



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Metoda konečných prvků

Robert Zemčík

Západočeská univerzita v Plzni  
2014

## Rovnice matematické teorie pružnosti

Předpokládáme homogenní, izotropní a lineární materiál, malé deformace.

### Jednoosá napjatost

Cauchyho podmínky rovnováhy

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + X = 0 \quad [\text{Nm}^{-3}]$$

Geometrické rovnice

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad [1]$$

Konstitutivní vztah

$$\sigma = E\varepsilon \quad [\text{Nm}^{-2}]$$

### Tenzorový zápis pro prostorovou napjatost

Cauchyho podmínky rovnováhy

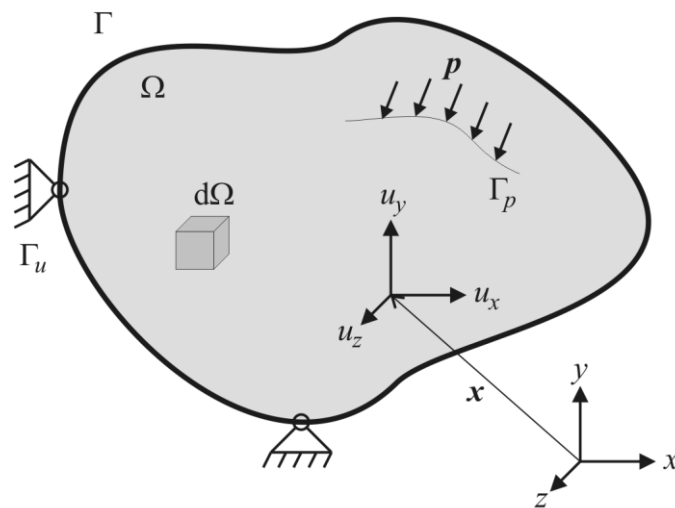
$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0$$

Geometrické rovnice

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Konstitutivní vztah

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$



## Maticový zápis pro obecnou (3D) prostorovou napjatost

Vektor posuvů

$$\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$$

Vektor napětí

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z]^T$$

Vektor deformací

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z]^T$$

Vektor objemových sil

$$\mathbf{b} = [X, Y, Z]^T$$

Matice diferenciálních operátorů

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}$$

Matice materiálové tuhosti (matice elastických konstant)

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

kde  $E$  je Youngův modul pružnosti v tahu,  $\nu$  je Poissonovo číslo a  $G$  je smykový modul, který lze (pro izotropní materiál) vyjádřit jako

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

**Cauchyho podmínky rovnováhy**

$$\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

**Geometrické rovnice**

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{u}$$

**Konstitutivní vztah**

(v našem případě zobecněný Hookeův zákon)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Máme tedy celkem 15 rovnic pro 15 neznámých složek. K tomu, aby existovalo právě jedno přesné řešení  $\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega$  s hranicí  $\Gamma = \partial\Omega$ , je dále nutné definovat příslušné okrajové podmínky (v případě statického problému) – v našem případě geometrické okrajové podmínky

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u$$

kde  $\bar{\mathbf{u}}$  jsou konkrétní hodnoty posunutí na zvolené části hranice  $\Gamma_u$ .

## Princip virtuálních prací – PVP

Virtuální práce  $\delta U$  vykonaná vnitřními silami je rovna virtuální práci  $\delta W$  vykonané vnějšími silami.

$$\delta U = \delta W$$

## Princip virtuálních sil – PVs

Obecně není vhodný pro odvození metody konečných prvků.

## Princip virtuálních posuvů – PVP

Pro virtuální posuvy

$$\delta \mathbf{u} = [\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z]^T$$

kterým odpovídají virtuální přetvoření

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = [\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z, \delta \gamma_x, \delta \gamma_y, \delta \gamma_z]^T$$

Ize PVP zapsat takto

$$\underbrace{\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega}_{\delta U} = \underbrace{\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} d\Gamma}_{\delta W}$$

kde

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega$$

je virtuální práce vnitřních sil

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega$$

je virtuální práce (vnějších) objemových sil

$$\int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} d\Gamma$$

je virtuální práce (vnějších) povrchových sil.

