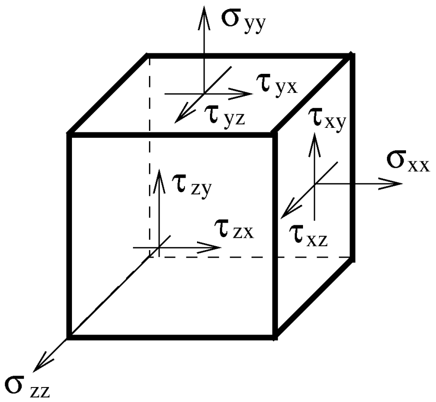
Rovinná a prostorová napjatost

Vydělme v bodě tělesa elementární hranolek o hranách dx, dy, dz. Vnitřní síly ve stěnách hranolku se projeví jako napětí na příslušné ploše a lze je rozložit do směrů souřadnicových os, jak je vidět z obrázku (pro zachování přehlednosti nejsou zakreslena napětí ve skrytých stěnách). Význam indexů u napětí je následující:



1. index značí směr normály k rovině, v níž napětí působí,

2. index pak směr, se kterým je napětí rovnoběžné.

V každé stěně je tedy jedno normálové a dvě smyková napětí (např. v rovině yz je normálové napětí σ_{xx} a smyková napětí τ_{xy} a τ_{xz}).

Napíšeme-li momentové podmínky rovnováhy k jednotlivým souřadnicovým osám, dostaneme po úpravě

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z \ , \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_x \ , \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_y$$

což je zákon sdružených smykových napětí:

Působí-li ve dvou na sebe kolmých rovinách smyková napětí, jsou tato napětí stejně veliká a obě směřují buď k průsečnici nebo od průsečnice rovin.

Potom lze místo dvou indexů pro určení smykových napětí použít pouze jeden, jak je již uvedené výše. Pro normálové napětí pak $\sigma_{xx} = \sigma_x$ atd.

Prostorová napjatost je tedy určená 6 složkami napětí, které lze uspořádat do vektoru napětí

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z\right]^T .$$

Obdobně lze uspořádat složky deformace

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z\right]^T .$$

Vyjádřeme nyní např. poměrně prodlouženou ε_x. S využitím principu superpozice dostaneme

$$\varepsilon_x = \varepsilon'_x + \varepsilon''_x + \varepsilon'''_x \text{ , kde } \varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E} \ , \ \varepsilon''_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E} \ , \quad \varepsilon'''_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$$

a tedy

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

Obdobně pro deformaci ve směru y a z

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right], \qquad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

Pro zkosy pak $\gamma_x = \frac{\tau_x}{G}, \quad \gamma_y = \frac{\tau_y}{G}, \gamma_z = \frac{\tau_z}{G}$

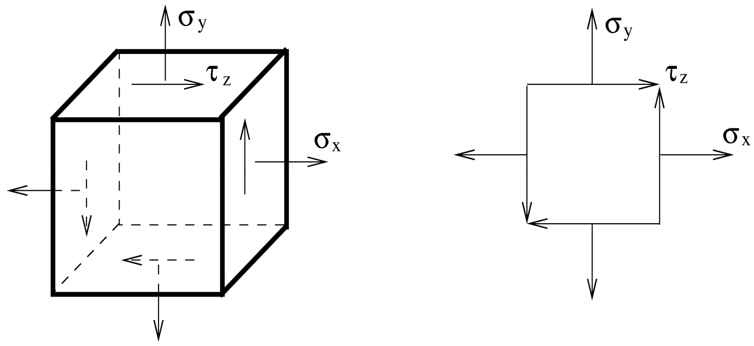
Tyto vztahy mezi deformacemi a napětími tvoří rozšířený Hookeův zákon. Lze jej zapsat v maticovém tvaru (výhodné pro numerické výpočty) jako

$$\mathbf{G} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \text{ , resp. } \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{G}$$

kde $\mathbf{D}$ je matice tuhosti, $\mathbf{D}^{-1}$ matice poddajnosti materiálu.

