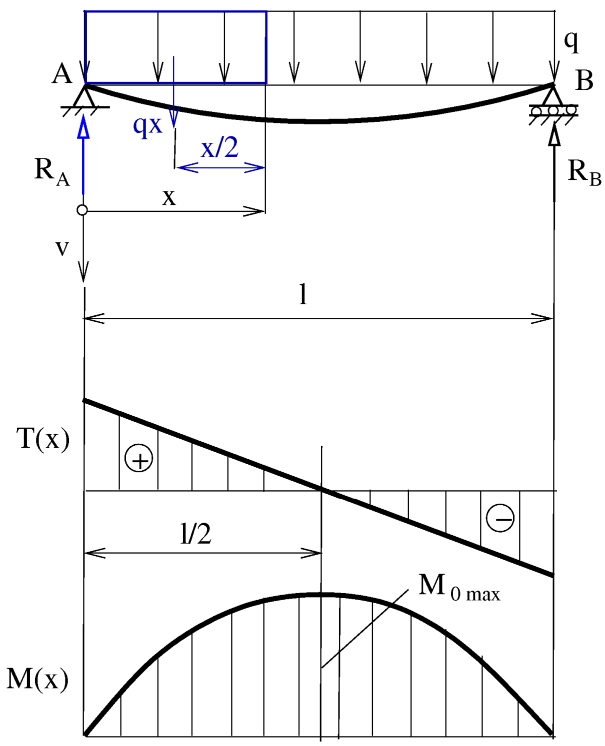
Ohyb přímých prutů – nosníků

Ohyb nastává, jestliže v řezu jakožto vnitřní účinek působí ohybový moment, tj. dvojice sil ležící v rovině kolmé k rovině řezu.

Ohybový moment určíme jako součet momentů od všech silových účinků po jedné straně řezu vůči řezu (o tomto způsobu vyšetřování mluvíme též jako o metodě řezu).
Pokud v řezu působí pouze ohybový moment, hovoříme o **čistém ohybu**. Ohybový moment bývá zpravidla doprovázen **posouvající (smykovou) silou**, tj. silou ležící v rovině řezu. Vyšetříme ji jako součet všech příčných sil po jedné straně řezu. Poznamenejme, že vliv posouvající síly je u běžných nosníků (tj. u nosníků, jejichž výška průřezu je malá ve srovnání s délkou) malý a lze jej bez újmy na přesnosti zanedbat. Úvahy o případech, kdy posouvající sílu zanedbat nelze (vysoké krátké nosníky) vycházejí za rámec tohoto kurzu.

Vyšetřování vnitřních účinků demonstrujme na příkladu.

Vyšetřete průběh posouvající síly $T(x)$ a ohybového momentu $M(x)$ pro zadaný nosník.



Určení reakcí – z podmínek rovnováhy

$$\sum M_B = 0$$

$$-R_A\, l + ql\, \frac{l}{2} = 0 \qquad R_A = \frac{ql}{2}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$R_B\, l + ql\, \frac{l}{2} = 0 \qquad R_B = \frac{ql}{2}$$

Posouvající síla:

$$T(x) = R_A - q \cdot x = \frac{ql}{2} - qx$$

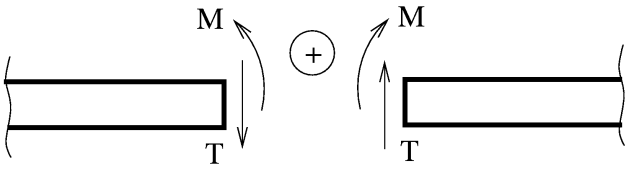
$$M(x) = R_A - q\,x \cdot \frac{x}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