Vektor sil na povrchu (nenulový na části  $\Gamma_p$ ) lze podobně jako objemové síly zapsat ve formě

$$\mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z]^T$$

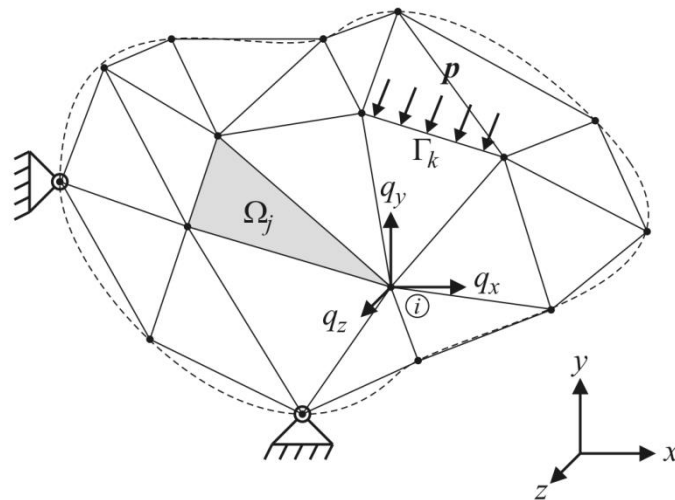
## Diskretizace

Nebudeme hledat přesné řešení  $\mathbf{u}$  definované na oblasti  $\Omega$  s hranicí  $\Gamma$ , ale jen přibližné. Danou oblast  $\Omega$  rozdělíme (diskretizujeme) na konečný počet podoblastí (*prvků, elementů*)  $\Omega_j$ , které mají společné hrany a uzly.

$$\Omega \approx \bar{\Omega} = \sum_{j=1}^m \Omega_j$$

Vznikne tedy konečnoprvková síť s  $m$  prvky,  $n$  uzly a rovněž s hranicí rozdělenou na  $r$  hran

$$\Gamma \approx \bar{\Gamma} = \sum_{k=1}^r \Gamma_k$$



Přibližné řešení pak hledáme ve tvaru funkce aproximované pomocí hodnot posuvů  $q_i$  v uzlech sítě.

$$\mathbf{u} \approx \sum_{i=1}^{3n} N_i q_i = \mathbf{Nq}$$

**Pozor!** Počet tzv. zobecněných souřadnic  $q_i$  je  $3n$ , neboť pracujeme se třemi složkami posunů ( $u_x$ ,  $u_y$  a  $u_z$ ) v každém uzlu, tj.  $i$ -tý uzel bude mít posuvy očíslované takto

$$[u_x, u_y, u_z]^T = [q_{3i-2}, q_{3i-1}, q_{3i}]^T$$

Pozn. Pokud by se jednalo o typ prvku, ve kterém jsou posuvy  $\mathbf{u}$  aproximované i pomocí hodnot natočení v uzlech, bude celkový počet zobecněných souřadnic větší, takže např.  $6n$  v případě 3 posuvů a 3 natočení v každém uzlu.

Další veličiny pak můžeme vyjádřit pomocí takto zvolené aproximace jako

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{u} \approx \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{Nq} = \mathbf{Bq} \\ &\stackrel{=B}{=} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{DBq} \end{aligned}$$

Virtuální posuvy pak budou

$$\delta \mathbf{u} \approx \mathbf{N} \delta \mathbf{q} + \delta \mathbf{N} \mathbf{q} = \mathbf{N} \delta \mathbf{q} \quad \Leftarrow \quad \delta \mathbf{N} = 0$$

a virtuální přetvoření budou

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{B} \delta \mathbf{q} + \delta \mathbf{B} \mathbf{q} = \mathbf{B} \delta \mathbf{q} \quad \Leftarrow \quad \delta \mathbf{B} = 0$$

PVP můžeme použít i na řešení dynamické úlohy (časově závislé), neboť do objemových sil lze zahrnout i síly setrvačné. Na základě d'Alambertova principu lze psát (bez uvažování dalších objemových sil, jako jsou gravitační, elektromagnetické apod.)

$$\mathbf{b} = -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{u}) = -\rho \ddot{\mathbf{u}}$$

kde  $\rho$  je materiálová hustota.