Pozn. Pro veličiny E, G, ν lze odvodit vztah $\frac{E}{G} = 2\,(1+\nu)$. Zájemci najdou toto odvození v literatuře.

Rovinná napjatost nastává v případě, že nenulové složky napětí jsou rovnoběžné s jednou rovinou (rovina napjatosti), přičemž všechny složky ve směru kolmém na tuto rovinu jsou rovny nule



Hookeův zákon pro rovinnou napjatost má tvar

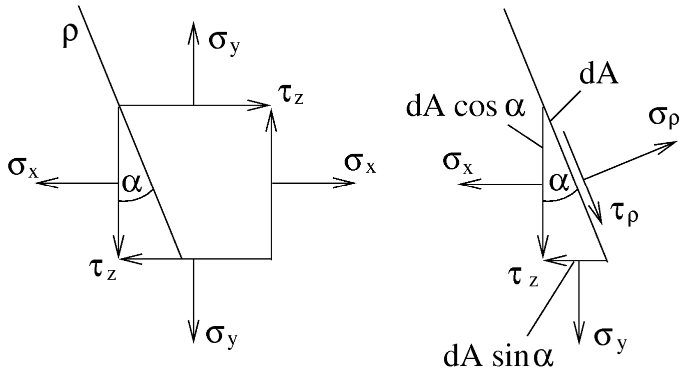
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$$

$$\gamma_z = \frac{1}{G}\,\tau_z$$

Pozn.: Při rovině napjatosti je $\sigma_z = 0$, avšak jak plyne z Hookeova zákona pro prostorovou napjatost, $\varepsilon_z \neq 0$ a má hodnotu $\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$.

Zkoumejme napětí σ_ρ a τ_ρ v rovině ρ, svírající s rovinou yz úhle α (viz. obr). K tomu odřízneme rovinou ρ z elementárního hranolku část a napíšeme pro ni podmínky rovnováhy ve směru rovnováhy a tečny k rovině ρ.



$$n:\ \sigma_\rho dA-\sigma_x dA\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\sigma_y dA\sin\alpha\cdot\sin\alpha-\tau_z dA\cos\alpha\cdot\sin\alpha-\tau_z\ dA\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0$$

