INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Metoda konečných prvků – Mechanika / Matematika

Robert Zemčík

10. března 2015

Obsah

1 Definice úlohy 3

2 Rozbor úlohy 3

3 Analytické řešení 5

4 Formulace slabé úlohy 6

5 Variační formulace 13

6 Poděkování 14

Literatura 14

1 Definice úlohy

Určete rozložení[1] posuvů $u(x)$ a napětí $\sigma(x)$ na svislém štíhlém prutu konstantního kruhového průřezu A, délky l, zatíženého silou F na spodním volném konci a s uvažováním vlastní tíhy (tíhové zrychlení g, hustota materiálu ρ). Horní 'vetknutý' konec se posune o hodnotu u_0.

2 Rozbor úlohy

Uvažujme

- lineární, izotropní a homogenní materiál
- jednoosou napjatost (díky definované geometrii a zatížení); souřadnice x (osa prutu):

Jedná se tedy o úlohu lineární elastostatiky tělesa. Při řešení vyjdeme z rovnic matematické teorie pružnosti (v závorkách jsou uvedeny fyzikální jednotky):

Cauchyho podmínka rovnováhy

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x} + X = 0 \qquad [\mathrm{Nm}^{-3}] \tag{1}$$

Konstitutivní vztah (v tomto případě Hookeův zákon)

$$\sigma = E\varepsilon \qquad [\mathrm{Nm}^{-2}] \tag{2}$$

Geometrický vztah

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \qquad [-] \tag{3}$$

Význam všech použitých symbolů je následující:

- x [m] je zvolená osa v kartézském souřadnicovém systému xyz (zbývající souřadnice y a z zde nejsou třeba)
- u [m] je posuv ve směru a smyslu osy x
- ε [-] je deformace (poměrné prodloužení, konkrétně složka ε_{xx})
- σ [Nm^{-2}] je napětí (konkrétně normálová složka σ_{xx})

[1] Obecně "pole", ale zde se jedná jen o jednodimenzionální problém.

- X [Nm^{-3}] je objemová síla (konkrétně její složka působící ve směru osy x)
- F [N] je vnější síla (konkrétně její složka působící ve směru osy x)
- A [m^2] je plocha průřezu (kolmého na osu x)

Analytické (klasické) řešení úlohy hledáme jako funkci

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), \quad \Omega = (0, l) \tag{4}$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0) = u\Big|_{x=0} = u_0 \tag{5}$$

$$\sigma(l) = \sigma\Big|_{x=l} = \frac{F}{A} \tag{6}$$

Podmínka (4) znamená, že funkce $u(x)$ musí mít spojitou derivaci druhého řádu na Ω a musí být spojitá na $\bar{\Omega}$. To je proto, protože dosazením (2) and (3) do (1) dostaneme následující diferenciální rovnici druhého řádu

$$E\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + X = 0 \tag{7}$$

Jelikož celková tíha (s působištem v těžišti tělesa) je

$$Q = mg = \rho V g = \rho A l g \qquad [\mathrm{N}] \tag{8}$$

(m je celková hmotnost) dá se tíha jakožto objemová síla (tíha vztažená na jednotkový objem, tj. působící v každém bodě tělesa) vyjádřit ve tvaru

$$X = \frac{Q}{V} = \rho V g \frac{1}{V} = \rho g \qquad [\mathrm{Nm}^{-3}] \tag{9}$$

Po dosazení (9) do (7) a úpravě dostaneme

$$E\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \rho g = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\rho g}{E} \tag{11}$$

Na pravé straně rovnice můžeme označit $f = \frac{\rho g}{E}$ a dostaneme tak konečný zjednodušený zápis

$$-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = f \tag{12}$$

K této úloze ještě zobecníme zápis okrajových podmínek. Interval $(0, l)$ přeznačíme na (a, b) (tj. $a = 0, b = l$), hodnotu posuvu na horním konci označíme

$$u(a) = u_0 = g_D \tag{13}$$

a silovou podmínku přepíšeme ve formě funkce u, tj.

$$\sigma(b) = \frac{F}{A} = E\varepsilon(b) = Eu'(b) \quad \rightarrow \quad u'(b) = \frac{F}{EA} = g_N \tag{14}$$

kde čárka znamená prostorovou derivaci podle x, tj. $u' = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ a $u'' = \dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}$.

