy upravení pevnostní podmínky (16) na tvar

$$\sigma_{red} \tau_{max} \leq \sigma_k , \quad (19)$$

za předpokladu že se u součásti řeší pouze statické nadimenzování a neuvažuje se překračování jiných mezních stavů, se pak hřídel stává spolehlivým, což je ve shodě s nadimenzováním v analytické části této práce. V tomto případě je však problémem to, že se hřídel stává předdimenzovaným, jak je vidět z obr. 10 - oblast všech možných stavů je vzdálena od mezní křivky σ_k hypotézy τ_{max} .

Pokud jsou tedy do výpočtu zahrnuty veškeré podstatné nejistoty, které jsou popsány pravděpodobnostním modelem a které mohou ovlivnit překročení zkoumaného mezního stavu. Je naším cílem se co nejvíce přiblížit k mezní křivce daného mezního stavu a danou součást lépe nadimenzovat. Naším cílem by tedy mělo být vytvoření relevantních pevnostních kritérií pro pravděpodobnostní posuzování.

Toto samozřejmě není jednoduché. Největší překážkou je dostupnost statistických dat, které popisují např. rozptyl modulu pružnosti v tahu E materiálu či nahodilost zatížení které bude působit na danou součást po dobu její životnosti, už v době návrhu součásti. Je potřeba tedy vycházet s podobných součástí a materiálů u kterých je dostupnost těchto dat diskutabilní.

Reference

- [1] FIALA, Jaromír, Pavel SVOBODA a Karel ŠŤASTNÝ. *Strojnické tabulky*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1989. ISBN 80-03-00151-X.
- [2] HÁJEK, Emanuel, REIF, Pavel a VALENTA, František. *Pružnost a pevnost I*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1988. 429 s.
- [3] MELOUN, Milan a Jiří MILITKÝ. *Kompendium statistického zpracování dat*. Praha: Karolinum, 2012. ISBN 978-80-246-2196-8.
- [4] TEPLÝ, Břetislav a Drahomír NOVÁK. *Spolehlivost stavebních konstrukcí: teorie, numerické metody, navrhování, software : skriptum FAST VUT*. Vyd. 2. opr. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2577-6.
- [5] *OptiSlang - The optimizing structural language*. Dynamic Software and Engineering GmbH, Germany 2011.