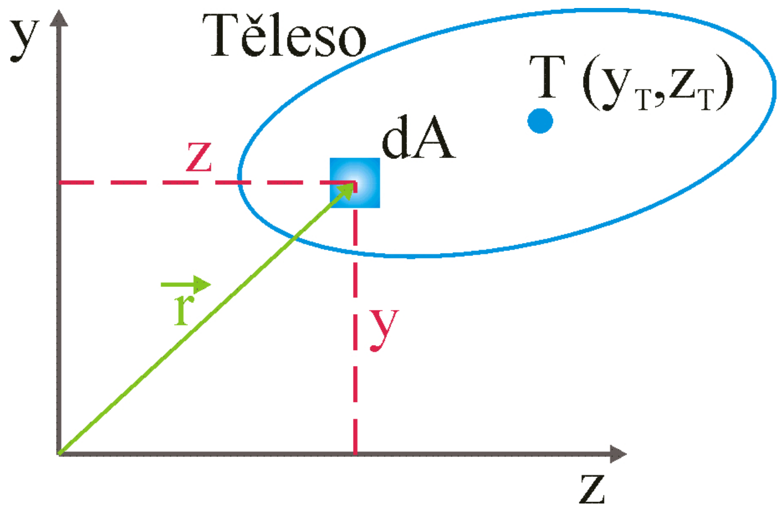
Veličiny charakterizující geometrii ploch

Jedná se o veličiny charakterizující geometrii průřezu tělesa.



Obrázek 1: Těleso v rovině.

Těžiště plochy

Souřadnice těžiště plochy, na které je hmota rovnoměrně rozložená ($\rho = konst.$), lze vypočíst podle následujících vztahů:

$$y_T = \frac{S_z}{A} = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA}, \tag{1}$$

$$z_T = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A z\,dA}{\int_A dA}, \tag{2}$$

kde

y **a** z jsou prostorové souřadnice $[m]$,

y_T **a** z_T jsou souřadnice těžiště plochy $[m]$,

S_y **a** S_z jsou statické momenty 1.stupně (lineární) $[m^3]$ a

A je obsah plochy $[m^2]$.

Kvadratický, deviační a polární moment průřezu

Hojně využívanou charakteristikou geometrie plochy je kvadratický (2. stupně) moment průřezu. Tato charakteristika je využívaná zejména při výpočtech průhybu nosníků. Kvadratické momenty vzhledem k daným osám a deviační moment lze vypočíst následujícím způsobem:

$$J_y = \int_A z^2 \, dA, \tag{3}$$

$$J_z = \int_A y^2 \, dA, \tag{4}$$

$$D_{yz} = \int_A yz \, dA, \tag{5}$$

kde

y **a** z jsou prostorové souřadnice$[m]$,

J_y,J_z **a** D_{yz} jsou kvadratické momenty průřezu a deviační moment průřezu $[m^4]$ a

A je obsah plochy $[m^2]$.

Další charakteristikou, kterou lze s výhodou užít zejména v případě kruhového průřezu, je polární kvadratický moment průřezu

$$J_p = \int_A (y^2 + z^2) \, dA = J_y + J_z, \tag{6}$$

kde

y **a** z jsou prostorové souřadnice $[m]$,

J_y,J_z jsou kvadratické momenty průřezu $[m^4]$,

J_p je polární kvadratický moment průřezu$[m^4]$ a

A je obsah plochy $[m^2]$.

Steinerova věta

Stejně jako v případě momentů setrvačnosti lze odvodit vztahy pro výpočet kvadratických momentů k posunutým osám oproti osám procházejícím těžištěm.

$$J_y = J_{y_T} + a^2 A, \tag{7}$$
$$J_z = J_{z_T} + b^2 A, \tag{8}$$
$$D_{yz} = D_{y_T z_T} + abA, \tag{9}$$

kde

y **a** z jsou prostorové souřadnice $[m]$,

y_T **a** z_T jsou souřadnice těžiště plochy $[m]$,

a **a** b vzdálenosti mezi jednolitými osami $[m]$,

J_y**,**J_z **a** D_{yz} jsou kvadratické momenty a deviační moment průřezu vzhledem k posunutým osám $[m^4]$,

J_{y_T}**,**J_{z_T} **a** $D_{y_T z_T}$ jsou kvadratické momenty a deviační moment průřezu vzhledem k osám procházejícím těžištěm plochy $[m^4]$ a

A je obsah plochy $[m^2]$.

