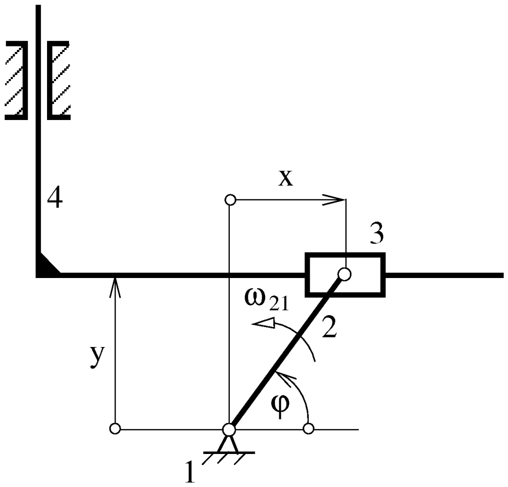
Kinematika a dynamika soustavy těles

Vyšetřování pohybu mechanismů

Analytické vyšetřování pohybu mechanismu lze provést pomocí zdvihové funkce – tj. vztahu mezi souřadnicemi popisujícími polohu hnacího a hnaných členů.

Postup je patrný z níže uvedeného příkladu.



Dáno: x….. poloměr kliky 2

$\omega_{21} = \omega = konst.$...úhlová rychlost kliky

Úloha: určit rychlost a zrychlení $v_{41},\ a_{41},\ v_{34},\ a_{34}$

Pozn.: index ij (např. v_{41}) má následující význam – i označuje zkoumaný člen, j označuje člen, vůči němuž pohyb vztahujeme (v_{34} …rychlost objímky 3 vůči kulise 4 atd.)

1. Zakótujeme polohu hnacího (kliky) a hraných členů $\varphi = \omega_{21} \cdot t$, x, y

2. Nalezneme zdvihovou funkci, tj. vztah mezi souřadnicemi popisujícími polohu členů

$$y = r\ \sin \omega t, \quad x = r\ \cos \omega t$$

3. Pomocí příslušných časových derivací určíme požadované rychlosti a zrychlení

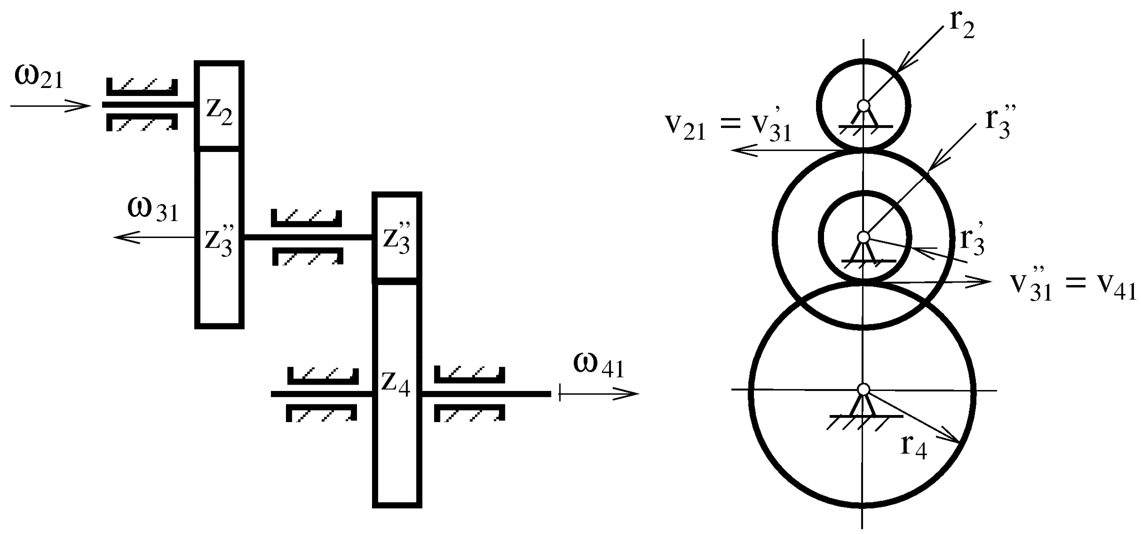
$$v_{41} = \dot{y} = r\ \omega \cos \omega t, \quad a_{41} = \dot{v}_{41} = -r\,\omega^2 \sin \omega t$$

$$v_{34} = \dot{x} = -r\ \omega \sin \omega t, \quad a_{34} = \dot{v}_{34} = -r\,\omega^2 \cos \omega t$$

Soustavy s ozubenými koly – předlohové mechanismy
Vazba mezi ozubenými koly se uskutečňuje pomocí tzv. vyšší kinematické dvojice, která odnímá 1 stupeň volnosti.