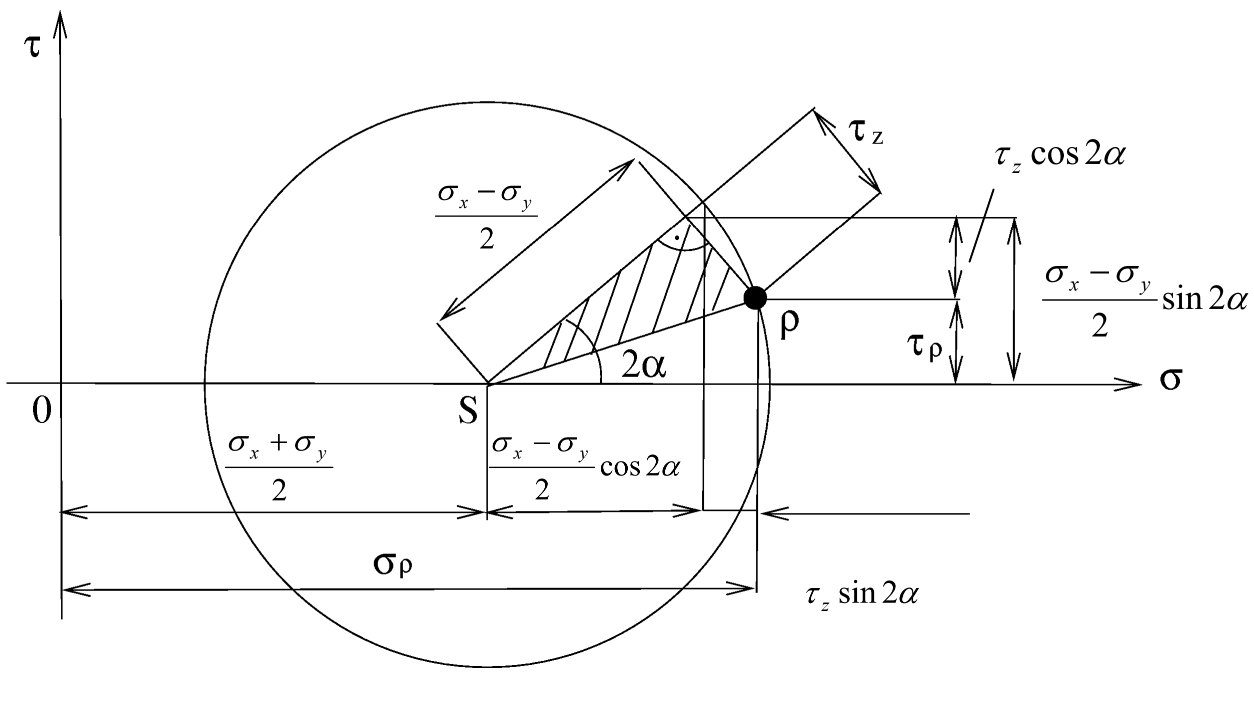
$$t:\ \tau_\rho dA-\sigma_x dA\cos\alpha\cdot\sin\alpha+\sigma_y dA\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\tau_z dA\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\tau_z\ dA\sin\alpha\cdot\sin\alpha=0$$

Po úpravě s využitím funkce dvojnásobného argumentu obdržíme

$$\sigma_\rho=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha+\tau_z\sin 2\alpha$$

$$\tau_\rho=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha-\tau_z\cos 2\alpha$$

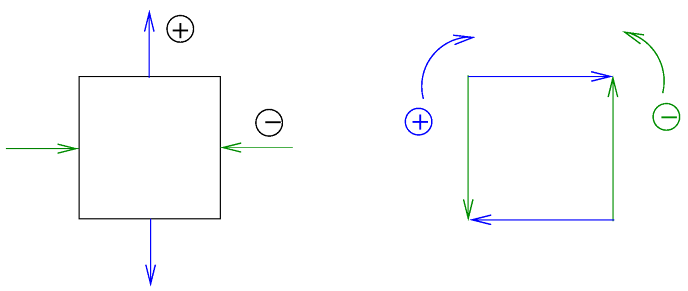
Tyto vztahy lze (podobně jako pro kvadratické momenty) znázornit pomocí **Mohrovy kružnice**.



Měníme-li polohu roviny ρ, mění se pouze úhel α. Z grafického hlediska to znamená, že kolem bodu *S* rotuje vyšrafovaný trojúhelník a bod ρ opisuje kružnici.
Mohrova kružnice je vzájemně jednoznačné zobrazení rovinné napjatosti a to takové, že každé rovině ρ ze svazku kolmého na rovinu napjatosti přiřazuje v souřadnicovém systému σ, τ bod, jehož souřadnice jsou normálové (σ_ρ) a smykové (τ_ρ) napětí v rovině ρ působící.
Středové úhly příslušné obrazům jednotlivých rovin jsou dvojnásobné oproti úhlům mezi reálnými rovinami. Při zachování znaménkové konvence je smysl úhlu ve skutečnosti i na kružnici souhlasný.

