

4.1 Shrnutí základních poznatků

V celé řadě konstrukcí se setkáváme s případy, kdy o nosnosti nerozhoduje pevnost materiálu, ale stabilitní stav rovnováhy. Tuto problematiku souhrnně nazýváme stabilita konstrukcí. Ztráta stability nejčastěji nastává při namáhání tlakem, ohybem a krutem, popř. při jejich kombinaci. S úlohami ztráty stability se setkáváme u tenkostěnných konstrukcí, u rovinných a zakřivených desek, u otevřených i uzavřených profilů nebo u tenkostěnných nosníků. Problém stability může nastat u nosného celku nebo jen u jeho částí. Potom hovoříme o lokální stabilitě.

V rámci úloh stability je následující patrie zaměřena pouze na jeden ze základních případů, tzv. vzpěr. Dochází k němu při zatížení štíhlého prutu (vzpěry) tlakovou osovou silou. Uvedeme dvě teorie, z nichž první je možné použít v pružné a druhou v nepružné oblasti zatěžování.

Eulerova teorie vzpěru

Je nazvána podle Leonharda Eulera, který se problematikou stability prutů v elastické oblasti zatěžování zabýval v 18. století. Dříve uvedme nejprve předpoklady platnosti této teorie:

- Materiál prutu je lineárně elastický (zatěžování probíhá v oblasti platnosti Hookeova zákona), homogenní a izotropní.
- Osa prutu je přímá, síla působí přesně v ose prutu bez vnějších i vnitřních excentricit, případné klouby jsou bez tření.

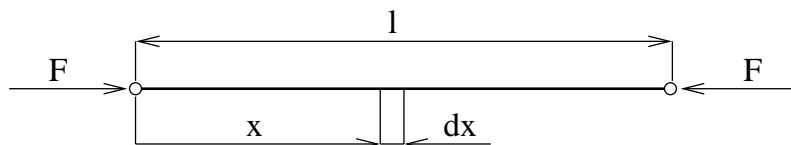
V souvislosti s těmito podmínkami se někdy hovoří o tzv. ideálním prutu. Při odvození teorie vzpěru přímých prutů však respektujeme i další předpoklady:

- Poměrné deformace, které mohou vzniknout, jsou malé, tj. $\varepsilon \ll 1$.
- Respektujeme Saint-Venantův princip, při kterém se lokální charakter zatížení projevuje jen v jeho blízkém okolí.
- Vliv vlastní tíhy, popř. působení jiných primárních vnějších účinků, mimo osových sil, neuvažujeme.
- Prut je po částech prizmatický, tj. konstantního průřezu.

V případě vzpěru, kdy zatěžující tlaková síla (obr. 1) působí v ose štíhlého prutu, nelze sestavit podmínky rovnováhy sil na nepřetvořeném tělese (prutu), jak je to obvyklé např. při odvození podmínek rovnováhy ohýbaných přímých prutů. V tomto případě vyvolá osová síla při průhybu prutu přídavný ohybový moment, který zpětně ovlivní napětí i

VZPĚR PŘÍMÝCH PRUTŮ

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek



Obr. 1: Prut délky l zatížený tlakovou osovou silou F .

průhyb. Deformace již nejsou přímo úměrné velikosti osového zatížení a nemůžeme tak jejich vliv zanedbat. Hovoříme pak o teorii 2. řádu a při sestavování podmínek rovnováhy na elementárním hranolku přímého prutu (obr. 2) bereme v úvahu ještě další předpoklady.

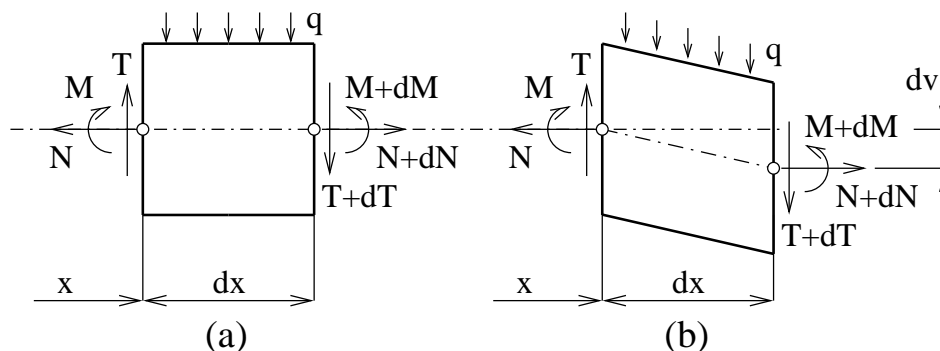
- Respektujeme složku posuvu-průhybu $v(x)$ jako rameno, na kterém vyvozují osové síly ohybový moment.
- Neuvažujeme vliv změny rozpětí a polohy příčného zatížení prutu.
- Normálová síla $N(x)$, resp. posouvající síla $T(x)$, působí rovnoběžně se souřadnicovou osou x , resp. y .
- Připouštíme platnost diferenciální rovnice průhybové čáry podle Euler-Bernoulliho nosníkové teorie.