Momenty vzhledem k pootočeným osám (Culmanova kružnice)

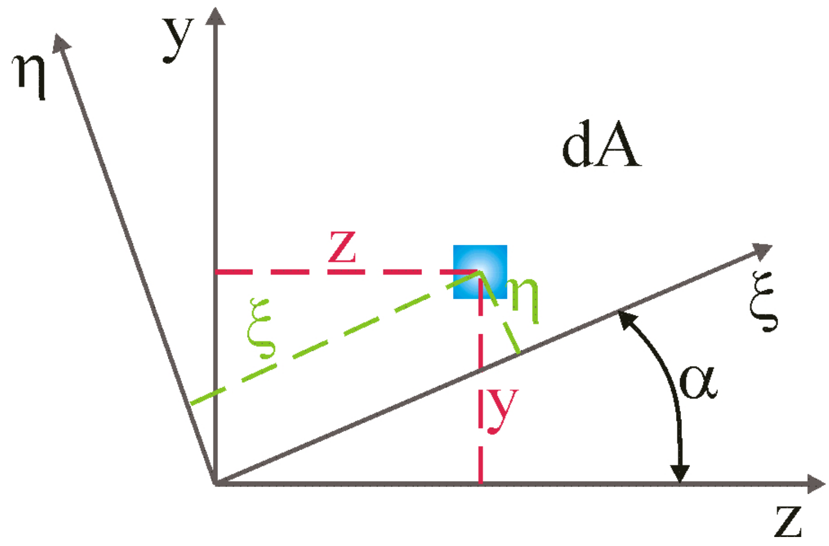
Zopakujme nyní dva velmi důležité pojmy, které byly vysvětleny v kapitole věnované charakteristikám rozložení hmoty v tělese.

Hlavní osy jsou takové osy které jsou natočeny v bodě takovým způsobem, že je deviační moment roven nule.

Hlavní centrální osa je taková osa, která navíc prochází těžištěm.

Platí vztahy pro počítání s goniometrickými funkcemi:

$$sin^2\alpha = \frac{1 - cos2\alpha}{2}, \tag{10}$$
$$cos^2\alpha = \frac{1 + cos2\alpha}{2}, \tag{11}$$
$$sin\alpha cos\alpha = \frac{1}{2} sin2\alpha. \tag{12}$$



Obrázek 2: Pootočení systému souřadnic.

Transformační vztahy mezi systémy souřadnic mají tvar:

$$
\begin{aligned}
\xi &= z cos\alpha + y sin\alpha \qquad (13)\\
\eta &= -z sin\alpha + y cos\alpha \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Proveďme nyní odvození vztahu pro kvadratický moment průřezu vzhledem k ose ξ. Kvadratický moment průřezu vzhledem k ose η a deviační moment lze odvodit analogickým způsobem.

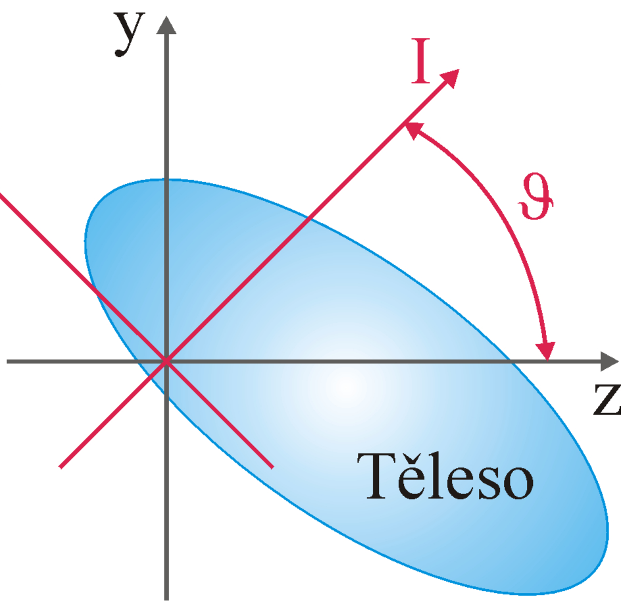
$$
\begin{aligned}
J_\xi &= \int_A \eta^2 \, dA = \int_A (-z sin\alpha + y cos\alpha)^2 \, dA = \\
&= \int_A (z^2 sin^2\alpha - 2yz sin\alpha cos\alpha + y^2 cos^2\alpha) \, dA = \\
&= sin^2\alpha \int_A z^2 \, dA - 2 sin\alpha cos\alpha \int_A yz \, dA + cos^2\alpha \int_A y^2 \, dA = \\
&= sin^2 J_y - 2 sin\alpha cos\alpha D_{yz} + cos^2\alpha J_z = \\
&= \frac{1 - cos2\alpha}{2} J_y - sin2\alpha D_{yz} + \frac{1 + cos2\alpha}{2} J_z = \\
&= \frac{J_y + J_z}{2} - \frac{J_y - J_z}{2} cos2\alpha - D_{yz} sin2\alpha \qquad (15)\\
J_\eta &= \frac{J_y + J_z}{2} + \frac{J_y - J_z}{2} cos2\alpha + D_{yz} sin2\alpha \qquad (16)
\end{aligned}
$$

$$D_{\xi\eta} \quad = \quad \frac{J_y + J_z}{2} sin2\alpha + D_{yz} cos2\alpha \qquad (17)$$

Postup konstrukce Culmanovy kružnice

Culmanova kružnice umožňuje graficky určit hodnoty momentů setrvačnosti a deviačního momentu pro souřadnicové osy natočené o určitá úhel vzhledem kosám pro něž jsou momenty již známé. Rovněž je možné určit směr hlavních os.