Znaménková úmluva

normálová napětí | smyková napětí

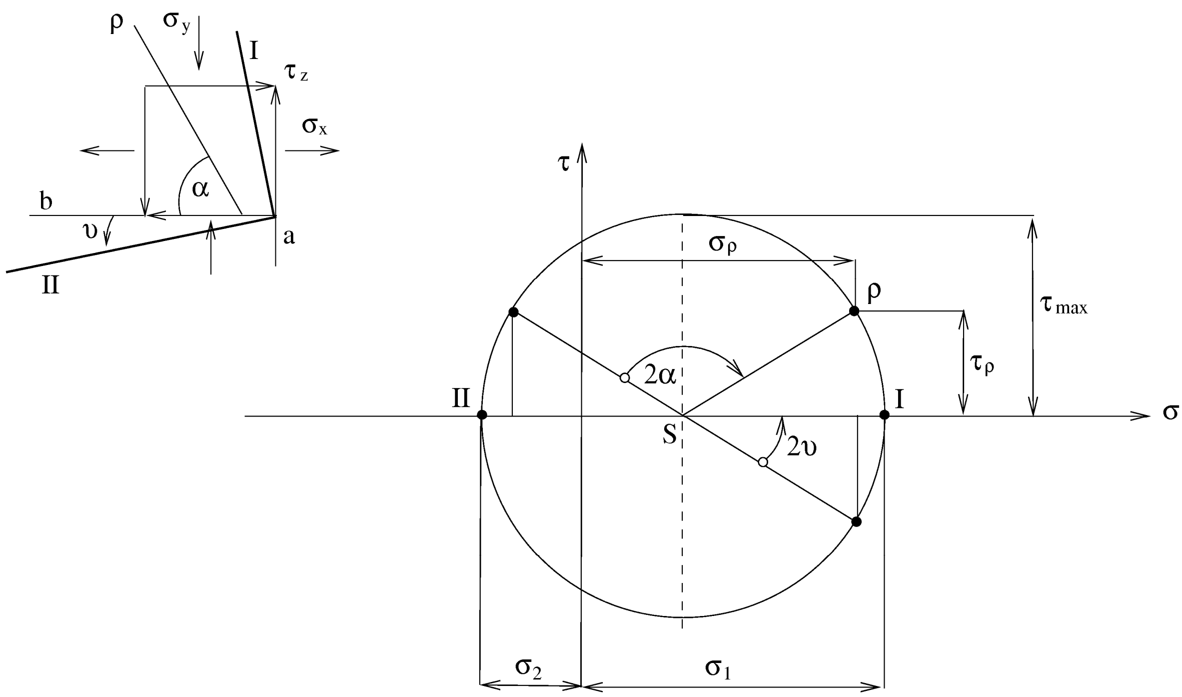


tah	+	po směru hod. ručiček	+
tlak	–	proti směru hod ručiček	–

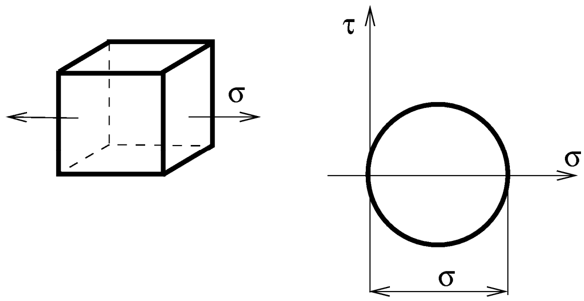
Hlavní roviny jsou roviny, v nichž je smykové napětí rovno nule.

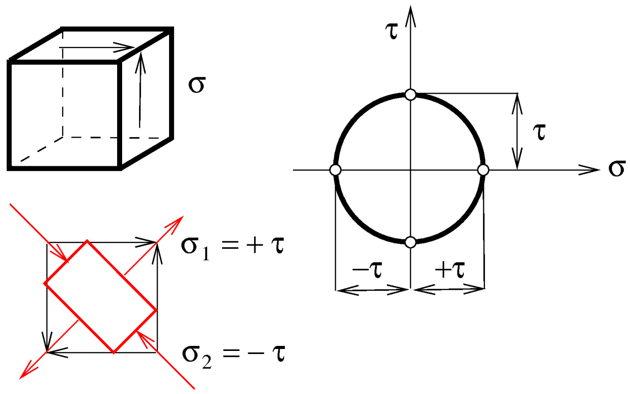
Hlavní napětí jsou normálová napětí v hlavních rovinách.

