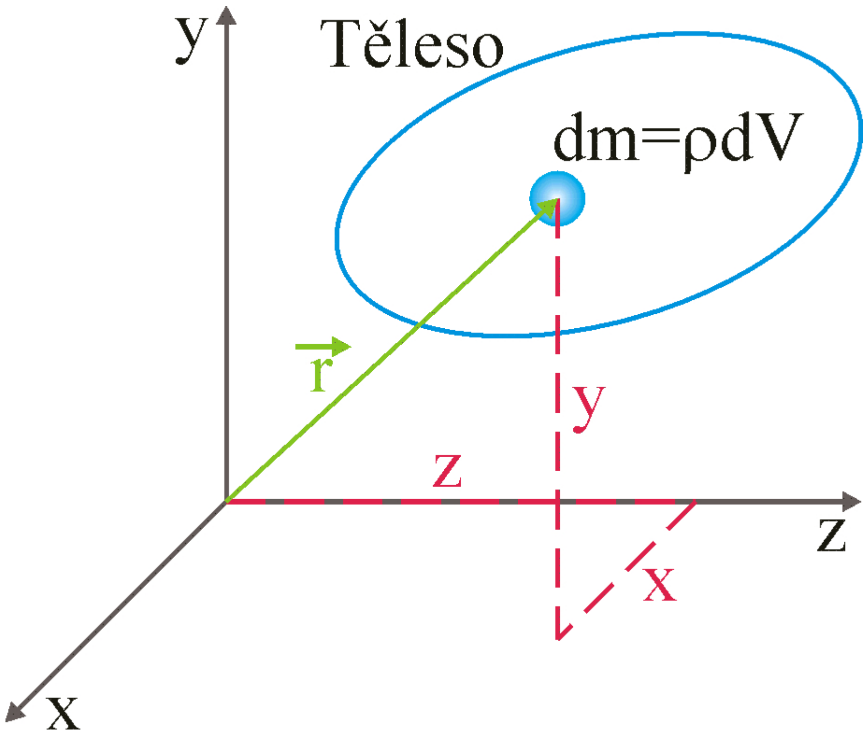
# Veličiny charakterizující rozložení hmoty v prostoru

U těles, nebo složitějších útvarů je charakteristickou veličinou kromě velikosti a hmotnosti také rozložení hmoty v prostoru. Toto rozložení hmoty charakterizují veličiny jako hmotný střed tělesa (těžiště), statické momenty a momenty setrvačnosti a deviační momenty.




Obrázek 1: Těleso v prostoru.

## Hmotnost

Hmotnost tělesa je definovaná jako

$$m = \int_V \rho \, dV, \tag{1}$$

kde

$m$ je hmotnost tělesa $[kg]$,

$V$ je objem tělesa $[m^3]$ a

$\rho$ je hustota tělesa $[\frac{kg}{m^3}]$.

## Statické momenty

Statické momenty vzhledem k daným osám jsou definovány jako

$$\begin{aligned} S_x &= \int_m x\, dm, \\ S_y &= \int_m y\, dm, \\ S_z &= \int_m z\, dm, \end{aligned} \tag{2}$$

kde

$S_x$,$S_y$ **a** $S_z$ jsou statické momenty vzhledem k osám $x$,$y$ a $z$ $[kg\, m]$,

$x$,$y$ **a** $z$ jsou prostorové souřadnice $[m]$ a

$m$ je hmotnost tělesa $[kg]$.

Rovnice (2) lze zapsat také ve vektorovém tvaru:

$$\vec{S_o} = \int_m \vec{r}\, dm, \tag{3}$$

kde

$S_o$ je vektor statických momentů $[kg\, m]$,

$\vec{r} = (x, y, z)^T$ je vektor prostorových souřadnic $[m]$ a

$m$ je hmotnost tělesa $[kg]$.

Lze odvodit, že statický moment vzhledem k těžišti tělesa je nulový.