Určení maximálního momentu

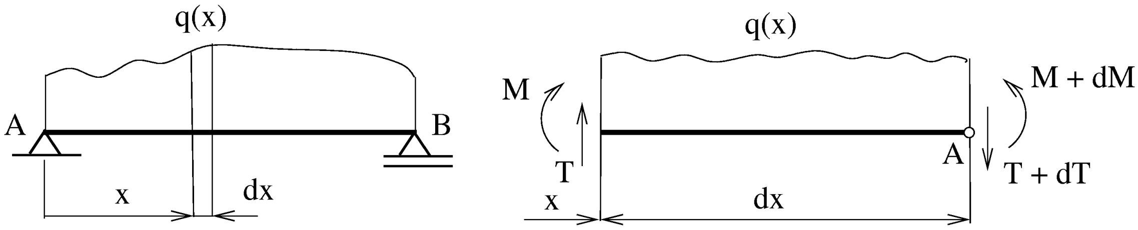
$$\frac{dM(x)}{dx} = 0\ ,\ \frac{ql}{2} - qx = 0 \qquad x = \frac{l}{2}$$

$$M_{o\,max} = M(l/2) = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ql^2}{8}$$

Úmluva o znaméncích vnitřních účinků při postupu k řezu zleva resp. zprava je patrna z obrázku.



Schwedlerova věta. Vyjměme z nosníku v místě x element o délce dx a zkoumejme jeho rovnováhu



Složková podmínka rovnováhy

$$T-(T+dT)-q(x)dx=0$$

$$\boxed{\frac{dT(x)}{dx}=-q(x)}$$

Derivace posouvající síly je rovna záporně vzatému spojitému obtížení.
Momentová podmínka rovnováhy k bodu A

$$M+dM-M-T\,dx+\underbrace{q(x)dx\cdot\frac{dx}{2}}_{\to 0}=0$$

$$\boxed{\frac{dM(x)}{dx}=T(x)}$$

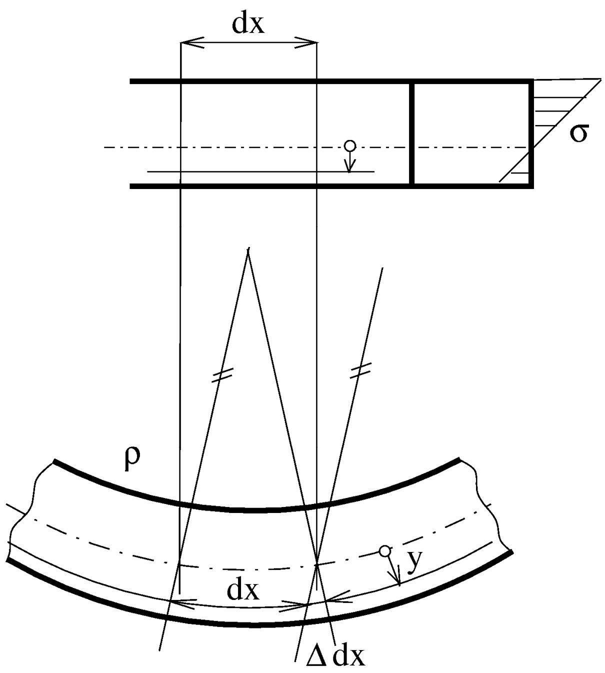
Derivace ohybového momentu je rovna posouvající síle. Extrém ohybového momentu je tedy nutno hledat v bodech, kde posouvající síla mění znaménko. Předcházející úvahy lze shrnout

$$\frac{dT(x)}{dx}=-q(x),\quad \frac{dM(x)}{dx}=T(x),\quad \frac{d^2M(x)}{dx^2}=\frac{dT(x)}{dx}=-q(x)$$

Tyto vztahy jsou nazývány Schwedlerova věta, někdy též jednotlivě Schwedlerovy věty. Uplatní se při hledání maximálního ohybového momentu.

