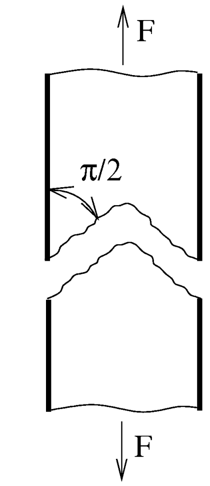
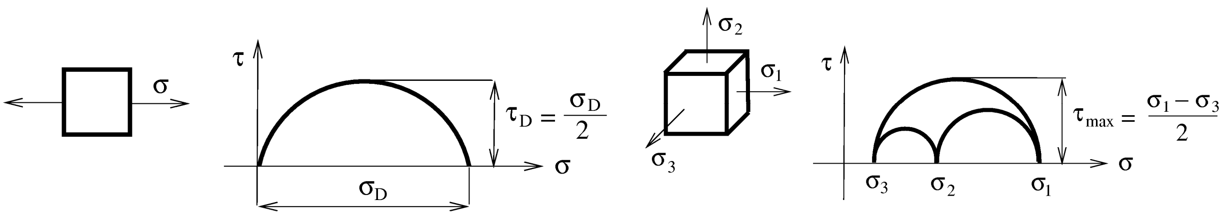
Mezní stavy napjatosti a podmínky pevnosti

Základní informace o materiálu (mez kluzu R_e, mez pevnosti R_m) jsou získávány z tahové zkoušky, čili při jednoosé napjatosti. Dovolené namáhání σ_D určené z meze kluzu či meze pevnosti se vztahuje tedy rovněž k jednoosé napjatosti. Pro posuzování pevnosti při víceosé napjatosti je proto nutné mít kriterium pro srovnávání jednoosé a víceosé napjatosti. Tato kriteria poskytují teorie pevnosti – hypotézy.

Hypotéza maximálních smykových napětí – Guestova



U tvárných materiálů dojde při namáhání tahem k porušení v rovině maximálního smykového napětí. Na tomto základě byla vyslovena hypotéza, že o stavu napjatosti rozhoduje maximální smykové napětí. Pevnostní podmínku lze tedy napsat ke tvaru $\tau_{max} \leq \tau_D$, kde τ_D je smykové napětí při jednoosé napjatosti odpovídající dovolenému namáhání a $\tau_{\max}$ je maximální smykové napětí zkoumané napjatosti.



Maximální smykové napětí prostorové napjatosti dané hlavními napětími $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ $(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$ je $\tau_{max} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$. Pevnostní podmínky tedy lze psát

$$\tau_{max} \leq \tau_D, \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{\sigma_D}{2}, \quad \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_D.$$

Výraz $\sigma_1 - \sigma_3$ lze označit symbolem σ_{red} - redukované (též srovnávací) napětí a pevnostní podmínka má pak formálně stejný tvar jako pro jednoosou napjatost

$$\sigma_{red} \leq \sigma_D, \quad \sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3.$$

Můžeme si představit, že pomocí redukovaného napětí převedeme víceosou napjatost na pevnostně ekvivalentní napjatost jednoosou s napětím σ_{red}. Hypotéza je vhodná pro houževnaté materiály se stejnou pevností v tahu a tlaku.

Hypotéza HMH (Huber, von Mises, Hencky), energetická
Dle této hypotézy rozhoduje o stavu napjatosti měrná energie napjatosti (hustota deformační energie) λ_{tv} na změnu tvaru. Pevnostní podmínku lze sepsat

$$\lambda_{tv} = \lambda_{tv_D} \ ,$$

po dosazení za příslušné energie a úpravě (zájemci najdou v literatuře) ji lze vyjádřit např. ve tvaru

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \le \sigma_D \,.$$

Zavedeme-li opět redukované napětí, bude podmínka mít tvar

$$\sigma_{red} \le \sigma_D \ ,$$

kde

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}$$

nebo též

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \ ,$$

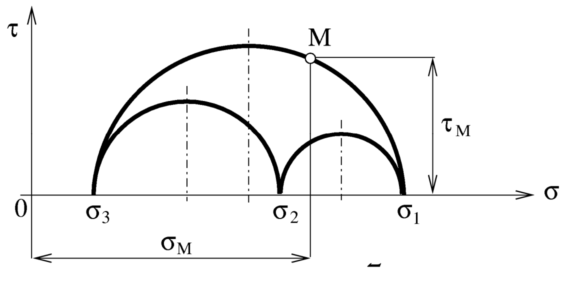
$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_x{}^2 + \tau_y{}^2 + \tau_z{}^2)} \ .$$