## Hmotný střed tělesa (těžiště)

Souřadnice hmotného středu tělesa lze vypočíst z následujících vztahů:

$$
\begin{aligned}
x_T &= \frac{S_x}{m} = \frac{\int\limits_m x\,dm}{\int\limits_m dm} = \frac{\int\limits_V \rho x\,dV}{\int\limits_V \rho\,dV}, \\
y_T &= \frac{S_y}{m} = \frac{\int\limits_m y\,dm}{\int\limits_m dm} = \frac{\int\limits_V \rho y\,dV}{\int\limits_V \rho\,dV}, \qquad (4) \\
z_T &= \frac{S_z}{m} = \frac{\int\limits_m z\,dm}{\int\limits_m dm} = \frac{\int\limits_V \rho z\,dV}{\int\limits_V \rho\,dV},
\end{aligned}
$$

kde

$x_T$,$y_T$ **a** $z_T$ jsou souřadnice hmotného středu tělesa $[m]$,

$S_x$,$S_y$ **a** $S_z$ jsou statické momenty vzhledem k osám $x$,$y$ a $z$ $[kg\,m]$,

$x$,$y$ **a** $z$ jsou prostorové souřadnice $[m]$,

$V$ je objem tělesa $[m^3]$,

$m$ je hmotnost tělesa $[kg]$ a

$\rho$ je hustota tělesa $[\frac{kg}{m^3}]$.

Rovnice (4) lze zapsat také ve vektorovém tvaru:

$$
\vec{r_T} = \frac{\vec{S_o}}{m} = \frac{\int\limits_m \vec{r}\,dm}{\int\limits_m dm} = \frac{\int\limits_V \rho\vec{r}\,dV}{\int\limits_V \rho\,dV}, \qquad (5)
$$

$\vec{r} = (x_T, y_T, z_T)^T$ je vektor souřadnic hmotného středu tělesa $[m]$,

$\vec{S_o}$ je vektor statických momentů $[kg\,m]$,

$V$ je objem tělesa $[m^3]$,

$m$ je hmotnost tělesa $[kg]$ a

$\rho$ je hustota tělesa $[\frac{kg}{m^3}]$.

## Momenty setrvačnosti, deviační momenty a matice setrvačnosti

Momenty setrvačnosti vzhledem k daným osám lze vypočíst z následujících vztahů:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_m (y^2 + z^2)\, dm, \\ I_y &= \int_m (x^2 + z^2)\, dm, \\ I_z &= \int_m (x^2 + y^2)\, dm, \end{aligned} \qquad (6)$$

kde

$x$,$y$ **a** $z$ jsou prostorové souřadnice $[m]$,

$I_x$,$I_y$ **a** $I_z$ jsou momenty setrvačnosti vzhledem k osám $x$, $y$ a $z$ $[kg\, m^2]$ a

$m$ je hmotnost $[kg]$.

Dalšími veličinami, které charakterizují rozložení hmoty v prostoru jsou deviační momenty

$$\begin{aligned} D_{xy} &= \int_m xy\, dm, \\ D_{yz} &= \int_m yz\, dm, \\ D_{xy} &= \int_m xz\, dm, \end{aligned} \qquad (7)$$

kde

$x$,$y$ **a** $z$ jsou prostorové souřadnice $[m]$,

$D_{xy}$,$D_{yz}$ **a** $D_{yz}$ jsou deviační momenty v rovinách $xy$, $yz$ a $xz$ $[kg\, m^2]$ a

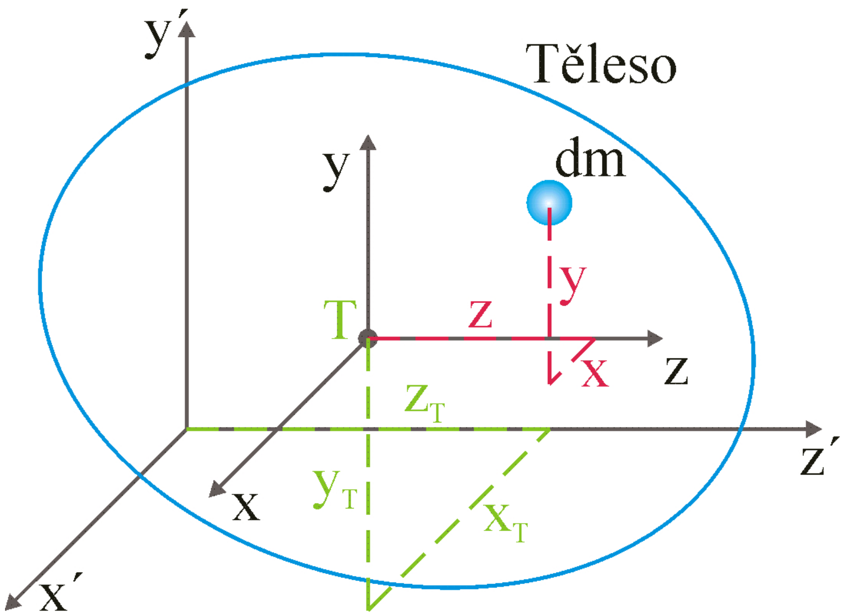
$m$ je hmotnost $[kg]$.