Rozložení normálových napětí při ohybu

Uvažujme element nosníku vyříznutý dvěma soumeznými řezy kolmými na podélnou osu nosníku. Před deformací jsou řezy rovinné a rovnoběžné, po deformaci zůstávají rovinné, pouze se vůči sobě navzájem natáčí. Původně přímá vlákna se zakřivují, některá se protahují, jiná zkracují. Mezi nimi leží tzv. neutrálná vrstva (čerchovaná čára na obr.), jejíž vlákna délku nemění. Z obrázku plynou následující vztahy:



$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx}, \quad \Delta dx = ay, \quad \frac{\Delta dx}{y} = \frac{dx}{\rho},$$

ρ je poloměr křivosti. Bude tedy

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{1}{\rho} \cdot y$$

a s uvážením Hookeova zákona

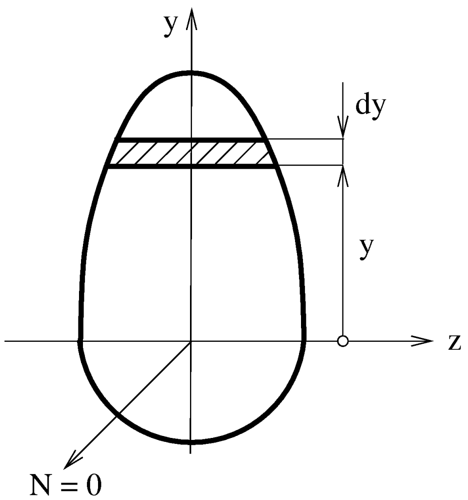
$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E}{\rho} \cdot y = cy \ .$$

Napětí lineárně roste se vzdáleností od neutrálná vrstvy.

Neutrálná osa je průsečnice roviny řezu s neutrálnou vrstvou. Neutrálná osa prochází těžištěm průřezu, což dokazuje následující úvaha.

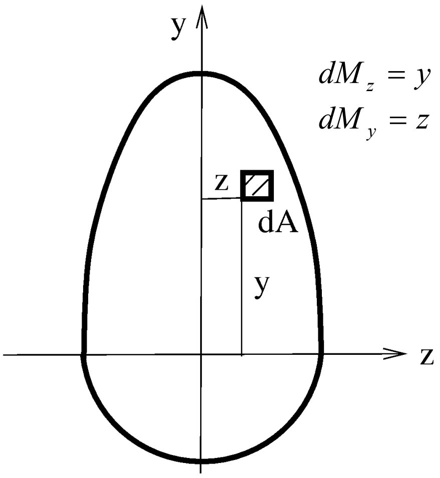
Při čistém ohybu je jediným vnitřním účinkem ohybový moment, tedy výsledná normálová síla v řezu musí být rovna nule.

$$N = \int_A dN = \int_A \sigma . dA = \int_A cy\, dA = c \int_A y\, dA = 0 \ .$$



Poněvadž pro zakřivený nosník je $c \neq 0$, musí být $\int ydA = 0$. Tento integrál představuje statický moment plochy k neutrálné ose, který je nulový pouze v případě centrální osy. Neutrálná osa tedy prochází těžištěm.

Moment vnitřních sil k neutrálné ose



$$dM_z = y\,\sigma\,dA$$
$$dM_y = z\,\sigma\,dA$$

$$\vec{M} = \vec{M}_z + \vec{M}_y$$

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \sqrt{\left(\int_A y \cdot cy\,dA\right)^2 + \left(\int_A z.cy\,dA\right)^2}$$

$$= c\sqrt{\left(\int_A y^2 dA\right)^2 + \left(\int_A zy\,dA\right)^2} = c\,\sqrt{J_z^2 + D_{zy}^2}$$