Na Obr.3 je zakrasleno těleso a souřadnicové osy x a y, zároveň jsou zde ukázány hlavní osy, tedy osy, pro které vyjde deviační moment nulový.



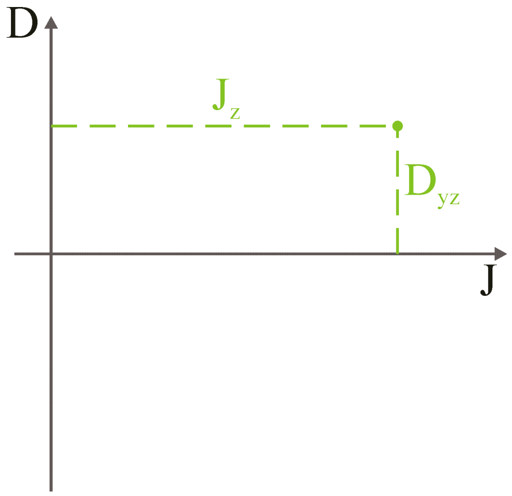
Obrázek 3: Těleso, systém souřadnic $O(x, y)$ a systém hlavních os $O(I, II)$.

Nechť jsou známy (vypočteny) kvadratické momenty J_y a J_z vzhledem k osám y a z a deviační moment D_{yz}. Ukažme si nyní jakým způsobem sestrojit Culmanovu kružnici.

1. Na vodorovnou osu vynášíme kvadratické momenty a na svislou osu deviační momenty.

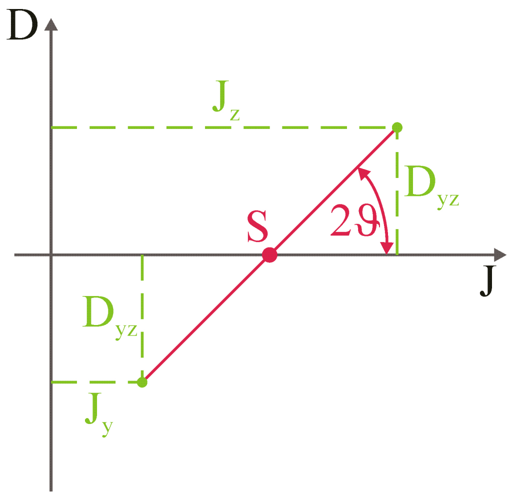
2. Vynesme tedy hodnotu J_z a do kladné části svislé osy hodnotu $|D_{yz}|$. Tím získáme bod kružnice, který je obrazem roviny dané směry os z a x (osa kolmá k osám y a z).

3. Vynesením J_y a D_{yz} tak jak je uvedeno v Obr.5 dostaneme druhý bod kružnice. Spojením těchto dvou bodů dostaneme střed kružnice. Hlavní



Obrázek 4: Vynesení J_z a D_{yz}.

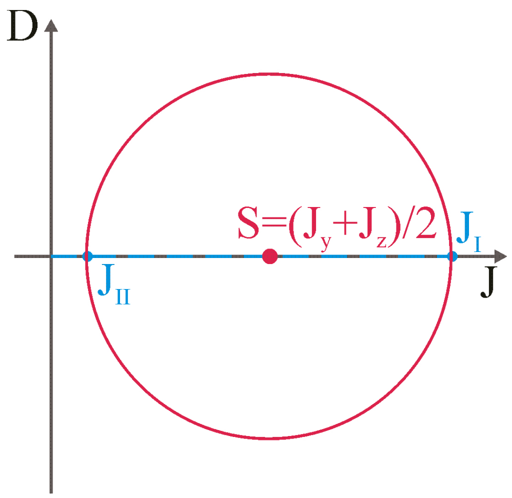
osy a osy x a y svírají úhel ϑ, do Culmanovy kružnice se vynáší úhel dvojnásobný 2ϑ.



Obrázek 5: Vynesení J_y a D_{yz}. Nalezení středu kružnice a zobrazení úhlu který svírají hlavní osy a osy y a z.

4. Nyní lze zkonstruovat celou kružnici.

Je-li Culmanova kružnice zkonstruovaná, lze zjistit hodnoty kvadratických momentů a deviačního momentu pro libovolně natočený svazek rovin.



Obrázek 6: Culmanova kružnice.