Kinematika a dynamika bodu

Kinematika bodu

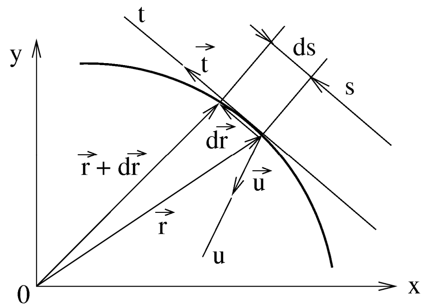
Bod se pohybuje v prostoru po křivce, která se nazývá trajektorie nebo dráha bodu. Trajektorie je určena průvodičem (polohovým vektorem), který je funkcí času

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

V závislosti na typu trajektorie rozlišujeme:

- Prostorový křivočarý pohyb – trajektorie je prostorová křivka
- Rovinný křivočarý pohyb – trajektorie je rovinná křivka
- Přímočarý pohyb – trajektorie je přímka

Křivočarý pohyb bodu v rovině



t .... tečna
$\vec{t}$ .... jednotkový vektor tečny
n .... normála
$\vec{n}$ .... jednotkový vektor normály
s .... parametr

radiusvektor $\vec{r} = \vec{r}(t)$ lze rovněž vyjádřit pomocí parametru s – délka dráhy, $\vec{r} = \vec{r}(s),\ s = s(t)$. Vektor rychlosti je definován

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{t} \cdot v \ .$$

Vektor zrychlení je definován

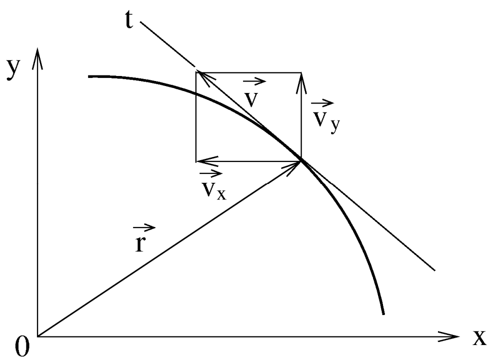
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v \cdot \vec{t}\right) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{t} + v \cdot \frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{t} + v \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = a_t \cdot \vec{t} + v^2 \cdot k\,\vec{n}$$

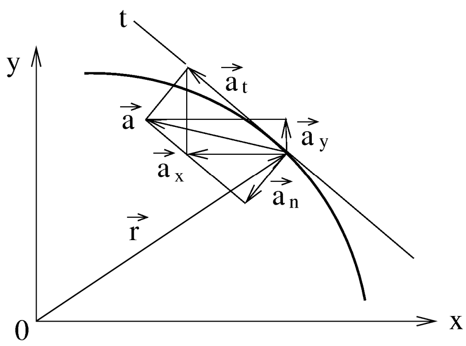
Poznámka: $\frac{d\vec{t}}{ds} = k \cdot \vec{n}$, kde $k = \frac{1}{\rho}$ je křivost, ρ poloměr křivost

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \ .$$

Rychlost a zrychlení v kartézském souřadnicovém systému

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$





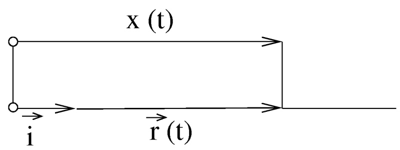
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}; \quad \vec{v} = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}; \quad \vec{a} = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Poznámka: **.** resp. **..** nad symbolem značí 1. resp. 2 derivaci podle času $\left(\dot{f}(x) = \frac{d\, f(x)}{dt} \right)$.

Při řešení kinematiky bodu pracujeme se základními veličinami čas *t*, dráha *s* resp. radiusvektor $\vec{r}$, rychlost *v*, zrychlení *a*. Úkolem je nalézt vzájemné funkční závislosti $s = s(t)$, $v = v(t), v = v(s), a = a(t), a = a(s), a = a(t)$ s uvažováním počátečních podmínek (např. $t = 0,\ s = s_0,\ v = v_0$).

Přímočarý pohyb bodu



$\vec{r}(t) = \vec{i} \cdot x(t)$

$x(t)$ .. definuje pohyb

rychlost

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \cdot \frac{dx}{dt} = \vec{i} \cdot v; \quad v = \frac{dx}{dt}$$

zrychlení

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{i} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = \vec{i} \cdot a$$

Zrychlení lze též vyjádřit jak funkci polohy

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{v\,dv}{dx} = \frac{d\left(v^2\right)}{2dx}$$

a) rovnoměrný přímočarý pohyb $a = 0$, počáteční podmínky $t = 0,\ x = x_0,\ v = v_0$

$$a = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = konst. = v_0$$

$$a = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} v\,dt; \quad x = x_0 + v_0\,t$$

b) rovnoměrně zrychlený pohyb $a = a_0 = konst.$, počáteční podmínky $t = 0,\ x = x_0,\ v = v_0$

$$a = a_0 = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} a_0\,dt; \quad v = v_0 + a_0\,t$$

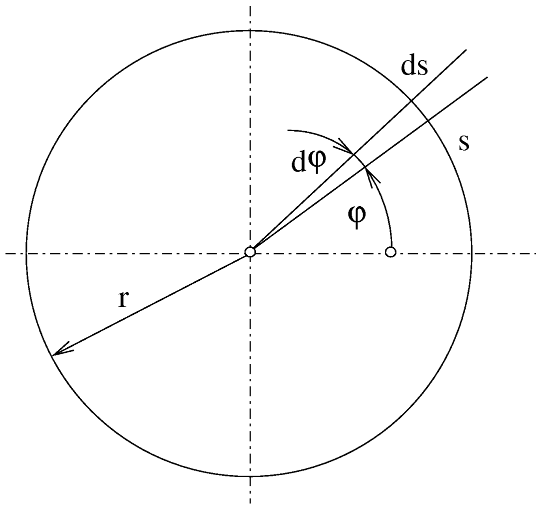
$$a = a_0 = \frac{d\left(v^2\right)}{2dx} \Rightarrow \int_{v_0^2}^{v^2} d\left(v^2\right) = \int_{x_0}^{x} 2a_0\,dx; \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2a_0\,(x - x_0)}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} v\,dt = \int_{0}^{t} (v_0 + a_0\,t)\,dt; \quad x = x_0 + v_0\,t + a_0\,\frac{t^2}{2}$$

c) nerovnoměrný pohyb $a \neq konst$, např. $a = a_0 - kv,\ \ a = a_0 - kv^2$ apod.