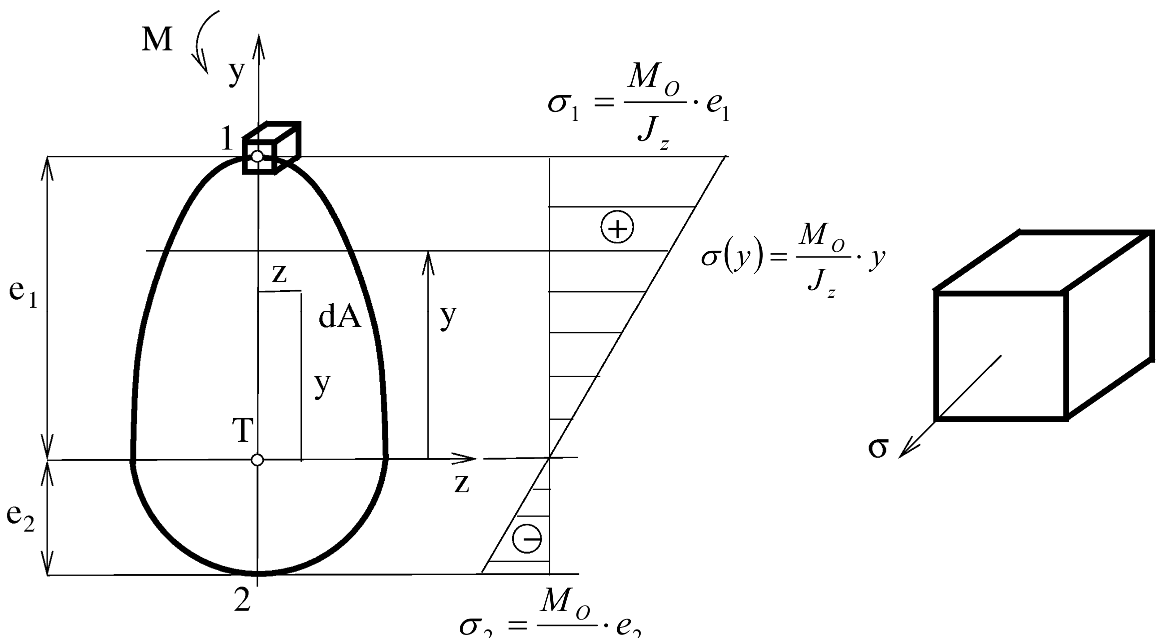
Budou-li osy *y, z* hlavní osy, je $D_{zy} = 0$ a výraz pro moment přejde ve tvar $M = c\,J_z$. Nastává tzv. rovinný ohyb.

Rovinný ohyb nastane, je-li stopa ohybového momentu (průsečnice roviny, v níž působí dvojice sil vyvolávající ohybový moment, s rovinou řezu) totožná s jednou s hlavních os průřezu. Neutrálná osa je pak na tuto osu kolmá.

Ze vztahu pro napětí a pro moment lze pak psát

$$c = \frac{M}{J_z} = \frac{E}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E\,J_z}\,, \qquad \sigma = \frac{M}{J_z} \cdot y$$

Pevnostní podmínka při ohybu



$$\sigma_1 = \frac{M_O}{J_z} \cdot e_1$$

$$\sigma(y) = \frac{M_O}{J_z} \cdot y$$

$$\sigma_2 = \frac{M_O}{J_z} \cdot e_2$$

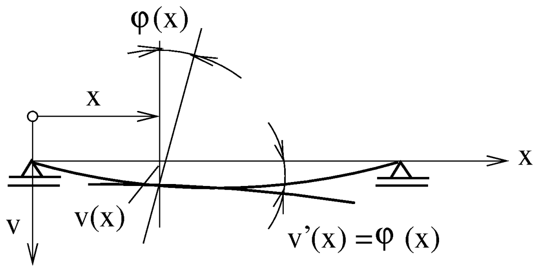
Maximální napětí je v největší vzdálenosti od neutrálné osy (body 1, 2). Vzniká jednoosá napjatost, tedy pevnostní podmínku lze psát $\sigma \leq \sigma_D$.

Zavedeme-li za $\frac{J_z}{e} = W_o$, J_z je kvadratický moment k neutrálné ose, e vzdálenost krajního vlákna, W_o průřezový modul v ohybu, lze pevnostní podmínku v ohybu psát

$$\boxed{\sigma = \frac{M_o}{W_o} \leq \sigma_D}$$

Pozn. Pro složené průřezy nelze W_o sčítat či odčítat! Nejprve je nutno určit kvadratický moment složeného průřezu a poté tento dělit vzdáleností krajního vlákna k získání W_o.