Řešení soustavy s ozubenými koly je demonstrováno na následujícím příkladu:

Soustava sestává z rámu a tří hřídelů s ozubenými koly (viz obr.), členy soustavy jsou vázány mezi sebou 3 rotačními a 2 vyššími kinematickými dvojicemi. Počet stupňů volnosti soustavy je 1.



Symbolem r je značen poloměr kola, symbolem z počet zubů. Z teorie ozubení platí $\frac{r_i}{r_j} = \frac{z_i}{z_j}$. Pro místo kontaktu ozubených kol platí, že obvodová rychlost je pro obě kola stejná. Tedy

$$v_{21} = v'_{31}, \text{ tj. } \omega_{21} \cdot r_2 = \omega_{31} \cdot r'_3$$

$$v''_{31} = v_{41}, \text{ tj. } \omega_{31} \cdot r''_3 = \omega_{41} \cdot r_4$$

Pak můžeme vyjádřit

$$\omega_{31} = \omega_{21} \frac{r_2}{r_3}, \quad \omega_{41} = \omega_{31} \frac{r''_3}{r_4}$$

$$\omega_{41} = \omega_{21} \frac{r_2}{r'_3} = \omega_{21} = \omega_{21} \frac{z_2 \cdot z''_3}{z'_3 \cdot z_4}$$

Převodovým poměrem p_{ij} rozumíme poměr úhlových rychlostí i-tého.a j-tého členu. V našem případě např.

$$p_{42} = \frac{\omega_{41}}{\omega_{21}} = \frac{r_2}{r'_3} \frac{r''_3}{r_4} = \frac{z_2}{z'_3} \frac{z''_3}{z_4}$$

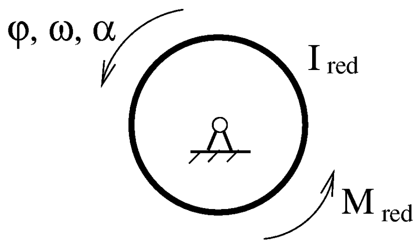
Dynamika soustav

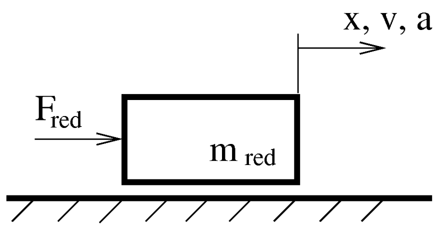
V dynamice soustav těles řešíme dva základní typy úloh:

1) **úlohy kinetostatiky** – předpokládáme pohyb, úlohou je určit akční silové účinky pro udržení předpokládaného pohybu

2) **úlohy vlastní dynamiky** – jsou dány všechny akční silové účinky, úlohou je vyšetřit pohyb soustavy.

V tomto kurzu se budeme zabývat pouze **metodou redukce hmotových a silových účinků.** Princip metody spočívá v náhradě soustavy těles jedním myšleným tzv. **redukčním členem**, na kterých je redukována celková hmotnost soustavy vyjádřená buď redukovaným momentem setrvačnosti I_{red} (pro rotační pohyb) nebo redukovanou hmotnost m_{red} (pro posuvný pohyb) a dále všechny akční silové účinky vyjádřené redukovanou dvojicí (momentem) M_{red}, resp. redukovanou silou F_{red}. Za redukční člen zpravidla volíme člen soustavy konající rotační nebo posuvný pohyb.





Redukovaný moment setrvačnosti resp. redukovaná hmotnost se určí z bilance kinetické energie, tj. kinetická energie celé soustavy musí být stejná jako kinetická energie redukčního členu, redukovaná dvojice (moment) resp. redukovaná síla se určí z bilance výkonu, tj. výkon redukované dvojice resp. síly na redukčním členu musí být stejný jako výkon všech silových účinků působících na soustavu:

$$\frac{1}{2} I_{red}\, \omega^2 = \sum E_i \Rightarrow I_{red}$$

resp. $$\frac{1}{2} m_{red}\, v^2 = \sum E_i \Rightarrow m_{red}$$

$$M_{red} \cdot \omega = \sum P \Rightarrow M_{red}$$

resp. $$F_{red} \cdot v = \sum P \Rightarrow F_{red}$$

Pohybová rovnice vychází ze zákona o změně kinetické energie

$$E - E_0 = A$$

derivací dle času tak

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dA}{dt}; \quad \frac{dE}{dt} = P$$