Pro zrychlení lze rovněž využít zvolenou aproximaci, a tudíž

$$\ddot{\mathbf{u}} \approx \mathbf{N} \ddot{\mathbf{q}}$$

**Pozor!** V případě dynamické úlohy je ale nutné připojit i příslušné počáteční podmínky pro rychlosti  $\dot{\mathbf{u}} \approx \dot{\mathbf{q}}$ .

Dosazením do PVP (a převedením všech členů na levou stranu) pak dostaneme

$$\delta \mathbf{q} \left[ \sum_{i=1}^m \left\{ \int_{\Omega_j} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \ddot{\mathbf{q}} \int_{\Omega_j} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \right\} - \sum_{k=1}^r \left\{ \int_{\Gamma_k} \mathbf{N}^T \mathbf{p} d\Gamma \right\} \right] = 0$$

Protože tato rovnost musí být splněna pro libovolné nenulové virtuální posunutí  $\delta \mathbf{q}$ , musí být nulový výraz v hranatých závorkách. Dostaneme tedy soustavu  $3n$  rovnic

$$\sum_{j=1}^m \left\{ \ddot{\mathbf{q}} \int_{\Omega_j} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \right\} + \sum_{j=1}^m \left\{ \int_{\Omega_j} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \right\} = \sum_{k=1}^r \left\{ \int_{\Gamma_k} \mathbf{N}^T \mathbf{p} d\Gamma \right\}$$

Po dosazení Hookeova zákona za  $\boldsymbol{\sigma}$  a vytknutí  $\mathbf{q}$  před (resp. za) integrál dostaneme

$$\underbrace{\sum_{j=1}^m \left\{ \int_{\Omega_j} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \right\}}_{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\sum_{j=1}^m \left\{ \int_{\Omega_j} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right\}}_{\mathbf{K}} \mathbf{q} = \underbrace{\sum_{k=1}^r \left\{ \int_{\Gamma_k} \mathbf{N}^T \mathbf{p} d\Gamma \right\}}_{\mathbf{F}}$$

nebo-li

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}$$

což je soustava  $3n$  algebraických rovnic, kde

$$\mathbf{M} = \int_{\bar{\Omega}} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\bar{\Omega}$$

označuje matici hmotnosti  $[3n \times 3n]$ ,

$$\mathbf{K} = \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\bar{\Omega}$$

matici tuhosti  $[3n \times 3n]$  a

$$\mathbf{F} = \int_{\bar{\Gamma}} \mathbf{N}^T \mathbf{p} d\bar{\Gamma}$$

vektor zobecněných sil  $[3n \times 1]$ . Veličiny s indexem  $j$  se vztahují jen k danému  $j$ -tému prvku.

V případě statické úlohy, kdy zanedbáváme setrvačné účinky, se soustava dále zjednoduší na