Deformace nosníků – průhyby a natočení
Při řešení budeme vyšetřovat tzv. průhybovou čáru, tj. spojnici těžiště jednotlivých řezů nosníku. Před deformací je to přímka, po deformaci křivka.



Předpoklady řešení

1. Platí Hookeův zákon (lineární závislost mezi zatížením a deformací)
2. Jedná se o rovinný ohyb – průhybová čára je funkcí pouze souřadnice x ve směru podélné osy rovníku $v = v(x)$
3. Průhyby jsou malé, průhybová čára je plochá
4. Jedná se o prizmatický nosník - $E J_z = const.$

Řešení pomocí diferenciální rovnice průhybové čáry
Pro nosník byl výše odvozen vztah pro poloměr křivosti (křivost)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EJ_z} ,$$

ρ je poloměr křivosti, $M(x)$ ohybový moment, E modul pružnosti v tahu, Jz kvadratický moment průřezu k neutrálné ose.Z matematiky je znám výraz pro křivost $\frac{1}{\rho}$ rovinné křivky $v(x)$

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{v''(x)}{\left[1 + v'^2(x)\right]^{\frac{3}{2}}} .$$

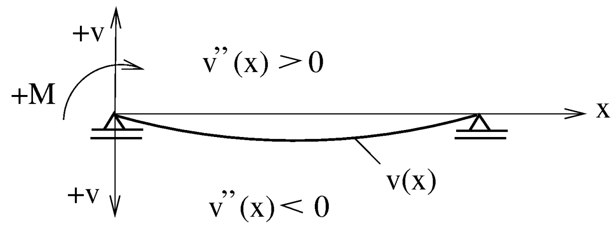
S uvážením 3. předpokladu $v'(x) << 1$, lze tedy její kvadrát vůči 1 zanedbat a bez újmy na přesnosti psát

$$\frac{1}{\rho} = \pm v''(x),$$

po dosazení za $\frac{1}{\rho}$ pak diferenciální rovnice průhybové čáry je

$$v''(x) = \pm\frac{M(x)}{EJ_z}, \ v'(x) = \varphi(x).$$

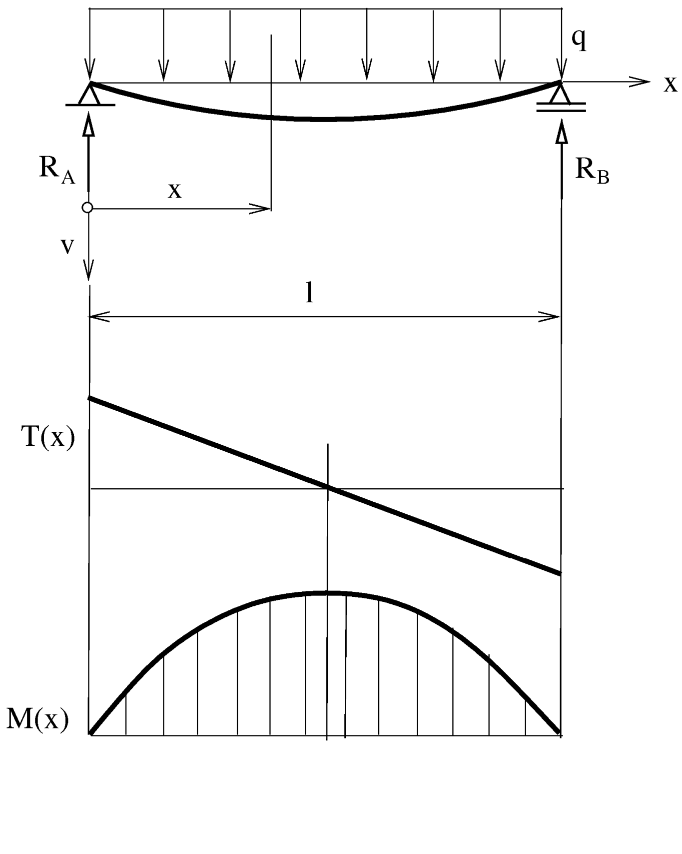
Znaménko diferenciální rovnice závisí na volbě souřadnicového systému