po dosazení

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} I_{red \cdot \omega^2}\right] = M_{red} \cdot \omega$$

a po úpravě s uvažováním faktu že obecně $I_{red} = I_{red}(\varphi)$ dostaneme

$$M_{red} = I_{red} \cdot \alpha + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{dI_{red}}{d\varphi} \qquad \text{(A)}$$

a analogicky pro posuvný pohyb

$$F_{red} = m_{red} \cdot a + \frac{1}{2}v^2 \frac{dm_{red}}{dx} \qquad \text{(B)}$$

Vztahy (A) resp. (B) jsou pohybové rovnice redukčního členu. Je-li I_{red} resp. m_{red} konstantní, což platí pro soustavy s konstantními převodovými poměry, přejdou vztahy (A), (B) do jednoduššího tvaru

$$M_{red} = I_{red} \cdot \alpha \quad \text{resp.} \quad F_{red} = m_{red} \cdot a$$

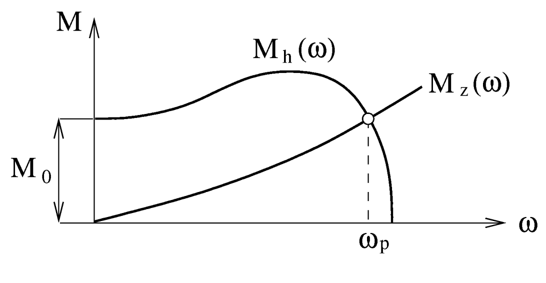
Rozběh a doběh soustrojí

Soustrojí je soustava složená ze zdroje mechanického výkonu – motoru, z převodového ústrojí a ze spotřebiče mechanického výkonu – pracovního stroje.
Soustavu s jedním stupněm volnosti redukujeme na zvolený základní člen, **zpravidla na hřídel motoru**, který koná rotační pohyb popsaný veličinami φ, ω, α. Pro soustavu s konstantním převodovým poměrem má pohybová rovnice tvar

$$M_{red} = I_{red} \cdot \alpha$$

Redukovaná dvojice – rozdíl: $M_{red} = M_h(\omega) - M_z(\omega)$

M_h - hnací moment, M_z - zátěžný moment redukovaný na hřídel motoru



$$\alpha \; I_{red} = M_{red}(\omega) = M_h(\omega) - M_z(\omega)$$

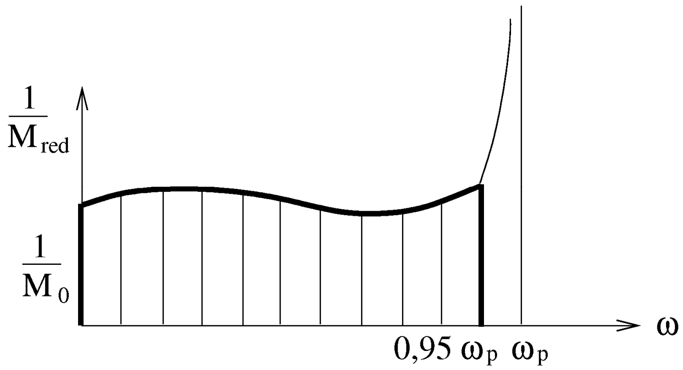
Doba rozběhu:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M_h(\omega) - M_z(\omega)}{I_{red}}$$

$$\int_0^{tr} dt = I_{red} \int_0^{\omega_1} \frac{d\,\omega}{M_h(\omega) - M_z(\omega)}$$

$$t_r = I_{red} \int_0^{\omega_1} \frac{d\,\omega}{M_h(\omega) - M_z(\omega)}$$

Pro $\omega = \omega_P$ výpočet nelze provést – integrál má pól (nabývá nekonečné hodnoty $M_h(\omega) = M_z(\omega)$, rozdíl $M_h(\omega) - M_z(\omega) = 0$). Zavádíme smluvní hodnotu $\omega_1 = 0{,}95\,\omega_P$ - rozběh se považuje za ukončený po dosažení 95% ω_P .



$$t_r = I_{red} \int_0^{0{,}95\omega_P} \frac{d\,\omega}{M_h(\omega) - M_z(\omega)} = I_{red} \int_0^{0{,}95\omega_P} \frac{d\,\omega}{M_{red}(\omega)}$$

Integraci lze provést numericky.