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}$$

Řešením je pak vektor

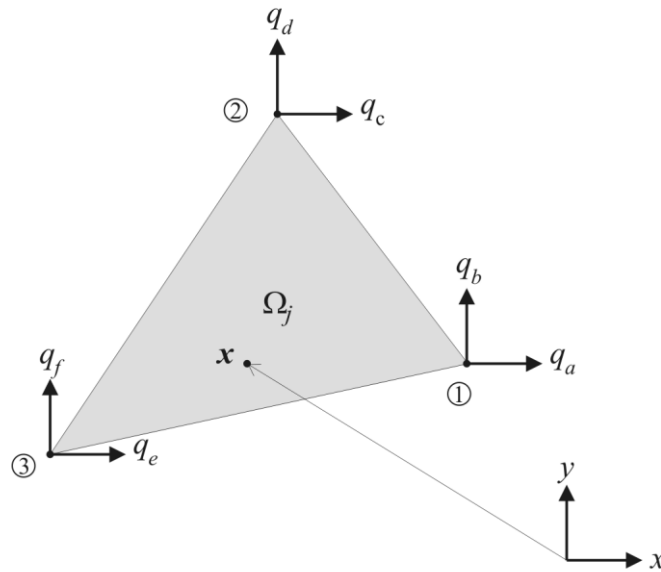
$$\mathbf{q} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$$

z kterého lze pomocí výše zvolených aproximací vyčíslit veškeré veličiny ( $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  a další) v celé diskretizované oblasti  $\bar{\Omega}$ .

Vzhledem ke způsobu diskretizace uvažované oblasti  $\Omega$  je vhodné provést příslušnou diskretizaci i pro aproximační funkce  $N_i$ . Protože se veličiny  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  a  $\mathbf{F}$  integrují zvlášť přes dané podoblasti (prvky) resp. jejich hranice, je v tom nejjednodušším případě výhodné volit aproximační funkce jako spojité a po částech lineární funkce a navíc tak, aby měly nenulové hodnoty jen v příslušném uzlu (ideálně hodnotu 1) a ve všech okolních uzlech hodnotu nula (trojúhelníkové funkce).

**Ale pozor!** Vlastnosti matice tuhosti (konkrétně hodnost) charakterizují statickou určitost či neurčitost systému. Inverzní matice k matici tuhosti sestavené tímto postupem nikdy neexistuje – soustava rovnic není jednoznačně řešitelná – těleso je nedostatečně uchyceno v prostoru. Aby tedy bylo možné matici tuhosti invertovat, je nyní nutné aplikovat na tuto soustavu rovnic zadané okrajové podmínky – některé hodnoty  $\mathbf{q}$  totiž známe. Pokud se jedná o nejjednodušší případ, kdy jsou zadány homogenní okrajové podmínky, tj.  $q_i = 0$  ve zvolených uzlech a směrech, můžeme příslušné řádky soustavy vyškrtnout (a rovněž sloupce matice tuhosti) a nová matice tuhosti již invertovatelná je.

## Rovinný trojúhelníkový prvek



Předpokládejme, že řešíme úlohu tělesa ve stavu rovinné napjatosti v rovině  $xy$ , tj.  $\sigma_z = \tau_x = \tau_y = 0$ . Diskretizaci plošné oblasti  $\Omega$  provedeme pomocí trojúhelníkových prvků  $\Omega_j$  se 3 uzly, tj. jen ve vrcholech. Označme hodnoty posunutí v uzlech prvku například takto

$$\mathbf{q}_j = [q_x^1, q_y^1, q_x^2, q_y^2, q_x^3, q_y^3]^T = [q_a, q_b, q_c, q_d, q_e, q_f]^T$$

Na každém trojúhelníku  $\mathbf{x} \in \Omega_j$  budeme předpokládat rozložení pole posuvů ve formě bilineární funkce

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2x + a_3y \\ a_4 + a_5x + a_6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & & & \\ & & & 1 & x & y \\ & & & & & & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{a}$$

Konkrétně pro hodnoty posuvů v uzlech musí potom platit

$$\mathbf{q}_j = \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \\ q_c \\ q_d \\ q_e \\ q_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & & & \\ & & & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & & & \\ & & & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & & & \\ & & & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{a}$$

a neznámé koeficienty proto můžeme pro každý prvek určit jako

$$\mathbf{a} = \bar{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{q}_j$$

Vektor deformací jsme výše odvodili v této formě

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{u} \approx \underbrace{\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{N}}_{\mathbf{B}} \mathbf{q}_j = \mathbf{B}\mathbf{q}_j$$

a pro tento typ prvku jej pak lze určit následovně



$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & & & & & \\ & \frac{\partial}{\partial y} & & & & \\ & & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & & \\ & & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{u}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y & & & \\ & & & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{A} \mathbf{a} =$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{A} \mathbf{A}_N^{-1} \mathbf{q}_j = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{N}_B \mathbf{q}_j$$