Řešení rovinné napjatosti



Mohrovy kružnice pro zvláštní typy napjatosti



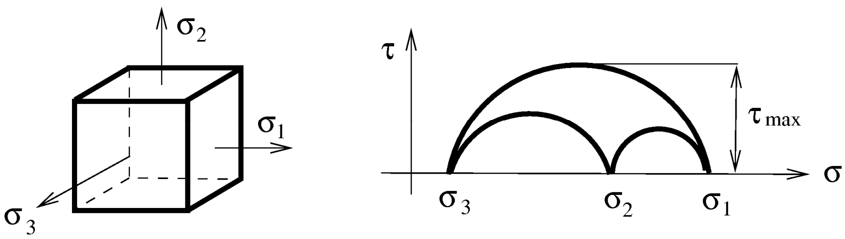


čistý tah čistý smyk

Prostorová napjatost – lze dokázat, že při prostorové napjatosti lze najít právě 3 hlavní roviny(navzájem kolmé) a jim odpovídající 3 hlavní napětí.
Tato hlavní napětí lze určit ze vztahu (lze jej odvodit z rovnováhy odříznutého rohu krychličky)

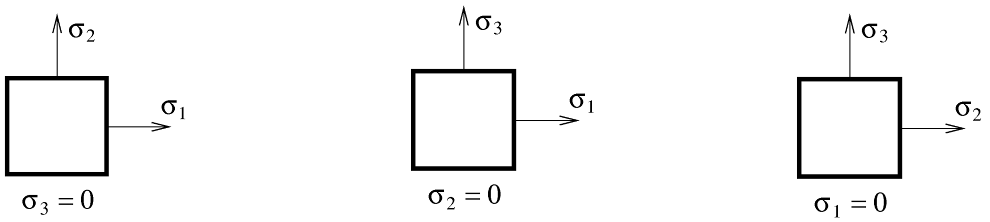
$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y - \sigma & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_x - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$

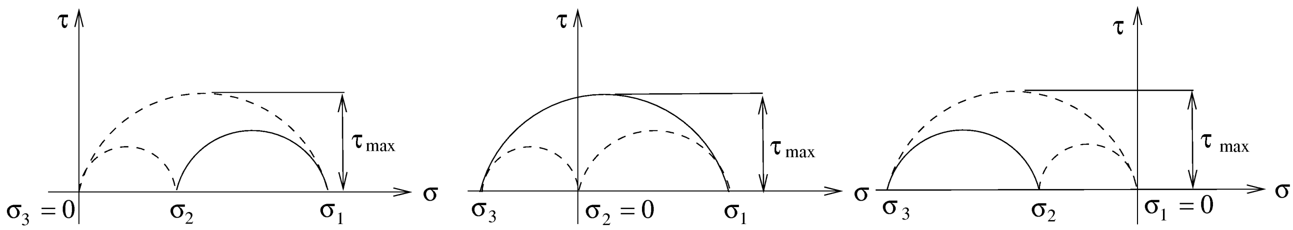
což je kubickárovnice pro σ a její kořeny jsou hlavní napětí $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Napjatost lze zobrazit pomocí 3 Mohrových kružnic (viz obr.)



Indexy přiřazujeme tak, aby platilo $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Rovinná napjatost z hlediska napjatosti prostorové
Rovinná napjatost je vlastně napjatost prostorová, kde jedno hlavní napětí je rovno nule. Mohou nastat tři případy.





Nutnost nahlížet na rovinnou napjatost z hlediska napjatosti prostorové vychází z potřeby správně určit maximální smykové napětí, které odpovídá poloměru největší z Mohrových kružnic.