Potom obecný zápis klasické formulace úlohy je následující

$$-u'' = f \tag{15}$$

$$u(a) = g_D \quad \text{resp.} \quad u = g_D,\ x \in \Gamma_D = \{a\} \tag{16}$$

$$u'(b) = g_N \quad \text{resp.} \quad u' = g_N,\ x \in \Gamma_N = \{b\} \tag{17}$$

přičemž hledaným (klasickým) řešením je funkce $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), \quad \Omega = (a, b)$ s hranicí $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Rovnice (15) se nazývá Poissonova. Pokud navíc $f = 0$, pak je to rovnice Laplaceova.

Okrajová podmínka (16) se nazývá Dirichletova a okrajová podmínka (17) se nazývá Neumannova.

3 Analytické řešení

Rovnice (15) představuje obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty a konstantní pravou stranou. Předpokládáme proto řešení ve formě polynomu druhého stupně

$$u(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0 \tag{18}$$

Potom první derivace je

$$u'(x) = 2c_2x + c_1 \tag{19}$$

a druhá derivace je

$$u''(x) = 2c_2 \tag{20}$$

Dosazením (18), (19) a (20) do (15) a aplikací okrajových podmínek (16) a (17) postupně dostaneme (soustavu tří rovnic pro tři neznámé koeficienty)

$$u''(x) = 2c_2 = -f \quad \rightarrow \quad c_2 = -\frac{f}{2} \tag{21}$$

$$u'(b) = 2c_2 b + c_1 = g_N \quad \rightarrow \quad c_1 = g_N + fb \tag{22}$$

$$u(a) = c_2 a^2 + c_1 a + c_0 = g_D \quad \rightarrow \quad c_0 = g_D + \frac{f}{2}a^2 - (g_N + fb)a \tag{23}$$

Hledané řešení lze tedy zapsat ve formě

$$u(x) = -\frac{f}{2}x^2 + (g_N + fb)x + g_D + \frac{f}{2}a^2 - (g_N + fb)a \tag{24}$$

Dosazením původních mechanických veličin z (13) a (14) dostaneme například pro hodnotu posunu volného konce

$$u(l) = -\frac{\rho g}{2E}l^2 + (\frac{F}{EA} + \frac{\rho g}{E}l)l + u_0 + \frac{\rho g}{2E}0^2 - (\frac{F}{EA} + \frac{\rho g}{E}l))0 \tag{25}$$

$$u(l) = \frac{Fl}{EA} + \frac{\rho g}{2E}l^2 + u_0 \tag{26}$$

což lze chápat jako superpozici (známých vztahů z pružnosti a pevnosti – namáhání přímých prutů konstantního průřezu) prodloužení od síly F, tíhového zrychlení g a posunu počátku u_0.

Pro složitější úlohy typu (15) (2D a 3D úlohy, obecnou oblast Ω a okrajové podmínky na Γ_N a Γ_D, neizotropní, nehomogenní, nelineární materiál atp.) obecně není možné takové přesné řešení najít. Proto se hledá přibližné řešení. Jedna z možností je uvedena v následujícím textu.

4 Formulace slabé úlohy

Pokud existuje klasické řešení u původní úlohy (15), splňuje i následující rovnost

$$\int_a^b -u''v \, \mathrm{d}x = \int_a^b fv \, \mathrm{d}x \tag{27}$$

pro libovolnou funkci v popsanou níže. Nyní naše řešení oslabíme tak, že budeme hledat fukci $u(x) \in V_g$, která splňuje 'alespoň' rovnost po integraci per partes na levé straně

$$\int_a^b u'v' \, \mathrm{d}x - [u'v]_a^b = \int_a^b fv \, \mathrm{d}x \tag{28}$$

a to pro libovolnou *testovací funkci* $v = v(x) \in V_0$, kde V_g je *množina přípustných funkcí* a V_0 je *prostor testovacích funkcí*. Tyto prostory lze definovat následovně

$$V_g = \{u \in W_2^1(\Omega) : u = g_D \quad \text{na} \quad \Gamma_D\} \tag{29}$$

$$V_0 = \{v \in W_2^1(\Omega) : v = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma_D\} \tag{30}$$

kde W_2^1 je Sobolevův[2] prostor. Z charakteru úlohy a uvedené volby prostorů je vidět, že nyní stačí, aby existovala alespoň první derivace u, nikoliv i druhá.