Vektor napětí je pak

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} \\ & & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_z \end{bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q}_j$$

A konečně matice tuhosti prvku  $[2n \times 2n]$  (zde  $n = 3$ ) je

$$\mathbf{K}_j = \int_{\Omega_j} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$$

Obdobným způsobem lze získat i matici hmotnosti a vektor zobecněných sil.

Volba bilineárních aproximačních funkcí má za následek to, že rozložení deformací na každém prvku je konstantní – matice  $\mathbf{B}$  je konstantní. Proto je i integrant  $\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$  konstantní a můžeme psát

$$\mathbf{K}_j = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} V$$

kde  $V$  je objem (plocha  $\times$  tloušťka) prvku.

## Sestavení globálních matic a vektorů

Veličiny  $\mathbf{K}_j$  a  $\mathbf{F}_j$  (popř.  $\mathbf{M}_j$ ), které se určí na každém prvku, je třeba následně spojit do globálních matic  $\mathbf{K}$  a  $\mathbf{F}$  (popř.  $\mathbf{M}$ ), a to tak, aby si odpovídaly řádky a sloupce těchto matic vzhledem k vektoru neznámých  $\mathbf{q}$  celé struktury. Pokud rozepíšeme soustavu rovnic  $\mathbf{K}_j \mathbf{q}_j = \mathbf{F}_j$  (v našem případě 6 rovnic) platnou pro každý prvek pomocí celého vektoru  $\mathbf{q}$ , rozpadnou se matice tuhostí prvku na řádkou matici  $\bar{\mathbf{K}}_j [2n \times 2n]$ , která má jen  $6 \times 6$  nenulových pozic a vektor sil na  $\bar{\mathbf{F}}_j [2n \times 1]$ , který má jen 6 nenulových řádků – jejich pozice jsou dány pozicí složek vektoru  $\mathbf{q}_j$  vzhledem k vektoru  $\mathbf{q}$ .

$$\begin{bmatrix} K_j^{11} & K_j^{12} & K_j^{13} & K_j^{14} & K_j^{15} & K_j^{16} \\ K_j^{21} & K_j^{22} & K_j^{23} & K_j^{24} & K_j^{25} & K_j^{26} \\ K_j^{31} & K_j^{32} & K_j^{33} & K_j^{34} & K_j^{35} & K_j^{36} \\ K_j^{41} & K_j^{42} & K_j^{43} & K_j^{44} & K_j^{45} & K_j^{46} \\ K_j^{51} & K_j^{52} & K_j^{53} & K_j^{54} & K_j^{55} & K_j^{56} \\ K_j^{61} & K_j^{62} & K_j^{63} & K_j^{64} & K_j^{65} & K_j^{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \\ q_c \\ q_d \\ q_e \\ q_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_j^a \\ F_j^b \\ F_j^c \\ F_j^d \\ F_j^e \\ F_j^f \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{K}_j \mathbf{q}_j = \mathbf{F}_j \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{K}}_j \mathbf{q} = \bar{\mathbf{F}}_j$$