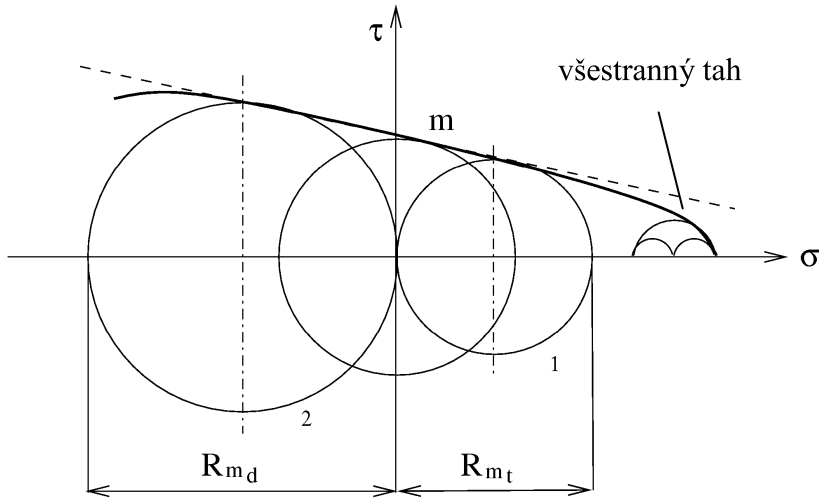
Pro rovinou napjatost pro např. $\sigma_3 = O$

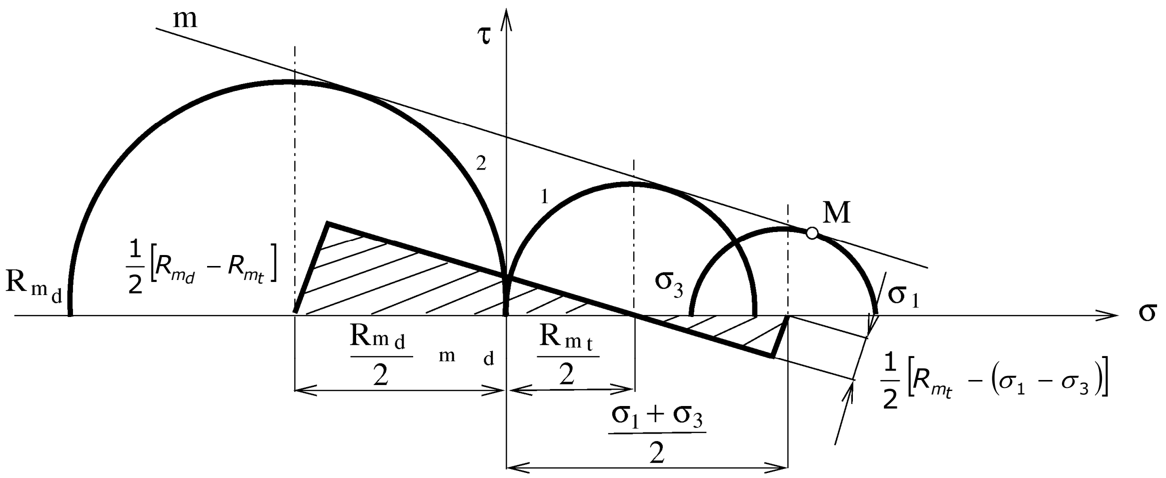
$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \ .$$

Hypotéza je vhodná pro houževnaté materiály podobně jako hypotéza Guestova. Výsledky podle obou hypotéz velmi dobře souhlasí s experimenty, rozdíly mezi hypotézami jsou malé (do 15 %), Guestova hypotéza je konzervativnější (při dimenzování rozměry vycházejí o něco větší než dle HMH).

Hypotéza Mohrova
U křehkých materiálů bylo pozorováno, že o stavu napjatosti rozhoduje jak normálové, tak smykové napětí. K porušení dojde v rovině, která je na Mohrově kružnici zobrazena bodem *M* (viz obr.). Pro různé napjatosti vytvoří tyto body meznou čáru *m*, kterou lze v oblasti mezi tahem a tlakem velmi dobře aproximovat přímkou. Mezný stav porušení nastane, bude-li se největší Mohrova kružnice zkoumané napjatosti dotýkat mezné čáry *m*. Výraz pro mezný stav dostaneme z podobnosti vyšrafovaných trojúhelníků na obrázku :







$$\frac{\dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2}-\dfrac{R_{m_t}}{2}}{\dfrac{1}{2}\left[R_{m_t}-(\sigma_1-\sigma_3)\right]}=\frac{\dfrac{R_{m_d}}{2}+\dfrac{R_{m_t}}{2}}{\dfrac{1}{2}\left(R_{m_d}-R_{m_t}\right)} .$$

Po úpravě

$$\frac{\sigma_1}{R_{m_t}}-\frac{\sigma_3}{R_{m_d}}=1 \text{ , resp. } \sigma_1-\frac{R_{m_t}}{R_{m_d}}=R_{m_t} \text{ -}$$

Pevnostní podmínku pak lze zapsat

$$\sigma_1-\frac{R_{m_t}}{R_{m_d}}\sigma_3\le\sigma_D$$

a po zavedení poměru $\kappa=\dfrac{R_{m_t}}{R_{m_d}}=\dfrac{\sigma_{D_t}}{\sigma_{D_d}}$

$$\sigma_{red}=\sigma_1-\kappa\,\sigma_3\le\sigma_D .$$

Hypotéza se používá pro křehké materiály s rozdílnou pevností v tahu a tlaku. Pro houževnatý materiál je pevnost u tahu a tlaku přibližně stejná, $\kappa = 1$ a Mohrova hypotéza přijde formálně v hypotézu Guestrovu $\left(\tau_{max}\right)$.