Řešení je vhodné hledat ve formě superpozice

$$u = U + G \tag{31}$$

kde $U \in V_0$ je řešení úlohy s homogenní Dirichletovou podmínkou $g_D = 0$ (tj. $U = 0$ na Γ_D) a $G \in V_g$ je libovolná funkce, která na hranici splňuje nehomogenní Dirichletovu podmínku, tj. $G = g_D$ na Γ_D.

Nyní provedeme tzv. Galerkinovu diskretizaci: a) původní oblast Ω diskretizujeme na podoblasti (*prvky, elementy*) Ω_i, tak aby

$$\Omega \approx \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i \tag{32}$$

a zároveň b) nekonečnědimenzionální prostor V_0 aproximujeme podprostorem V_n konečné dimenze n s bázovými funkcemi $v_i, i = 1 \ldots n$.

Místo řešení původního problému nyní hledáme řešení diskretizovaného problému $\bar{u}$

$$\bar{u} = U + G \tag{33}$$

přičemž část U aproximujeme jako lineární kombinaci funkcí v_i

$$U = \sum_{i=1}^{n} u_i \, v_i \tag{34}$$

kde koeficienty u_i jsou neznámé (hledané) hodnoty (v *uzlech*), ze kterých lze zpětně rekonstruovat slabé řešení. Zjevně rovněž platí

$$\bar{u}' = U' + G' = \sum_{i=1}^{n} u_i \, v_i' + G' \tag{35}$$

Bázové funkce v_i volíme tak, aby měly co nejmenší nosič (ortogonální bázi obecně vytvořit nelze). Jednou z nejjednodušších možností je volit je ve formě trojúhelníkových funkcí (tzv. 'hat' funkcí – spojité a po částech lineární[3]) na jednotlivých diskretizovaných podoblastech Ω_n. Ty mají jen malý nosič, neboť $v_i \neq 0$ jen pro 2 sousedící podoblasti Ω_i.

[2] Všechny funkce $u \in L_2(\Omega)$ mají (zobecněné parciální) derivace 1. řádu rovněž z $L_2(\Omega)$, neboli $W_2^1(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : u' \in L_2(\Omega)\}$, $L_2(\Omega)$ je lineární prostor funkcí $f : \Omega \to \mathbb{R}$, pro něž je integrál $\int_\Omega |f|^2 \mathrm{d}\Omega$ konečný

[3] V nejjednodušším případě jsou lineární (p=1), dále pak kvadratické (p=2), obecně polynomy stupně p. Lze však hledat řešení i pro po částech konstatní funkce...

Funkce G se aproximuje také jako spojitá a po částech lineární funkce, kdy $G = g_D$ v uzlech odpovídajících Γ_D a $G = 0$ ve všech ostatních.

Místo rovnosti (28) požadujeme v aproximované úloze pro každou $v_i \in V_n$ splnění následující rovnosti

$$\int_a^b u' v_i' \, \mathrm{d}x - [u' v_i]_a^b = \int_a^b f v_i \, \mathrm{d}x \quad \forall v_i, i = 1 \dots n \tag{36}$$

kde

$$[u' v_i]_a^b = u'(b) v_i(b) - u'(a) v_i(a) \tag{37}$$

přičemž v našem případě $v_i(b) = 0$ nebo 1, $v_i(a) = 0$ a $u'(b) = g_N$, což je známá hodnota a lze ji tak v příslušné rovnici převést na pravou stranu rovnice. Tím dostaneme soustavu n algebraických rovnic pro neznámé hodnoty u_i.