V technické praxi se zpravidla volí kladný průhyb dolů, tj. diferenciální rovnice průhybové čáry má tvar

$$v''(x) = -\frac{M(x)}{EJ_z}$$

Použití této rovnice je patrno na příkladě.



Dáno : q, l, E, J_z

Určeté průhyb $v(x)$ a úhel natočení $\varphi(x)$ nosníku. Z podmínek rovnováhy určíme reakce. $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$ a metodou řezu posouvající síla $T(x)$ a ohybový moment $M(x)$.

$$T(x) = R_A - qx = \frac{ql}{2} - qx$$

$$M(x) = R_A x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

Diferenciální rovnice tedy bude

$$v''(x) = -\frac{1}{EJ_z}\left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}\right) = \frac{1}{EJ_z}\left(\frac{qx^2}{2} - \frac{qlx}{2}\right)$$

po integraci

$$\varphi(x) = v'(x) = \frac{1}{EJ_z}\left(\frac{qx^3}{6} - \frac{qlx^2}{4} + C\right) \ , \quad v(x) = \frac{1}{EJ_z}\left(\frac{qx^4}{24} - \frac{qlx^3}{12} + Cx + D\right) \ ,$$

kde *C, D* jsou integrační konstanty. Určíme je z okrajových podmínek. V našem případě je průhyb nad podporami *A, B* nulový, tedy $v(0)=0$, $v(l)=0$. Odtud $D=0$, $C=\frac{ql^3}{24}$ a funkce úhlu natočení a průhybu jsou

$$\varphi(x) = \frac{1}{EJ_z}\left(\frac{qx^3}{6} - \frac{qlx^2}{4} + \frac{ql^3}{24}\right) \ , \quad v(x) = \frac{1}{EJ_z}\left(\frac{qx^4}{24} - \frac{qlx^3}{12} + \frac{ql^3x}{24}\right).$$

Průhyb a natočení v libovolném místě pak získáme dosazením příslušné souřadnice. Např. průhyb uprostřed nosníku $\left(x=\frac{l}{2}\right)$ bude $v(l/2) = \frac{5ql^4}{384EJ_z}$.

Řešení pomocí diferenciální rovnice je snadné, pokud nosník má jen jedno pole.

Při více polích je nutno vyšetřit funkce průhybu ve všech polích i v případě, že nás zajímají deformace pouze v konkrétním místě, navíc je nutno určovat integrační konstanty ze soustavy rovnic – okrajových podmínek. Každé pole představuje 2 integrační konstanty, tzn. že při například 5 polích je třeba řešit 10 rovnic o 10 neznámých. Tuto nevýhodu odstraňuje **metoda momentových ploch (Mohrova metoda)**.

Metoda vychází z analogie dvou diferenciálních rovnic – Schwedlerovy věty a diferenciální rovnice průhybové čáry:

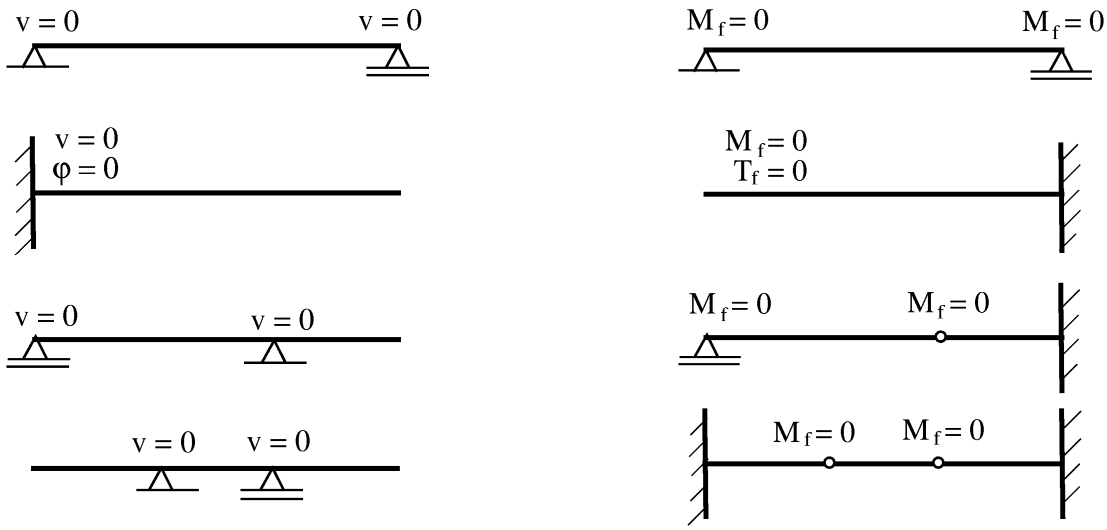
$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x) \ , \quad \frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{1}{EJ_z}\cdot M(x) \ .$$

Chápeme-li výraz $M(x)$ jako jakési fiktivní spojité obtížení, bude ohybový moment odpovídající tomuto fiktivnímu obtížení odpovídat až na konstantu $\frac{1}{EJ_z}$ průhybu za předpokladu, že i okrajové podmínky obou diferenciálních rovnic jsou analogické, což zajistíme použití tzv. náhradního nosníku (viz tab. níže).

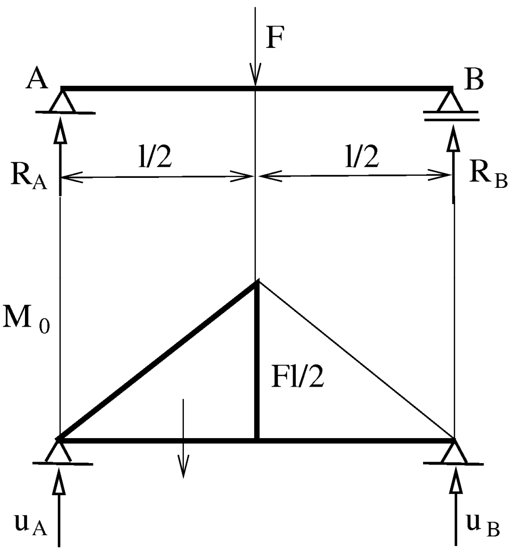
Závěr: Zatížíme-li náhradní nosník fiktivním spojitým obtížením ve tvaru momentové plochy, bude posouvající síla od fiktivního obtížení odpovídat úhlu natočení a ohybový moment od fiktivního obtížení průhybu nosníku

$$\varphi = \frac{1}{EJ_z} \cdot \left[T_{fikt}\right], \quad v = \frac{1}{EJ_z}\left[M_{fikt}\right]$$

skutečný nosník — náhradní nosník



Příklady užití metody:



Vyšetřete průhyb uprostřed nosníku a natočení nad podporou A.

Dáno $F,\ l,\ E,\ J_z$.

Z podmínek rovnováhy určíme reakce $R_A = R_B = \dfrac{F}{2}$, metodou řezu pak průběh ohybového momentu a zakreslíme momentovou plochu. Touto momentovou plochou pak zatížíme náhradní nosník a hledáme ohybový moment od tohoto fiktivního zatížení (pro určení průhybu) a posouvající sílu (pro určení úhlu natočení).