Po vyčíslení všech veličin ve výrazech (6) a (7) lze vyjádřit matici setrvačnosti tělesa:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & I_z \end{pmatrix} \quad (8)$$

## Momenty setrvačnosti a deviační momenty vzhledem k posunutým osám (Steinerova věta)

V řadě případů je třeba umět vypočítat momenty setrvačnosti a deviační momenty vzhledem k jiným osám než k těm, ke kterým je již máme spočtené. K tomuto lze použít tzv. Steinerovu větu.




Obrázek 2: Steinerova veta.

Odvození bude ukázáno pro jeden moment setrvačnosti, pro další momenty setrvačnosti i pro deviační momenty je postup stejný. Mějme spočteny momenty setrvačnosti a deviační momenty vzhledem k systému souřadnic $O(x, y, z)$, který má počátek v hmotném středu tělesa a mějme dán systém souřadnic $O(x', y', z')$ pro jehož souřadnice platí

$$x' = x + x_T,$$

$$
\begin{aligned}
y' &= y + y_T, \\
z' &= z + z_T.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Potom lze odvodit hodnotu momentu setrvačnosti $I'_x$ následující způsobem:

$$
I'_x = \int_m \left[(y')^2 + (z')^2\right] dm = \int_m \left[(y + y_T)^2 + (z + z_T)^2\right] dm. \tag{10}
$$

Po umocnění závorek[1] a úpravě dostaneme:

$$
\begin{aligned}
I'_x &= \int_m \left(y^2 + z^2\right) dm + \left(y_T^2 + z_T^2\right) \int_m dm + 2y_T^2 \int_m y\, dm + \\
&+ 2z_T^2 \int_m z\, dm,
\end{aligned} \tag{11}
$$

kde členy $2y_T^2 \int_m y\, dm$ a $2z_T^2 \int_m z\, dm$ obsahují statický moment vzhledem k osám procházejícím těžištěm a tyto statické momenty, jek bylo uvedeno výše, jsou nulové. Po vypuštění nulových členů dostaneme:

$$
I'_x = \int_m \left(y^2 + z^2\right) dm + m(y_T^2 + z_T^2) = I_{x_T} + m(y_T^2 + z_T^2). \tag{12}
$$

Steinerova věta platí mezi dvěmi rovnoběžnými osami, z nichž jedna je centrální (prochází těžištěm). Výpočet momentů setrvačnosti vzhledem k posunutým osám lze tedy provést podle následujících vztahů:

$$
\begin{aligned}
I'_x &= I_{x_T} + m(y_T^2 + z_T^2), \\
I'_y &= I_{y_T} + m(x_T^2 + z_T^2), \\
I'_z &= I_{z_T} + m(x_T^2 + y_T^2).
\end{aligned} \tag{13}
$$

A výpočet deviačních momentů lze provést podle následujících vztahů:

$$
\begin{aligned}
D'_{xy} &= D_{x_T y_T} + m y_T z_T, \\
D'_{yz} &= D_{y_T z_T} + m y_T z_T, \\
D'_{xz} &= D_{x_T z_T} + m x_T z_T.
\end{aligned} \tag{14}
$$

[1]Podle vzorce $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

## Momenty setrvačnosti vzhledem k pootočeným osám

Platí, že v každém bodě existuje souřadný systém, v němž jsou deviační momenty rovny nule. Osy tohoto systému jsou **hlavní osy**. Prochází-li osa navíc těžištěm, je to **hlavní centrální osa**.

Dále platí věty:

1. Má-li homogení těleso rovinu souměrnosti, je každá kolmice k této rovině hlavní centrální osou setrvačnosti. Deviační moment D vzhledem k hlavním osám je nulový a moment setrvačnosti I nabývá maximální, nebo minimální hodnoty.

2. Má-li homogení těleso dvě navzájem kolmé roviny souměrnosti, je jejich průsečnice hlavní centrální osou setrvačnosti (tj. hlavní osa procházející těžištěm).

3. Osa rotačního homogeního tělesa je hlavní centrální osou setrvačnosti.