Konkrétní volba testovacích funkcí, diskretizace

Rozdělme oblast Ω na $n = 4$ intervaly:

- $\Omega_1 = (a, a + l_1)$
- $\Omega_2 = (a + l_1, a + l_1 + l_2)$
- $\Omega_3 = (a + l_1 + l_2, a + l_1 + l_2 + l_3)$
- $\Omega_4 = (a + l_1 + l_2 + l_3, a + l_1 + l_2 + l_3 + l_4)$

Funkce $v_i, i = 1 \dots 4$ a funkce G pak budou vypadat následovně:

- $G = \begin{cases} G_1 = g_D \left(1 - \frac{x-a}{l_1}\right) & x \in \Omega_1 \\ 0 & x \in \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4 \end{cases}$
- $v_1 = \begin{cases} \frac{x-a}{l_1} & x \in \Omega_1 \\ 1 - \frac{x-a-l_1}{l_2} & x \in \Omega_2 \\ 0 & x \in \Omega_3 \cup \Omega_4 \end{cases}$
- $v_2 = \begin{cases} \frac{x-a-l_1}{l_2} & x \in \Omega_2 \\ 1 - \frac{x-a-l_1-l_2}{l_3} & x \in \Omega_3 \\ 0 & x \in \Omega_1 \cup \Omega_4 \end{cases}$
- $v_3 = \begin{cases} \frac{x-a-l_1-l_2}{l_3} & x \in \Omega_3 \\ 1 - \frac{x-a-l_1-l_2-l_3}{l_4} & x \in \Omega_4 \\ 0 & x \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \end{cases}$

- $v_4 = \begin{cases} \frac{x-a-l_1-l_2-l_3}{l_4} & x \in \Omega_4 \\ 0 & x \in \Omega_1 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4 \end{cases}$

Derivace výše uvedených funkcí pak budou vypadat takto:

- $G' = \begin{cases} G_1' = -\frac{g_D}{l_1} & x \in \Omega_1 \\ 0 & x \in \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4 \end{cases}$
- $v_1' = \begin{cases} \frac{1}{l_1} & x \in \Omega_1 \\ -\frac{1}{l_2} & x \in \Omega_2 \\ 0 & x \in \Omega_3 \cup \Omega_4 \end{cases}$
- $v_2' = \begin{cases} \frac{1}{l_2} & x \in \Omega_2 \\ -\frac{1}{l_3} & x \in \Omega_3 \\ 0 & x \in \Omega_1 \cup \Omega_4 \end{cases}$
- $v_3' = \begin{cases} \frac{1}{l_3} & x \in \Omega_3 \\ -\frac{1}{l_4} & x \in \Omega_4 \\ 0 & x \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \end{cases}$
- $v_4' = \begin{cases} \frac{1}{l_4} & x \in \Omega_4 \\ 0 & x \in \Omega_1 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4 \end{cases}$

V dalším řešení budeme potřebovat vyčíslit integrály typu

$$\int\limits_{\Omega_k} v_i' v_j' \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{l_k} & i = j \\ -\frac{1}{l_k} & |i-j| = 1 \\ 0 & |i-j| > 1 \end{cases} \tag{38}$$

Nyní může přistoupit k rozepsání jednotlivých členů rovnic (36). Začneme levou stranou pro testovací funkci v_1:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b u' v_1' \, \mathrm{d}x = \\
&\int_a^b (U' + G') v_1' \, \mathrm{d}x = \\
&\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n u_i \, v_i' + G' \right) v_1' \, \mathrm{d}x = \\
&\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n u_i \, v_i' \right) v_1' \, \mathrm{d}x + \int_a^b G' v_1' \, \mathrm{d}x = \\
&\sum_{i=1}^n \left(u_i \int_a^b v_i' v_1' \, \mathrm{d}x \right) + \int_a^b G' v_1' \, \mathrm{d}x = \\
&u_1 \int\limits_{(\Omega_1 + \Omega_2)} v_1' v_1' \, \mathrm{d}x + u_2 \int\limits_{\Omega_2} v_2' v_1' \, \mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega_1} G_1' v_1' \, \mathrm{d}x = \\
&u_1 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) + u_2 \left(-\frac{1}{l_2} \right) + \left(-\frac{g_D}{l_1} \right)
\end{aligned} \tag{39}$$