S využitím symetrie (nebo momentových podmínek rovnováhy) určíme fiktivní reakce:

$$U_A = U_B, \qquad 2U_A - \frac{1}{2}\frac{Fl}{4}\cdot l = 0, \quad U_A = U_B = \frac{Fl^2}{16}$$

Úhel natočení nad podporou A bude

$$\varphi(0) = \frac{1}{EJ_z}\cdot\left[T_{fikt}(0)\right] = \frac{1}{EJ_z}\cdot U_A = \frac{Fl^2}{16EJ_z}$$

průhyb uprostřed nosníku bude

$$v(l/2)=\frac{1}{EJ_z}\cdot\left[M_{fikt}(l/2)\right]=\frac{1}{EJ_z}\cdot\left[U_A\cdot\frac{l}{2}-\frac{1}{2}\frac{Fl}{4}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{l}{2}\right]$$

$$v(l/2)=\frac{1}{EJ_z}\cdot\left[\frac{Fl^2}{16}\cdot\frac{l}{2}-\frac{Fl^3}{96}\right]=\frac{Fl^3}{48EJ_z}$$

Staticky neurčité nosníky

Je-li uložení nosníku takové, že máme více neznámých reakčních účinků, než nezávislých podmínek rovnováhy (počet stupňů volnosti je záporný), jedná se o staticky neurčitou úlohu. K vyřešení reakčních účinků a následnému dalšímu řešení nosníku musíme doplnit podmínky rovnováhy potřebným počtem dalších rovnic. Tyto rovnice získáme z analýzy přetvoření – tzv. deformační podmínky. Na této myšlence je založena **vyrovnávací (silová) metoda**.

Postup je následující:

1. Zakreslíme si veškeré reakční účinky v uložení nosníku a určíme, kolikrát je úloha staticky neurčitá, tj. o kolik více je reakčních účinků než nezávislých podmínek rovnováhy.

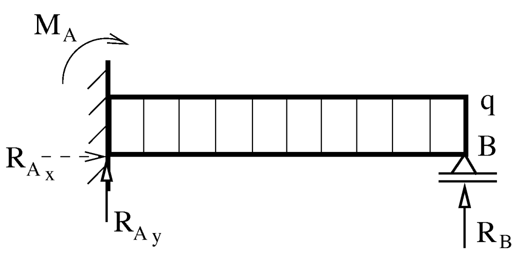
2. Odstraníme nadbytečné uložení tak, aby nosník byl uložen staticky určitě.

3. Připojíme k nosníku reakční účinky dle původního uložení.

4. Formulujeme deformační podmínky tak, aby uvolněný nosník a původní nosník byly z hlediska deformací ekvivalentní (tj. odstranili-li jsme podporu, musíme přidat podmínku nulového průhybu v daném místě, při odstraněném vetknutí podmínky nulového natočení a nulového průhybu, při náhradě vetknutí podporou podmínku nulového natočení).

Deformace v deformačních podmínkách vyjadřujeme zpravidla metodou momentových ploch. Tím jsme vytvořili výpočtový model s dostatkem rovnic pro vyřešení všech reakčních účinků. Po jejich vyřešení postupujeme podle požadavků úlohy jako u nosníků staticky určitých.

Příklad vytvoření výpočtového modelu :

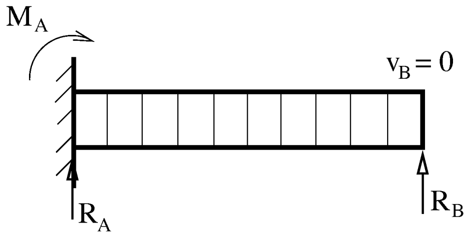


4 reakční účinky - $R_{A_x}, R_{A_y}, M_A, R_B$

3 podmínky rovnováhy, přičemž ze složkové podmínky ve směru x ihned plyne $R_{A_x}=0$

Zbývají 3 neznámé a dvě rovnice, úloha je 1x staticky neurčitá. Jsou možné dva výpočtové modely.

a) odstranění podpory *B*



b) náhrada vetknutí *A* podporou