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & K_j^{11} & K_j^{12} & \dots & K_j^{13} & K_j^{14} & \dots & K_j^{15} & K_j^{16} & \dots \\ \dots & K_j^{21} & K_j^{22} & \dots & K_j^{23} & K_j^{24} & \dots & K_j^{25} & K_j^{26} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & K_j^{31} & K_j^{32} & \dots & K_j^{33} & K_j^{34} & \dots & K_j^{35} & K_j^{36} & \dots \\ \dots & K_j^{41} & K_j^{42} & \dots & K_j^{43} & K_j^{44} & \dots & K_j^{45} & K_j^{46} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & K_j^{51} & K_j^{52} & \dots & K_j^{53} & K_j^{54} & \dots & K_j^{55} & K_j^{56} & \dots \\ \dots & K_j^{61} & K_j^{62} & \dots & K_j^{63} & K_j^{64} & \dots & K_j^{65} & K_j^{66} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_a \\ q_b \\ \vdots \\ q_c \\ q_d \\ \vdots \\ q_e \\ q_f \\ \vdots \\ q_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ F_j^1 \\ F_j^2 \\ \vdots \\ F_j^3 \\ F_j^4 \\ \vdots \\ \vdots \\ F_j^5 \\ F_j^6 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Potom výsledné matice soustavy jsou prostou sumou těchto řádkých matic příslušných jednotlivým prvkům.

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^m \bar{\mathbf{K}}_j \quad , \quad \mathbf{F} = \sum_{j=1}^m \bar{\mathbf{F}}_j$$

## Numerická integrace

U složitějších prvků jsou aproximační funkce bohatší a matice  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x})$  již obecně konstantní není. Navíc se integrace může provádět v tzv. lokálních souřadnicích a díky transformačním vztahům je i diferenciál objemu  $d\Omega$  závislý na poloze  $\mathbf{x} = (x, y)$ . Z těchto důvodů se používá numerická integrace – většinou tzv. Gaussova kvadratura.

Tato metoda je založena na přibližném vyjádření integrálu pomocí sumy několika funkčních hodnot ve vybraných místech (Gaussovo body) přenásobených váhovými koeficienty (váhy).

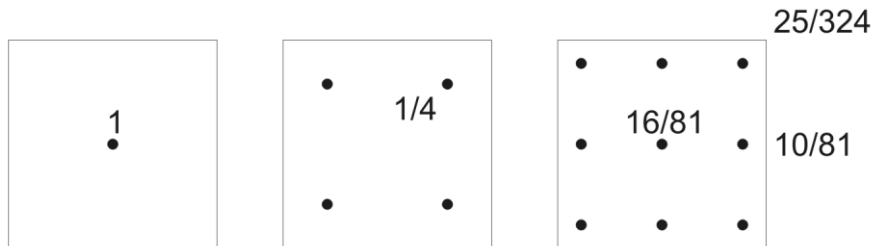
$$\int_{\Omega} f(x) d\Omega \approx \sum_{i=1}^n w_i f_i \quad , \quad f_i = f(x_i)$$

Pokud je funkce  $f(x)$  polynom, lze tímto postupem určit hodnotu integrálu dokonce přesně. Počet a poloha Gaussovo bodů a hodnoty vah jsou pak předem dány.

V metodě konečných prvků je použití Gaussovo kvadratury následující. Matice tuhosti (a dalších veličiny) je místo integrování vyčíslena takto

$$\mathbf{K}_j = \sum_{i=1}^n w_i \mathbf{K}_i \quad , \quad \mathbf{K}_i = \mathbf{B}(\mathbf{x}_i)^T \mathbf{D} \mathbf{B}(\mathbf{x}_i)$$

V případě našeho trojúhelníka by byl počet integračních bodů  $n=1$ , příslušná váha je rovna objemu prvku  $w_1 = V$  a jeho pozice  $\mathbf{x}_1$  by se nacházela uprostřed, tj. v těžišti trojúhelníka. V případě nejčastěji používaných čtyřhranných prvků (se 4 nebo 8 uzly) jsou pozice a váhy (krát objem prvku  $V$ ) pro první, druhý a třetí stupeň integrace (volba závisí na počtu uzlů a tvaru aproximačních funkcí) určeny takto:





evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Poděkování

Investice do rozvoje vzdělávání.

Tento dokument je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky v rámci projektu č. CZ.1.07/2.2.00/28.0206 „Inovace výuky podpořená praxí“.