Hodnota závorky primitivní funkce z integrace per partes bude:

$$[u'v_1]_a^b = u'(b)v_1(b) - u'(a)v_1(a) = 0 \tag{40}$$

Pravá strana bude

$$\int\limits_a^b f v_1 \,\mathrm{d}x = f \int\limits_a^b v_1 \,\mathrm{d}x = f \int\limits_{(\Omega_1+\Omega_2)} v_1 \,\mathrm{d}x = f\left(\frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2}\right) \tag{41}$$

Pro testovací funkci v_2 jsou členy následující:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b u'v_2' \,\mathrm{d}x = \\
&\int_a^b (U' + G')v_2' \,\mathrm{d}x = \\
&\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n u_i\, v_i' + G'\right) v_2' \,\mathrm{d}x = \\
&\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n u_i\, v_i'\right) v_2' \,\mathrm{d}x + \int_a^b G'v_2' \,\mathrm{d}x = \\
&\sum_{i=1}^n \left(u_i \int_a^b v_i'v_2' \,\mathrm{d}x\right) + 0 = \\
&u_1 \int_{\Omega_2} v_1'v_2' \,\mathrm{d}x + u_2 \int_{(\Omega_2+\Omega_3)} v_2'v_2' \,\mathrm{d}x + u_3 \int_{\Omega_3} v_3'v_2' \,\mathrm{d}x = \\
&u_1\left(-\tfrac{1}{l_2}\right) + u_2\left(\tfrac{1}{l_2} + \tfrac{1}{l_3}\right) + u_3\left(-\tfrac{1}{l_3}\right)
\end{aligned} \tag{42}$$

$$[u'v_2]_a^b = u'(b)v_2(b) - u'(a)v_2(a) = 0 \tag{43}$$

$$\int\limits_a^b f v_2 \,\mathrm{d}x = f \int\limits_a^b v_2 \,\mathrm{d}x = f \int\limits_{(\Omega_2+\Omega_3)} v_2 \,\mathrm{d}x = f\left(\frac{l_2}{2} + \frac{l_3}{2}\right) \tag{44}$$

Pro testovací funkci v_3 jsou členy následující:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b u'v_3'\ \mathrm{d}x = \\
&\int_a^b (U'+G')v_3'\ \mathrm{d}x = \\
&\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n u_i\, v_i' + G'\right) v_3'\ \mathrm{d}x = \\
&\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n u_i\, v_i'\right) v_3'\ \mathrm{d}x + \int_a^b G'v_3'\ \mathrm{d}x = \\
&\sum_{i=1}^n \left(u_i \int_a^b v_i'v_3'\ \mathrm{d}x\right) + 0 = \\
&u_2 \int_{\Omega_3} v_2'v_3'\ \mathrm{d}x + u_3 \int_{(\Omega_3+\Omega_4)} v_3'v_3'\ \mathrm{d}x + u_4 \int_{\Omega_4} v_4'v_3'\ \mathrm{d}x = \\
&u_2\left(-\tfrac{1}{l_3}\right) + u_3\left(\tfrac{1}{l_3}+\tfrac{1}{l_4}\right) + u_4\left(-\tfrac{1}{l_4}\right)
\end{aligned} \tag{45}$$

$$[u'v_3]_a^b = u'(b)v_3(b) - u'(a)v_3(a) = 0 \tag{46}$$

$$\int_a^b f v_3\ \mathrm{d}x = f\int_a^b v_3\ \mathrm{d}x = f\int_{(\Omega_3+\Omega_4)} v_3\ \mathrm{d}x = f\left(\frac{l_3}{2}+\frac{l_4}{2}\right) \tag{47}$$