Rovinný křivočarý pohyb bodu – pohyb po kružnici

$$s = r \cdot \varphi, \quad ds = r\ \varphi$$



rychlost

$$v = \frac{ds}{dt} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \omega$$

ω ... úhlová rychlost

Zrychlení tečné

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt} = r \cdot \alpha$$

α ... úhlové zrychlení

Zrychlení normálové

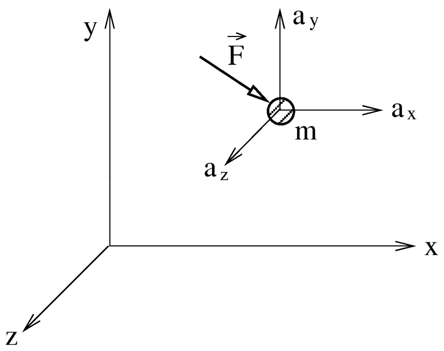
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\,\omega^2}{r} = r \cdot \omega^2\ .$$

Dynamika bodu

Dynamika řeší pohyb včetně jeho příčin. Rozlišujeme dva typy úloh.

1. Je dán pohyb, nutno vyšetřit silové účinky k jeho udržení – úloha kinetostatiky
2. jsou dány působící síly, nutno vyšetřit pohyb – úloha vlastní dynamiky

Pohybovou rovnicí rozumíme vztah mezi zrychlením hmotného bodu a silami na něj působícími



$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} F_i$ výslednice všech působících sil

(akčních i reakčních)

$m\vec{a} = \vec{F}$ .... vektorová rovnice

$$\left.\begin{aligned} ma_x &= F_x \\ ma_y &= F_y \\ ma_z &= F_z \end{aligned}\right\} \text{.... skalární rovnice}$$

Pro prostorový pohyb se vektorová rovnice rozepíše do 3 skalárních rovnic (směry *x, y, z*), pro rovinný do dvou (směry *x, y*).
Dále za zrychlení dosadíme příslušné derivace rychlosti nebo dráhy a řešíme diferenciální rovnici.

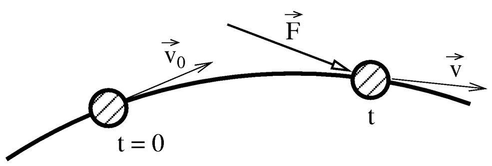
Postup řešení

1. Volba souřadnicového systému a popis obecné polohy, bodu nezávislými souřadnicemi
2. vyjádření všech sil působících na bod v obecné poloze
3. Zakreslení příslušných složek zrychlení
4. Formulace skalárních pohybových rovnic do příslušných směrů
5. Formulace počátečních podmínek

Integrální zákony

Zákon o změně hybnosti

Hybnost hmotného bodu je definována jako součin hmotnosti a rychlosti



$$\vec{H} = m\vec{v}$$

$\vec{F}$ .... výslednice působících sil

$m\vec{a} = \vec{F}$ .... pohybová rovnice

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}; \qquad d(m\vec{v}) = \vec{F}\,dt; \qquad \int_{m\vec{v}_0}^{m\vec{v}} d(m\vec{v}) = \int_0^t \vec{F}\,dt$$

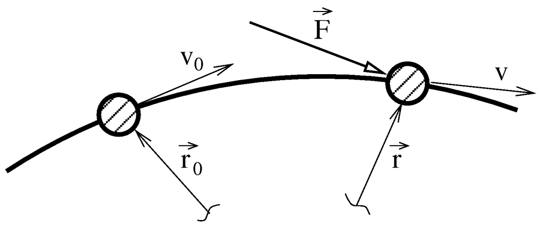
$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_0^t \vec{F}\,dt; \quad \vec{H} - \vec{H}_0 = \vec{I}; \qquad \vec{I} = \int_0^t \vec{F}\,dt \text{ ... impuls síly}$$

Změna hybnosti je rovna impulsu vnějších sil.
Použití tohoto zákona vyžaduje znalost vnějších sil jakožto funkcí času.

Zákon o změně kinetické energie

Kinetická energie pohybujícího se hmotného bodu je definována jako $E = \frac{1}{2} m v^2$.

Pohybová rovnice bodu



$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \bigg| \cdot d\vec{r}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F}\, d\vec{r}\,; \quad m\vec{v}\, d\vec{v} = \vec{F}\, d\vec{r}$$

$$\frac{1}{2} m \int_{v_0}^{v} d\left(v^2\right) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\, d\vec{r}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\, d\vec{r}\,; \quad E - E_0 = A$$

$A = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\, d\vec{r}$ ... práce vnějších sil

Změna kinetické energie je rovna práci vnějších sil.
Použití tohoto zákona vyžaduje znalost vnějších sil jakožto funkcí polohy (dráhy).

Poznámka: Třetí zákon – zákon o změně momentů hybnosti – najdou zájemci v příslušné literatuře zabývající se dynamikou.