A konečně pro testovací funkci v_4 jsou členy následující:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b u'v_4'\ \mathrm{d}x = \\
&\int_a^b (U'+G')v_4'\ \mathrm{d}x = \\
&\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n u_i\, v_i' + G'\right) v_4'\ \mathrm{d}x = \\
&\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n u_i\, v_i'\right) v_4'\ \mathrm{d}x + \int_a^b G'v_4'\ \mathrm{d}x = \\
&\sum_{i=1}^n \left(u_i \int_a^b v_i'v_4'\ \mathrm{d}x\right) + 0 = \\
&u_3 \int_{\Omega_4} v_3'v_4'\ \mathrm{d}x + u_4 \int_{\Omega_4} v_4'v_4'\ \mathrm{d}x = \\
&u_3\left(-\tfrac{1}{l_4}\right) + u_4\left(\tfrac{1}{l_4}\right)
\end{aligned} \tag{48}$$

$$[u'v_4]_a^b = u'(b)v_4(b) - u'(a)v_4(a) = u'(b)1 = g_N \tag{49}$$

$$\int_a^b f v_4 \, \mathrm{d}x = f \int_a^b v_4 \, \mathrm{d}x = f \int_{\Omega_4} v_4 \, \mathrm{d}x = f \left(\frac{l_4}{2} \right) \tag{50}$$

Výslednou soustavu rovnic pak můžeme zapsat takto:

$$\begin{array}{lllll}
u_1 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) & +u_2 \left(-\frac{1}{l_2}\right) & & & + \left(-\frac{g_D}{l_1}\right) & = f \left(\frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2}\right) \\
u_1 \left(-\frac{1}{l_2}\right) & +u_2 \left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3}\right) & +u_3 \left(-\frac{1}{l_3}\right) & & & = f \left(\frac{l_2}{2} + \frac{l_3}{2}\right) \\
& u_2 \left(-\frac{1}{l_3}\right) & +u_3 \left(\frac{1}{l_3} + \frac{1}{l_4}\right) & +u_4 \left(-\frac{1}{l_4}\right) & & = f \left(\frac{l_3}{2} + \frac{l_4}{2}\right) \\
& & u_3 \left(-\frac{1}{l_4}\right) & +u_4 \left(\frac{1}{l_4}\right) & -g_N & = f \left(\frac{l_4}{2}\right)
\end{array} \tag{51}$$

nebo v maticovém zápisu

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} & -\frac{1}{l_2} & & \\ -\frac{1}{l_2} & \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} & -\frac{1}{l_3} & \\ & -\frac{1}{l_3} & \frac{1}{l_3} + \frac{1}{l_4} & -\frac{1}{l_4} \\ & & -\frac{1}{l_4} & \frac{1}{l_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \left(\frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2}\right) & +\frac{g_D}{l_1} \\ f \left(\frac{l_2}{2} + \frac{l_3}{2}\right) & \\ f \left(\frac{l_3}{2} + \frac{l_4}{2}\right) & \\ f \left(\frac{l_4}{2}\right) & +g_N \end{bmatrix} \tag{52}$$

Pokud bychom obě strany rovnice přenásobili konstantou EA a označíme-li $k_i = \frac{EA}{l_i}$, dostaneme

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \\ & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ & & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EAf \left(\frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2}\right) & +EA\frac{g_D}{l_1} \\ EAf \left(\frac{l_2}{2} + \frac{l_3}{2}\right) & \\ EAf \left(\frac{l_3}{2} + \frac{l_4}{2}\right) & \\ EAf \left(\frac{l_4}{2}\right) & +EAg_N \end{bmatrix} \tag{53}$$

respektive

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \\ & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ & & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho g A \left(\frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2}\right) & +EA\frac{u_0}{l_1} \\ \rho g A \left(\frac{l_2}{2} + \frac{l_3}{2}\right) & \\ \rho g A \left(\frac{l_3}{2} + \frac{l_4}{2}\right) & \\ \rho g A \left(\frac{l_4}{2}\right) & +F \end{bmatrix} \tag{54}$$

kde k_i jsou tuhosti jednotlivých elementů $[\mathrm{Nm}^{-1}]$.

5 Variační formulace

Uvažujme následující funkcionál pro již dikretizované funkce $w \in V_g$ (tj. $w = \sum_{i=1}^{n} w_i\, v_i + G$)

$$\Phi(w) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left(w'\right)^2 \, \mathrm{d}x - \int\limits_{\Omega} f w \, \mathrm{d}x - \int\limits_{\Gamma_N} g_N w \tag{55}$$

nebo-li

$$\Phi(w) = \frac{1}{2} \int\limits_{a}^{b} \left(w'\right)^2 \, \mathrm{d}x - \int\limits_{a}^{b} f w \, \mathrm{d}x - g_N w(b) \tag{56}$$

Lze ukázat, že námi výše nalezené řešení u minimalizuje tento funkcionál, tj.

$$\min \Phi(w) = \Phi(u), \ \forall w \tag{57}$$

neboť

$$\min \Phi(w) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}w_i}, \ \forall i \tag{58}$$

čímž dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}w_1} &= \int\limits_{\Omega} w' v_1' \, \mathrm{d}x - \int\limits_{\Omega} f v_1 \, \mathrm{d}x && = 0 \\
\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}w_2} &= \int\limits_{\Omega} w' v_2' \, \mathrm{d}x - \int\limits_{\Omega} f v_2 \, \mathrm{d}x && = 0 \\
\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}w_3} &= \int\limits_{\Omega} w' v_3' \, \mathrm{d}x - \int\limits_{\Omega} f v_3 \, \mathrm{d}x && = 0 \\
\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}w_4} &= \int\limits_{\Omega} w' v_4' \, \mathrm{d}x - \int\limits_{\Omega} f v_4 \, \mathrm{d}x - g_N && = 0
\end{aligned} \tag{59}$$

ekvivalentní s (36).

Rozepišme funkcionál pro naši 1D úlohu. Připomeňme si, že

- $u' \approx w' = \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$
- $f = \frac{\rho g}{E}$
- $g_N = \frac{F}{EA}$

Potom

$$\Phi(w) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\sigma}{E}\right)^2 \mathrm{d}x - \int\limits_{\Omega} \frac{\rho g}{E} u \ \mathrm{d}x - \frac{F}{EA} u(b) \qquad / \cdot (EA) \tag{60}$$

$$EA\Phi(w) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} A\sigma\varepsilon \mathrm{d}x - \int\limits_{\Omega} \rho g A u \ \mathrm{d}x - Fu(b) \tag{61}$$

$$EA\Phi(w) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \sigma\varepsilon \mathrm{d}V - \int\limits_{\Omega} \rho g u \ \mathrm{d}V - Fu(b) \tag{62}$$

neboli můžeme nadefinovat nový funkcionál

$$\Pi = \int\limits_{\Omega} W(\varepsilon)\mathrm{d}V - \int\limits_{\Omega} uX \ \mathrm{d}V - \int\limits_{\Gamma_N} Fu \tag{63}$$

kde $W(\varepsilon) = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$ je hustota deformační energie, $X = \rho g$.

Tento fakt má obrovský význam, neboť funkcionál Π má u většiny fyzikálních problémů význam celkové energie systému (energie vnějších i vnitřních sil) a úlohu MKP lze pak formulovat jako úlohu minima tohoto funkcionálu.

6 Poděkování

Rád bych zde poděkoval kolegovi Josefu Daňkovi z Katedry matematiky (ZČU v Plzni) za podnětné diskuze a korektury týkající se metody konečných prvků z matematického pohledu.

Reference

[1] Daněk J.: Úlohy sedlového bodu v Hilbertových prostorech a jejich numerické modely. Diplomová práce, Západočeská univerzita v Plzni, 1995.

[2] Šolín P.: Partial differential equations and the finite element method, Wiley-Interscience, 2006.

[3] Johnson C.: Numerical solution of partial differential equations by the finite element method. Cambridge University Press, 1987.

[4] Míka S., Přikryl P., Brandner M.: Speciální numerické metody. Vydavatelský servis, Plzeň, 2006.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Poděkování

Investice do rozvoje vzdělávání.

Tento dokument je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky v rámci projektu č. CZ.1.07/2.2.00/28.0206 „Inovace výuky podpořená praxí“.