Z obr. 2 je potom zřejmé, jak sestavujeme diferenciální podmínky rovnováhy dle teorie 1. a 2. řádu na rovinně zatíženém elementu prutu. V obecném případě, kdy uvažujeme i vliv příčného zatížení $q(x)$, kombinace vzpěru a ohybu, formulujeme dle teorie 1. řádu tzv. Schwedlerovu větu, pro kterou platí:

$$\frac{dT(x)}{dx} = -q(x) \quad \text{a} \quad \frac{dM(x)}{dx} = T(x), \quad \text{resp.} \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x). \quad (1)$$

Avšak, dle teorie 2. řádu nabývají tyto rovnice tvaru

$$\frac{dT(x)}{dx} = -q(x) \quad \text{a} \quad \frac{dM(x)}{dx} = T(x) - N(x) \frac{dv(x)}{dx}. \quad (2)$$



Obr. 2: Zatížení elementárního hranolku prutu dle teorie (a) 1. řádu, (b) 2. řádu.

VZPĚR PŘÍMÝCH PRUTŮ

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Při namáhání prutu vzpěrem, viz obr. 1, neuvažujeme v diferenciálních rovnicích (2) vliv spojitého příčného zatížení a píšeme

$$q(x) = 0. \quad (3)$$

Z obr. 1 a obr. 2 je dále zřejmé (při použití metody řezu), že

$$N(x) = -F \quad \text{pro} \quad F > 0. \quad (4)$$

Pomocí vztahů (2) až (4) a pomocí diferenciální rovnice průhybové čáry

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ} \quad (5)$$

obdržíme po úpravě homogenní lineární diferenciální rovnici 4. řádu s konstantními koeficienty

$$\frac{d^4v(x)}{dx^4} + \frac{F}{EJ} \frac{d^2v(x)}{dx^2} = 0, \quad (6)$$

kde $E = \text{konst}$ je modul pružnosti v tahu a $J = \text{konst}$ je kvadratický moment průřezu prutu (vztažený k hlavní centrální ose). Rovnice je často zavedením substitučních vztahů

$$w(x) = \frac{v(x)}{l} \quad \text{a} \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad (7)$$

kde l je délka prutu, viz obr. 1, převedena do bezrozměrného tvaru

$$\frac{d^4w(\xi)}{d\xi^4} + \eta^2 \frac{d^2w(\xi)}{d\xi^2} = 0, \quad \text{kde} \quad \eta^2 = \frac{Fl^2}{EJ}, \quad (8)$$

a v této podobě je známá jako Eulerova rovnice vzpěru prutu.

Předpokládejme řešení rovnice (8) ve tvaru $w = e^{\kappa\xi}$. Po dosazení za $d^2w/d\xi^2$ a $d^4w/d\xi^4$ do (8) a po dělení celé rovnice výrazem $e^{\kappa\xi}$ dostaneme pro κ tzv. charakteristickou rovnici

$$\kappa^4 + \eta^2 \kappa^2 = 0 \quad \text{s kořeny} \quad \kappa_{1,2} = 0, \quad \kappa_3 = i\eta, \quad \kappa_4 = -i\eta, \quad (9)$$

kde $i = \sqrt{-1}$ je imaginární jednotka. Protože kořen 0 je dvojnásobný, je fundamentální systém rovnice (8) dán funkcemi

$$w_1 = e^{\kappa_1\xi} = 1, \quad w_2 = \xi e^{\kappa_2\xi} = \xi, \quad w_3 = e^{\kappa_3\xi} = e^{i\eta\xi}, \quad w_4 = e^{\kappa_4\xi} = e^{-i\eta\xi}, \quad (10)$$

nebo funkcemi v reálném tvaru

$$w_1 = 1, \quad w_2 = \xi, \quad w_3 = \sin \eta \xi, \quad w_4 = \cos \eta \xi. \quad (11)$$

Obecným integrálem rovnice (8) je potom (píšeme jej v reálném tvaru)

$$w(\xi) = C_1 + C_2\xi + C_3 \sin \eta \xi + C_4 \cos \eta \xi, \quad (12)$$

přičemž C_1 až C_4 jsou integrační konstanty, které je nutné určit na základě okrajových podmínek konkrétní úlohy.

VZPĚR PŘÍMÝCH PRUTŮ

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Známe-li obecné řešení (12) pro průhyb (vybočení) prutu, můžeme s jeho pomocí vyjádřit další veličiny, které budeme v dalším využívat. Pro

- úhel natočení přibližně platí:

$$\varphi(x) = \frac{dv(x)}{dx}, \quad \text{resp.} \quad \varphi(\xi) = \frac{dw(\xi)}{d\xi}, \quad (13)$$

- ohybový moment dle rovnice (5) platí:

$$M(x) = -EJ \frac{d^2v(x)}{dx^2}, \quad \text{resp.} \quad M(\xi) = -\frac{EJ}{l} \frac{d^2w(\xi)}{d\xi^2}, \quad (14)$$

- posouvající sílu dle rovnic (2) a (14) platí:

$$T(x) = -\left[EJ \frac{d^3v(x)}{dx^3} + F \frac{dv(x)}{dx} \right], \quad \text{resp.} \quad T(\xi) = -\left[\frac{EJ}{l^2} \frac{d^3w(\xi)}{d\xi^3} + F \frac{dw(\xi)}{d\xi} \right]. \quad (15)$$

Čtyři integrační konstanty C_1 až C_4 vypočteme ze dvou okrajových podmínek na každém konci prutu. Obdržíme tak soustavu čtyř homogenních lineárních algebraických rovnic, které lze formálně zapsat v maticovém tvaru

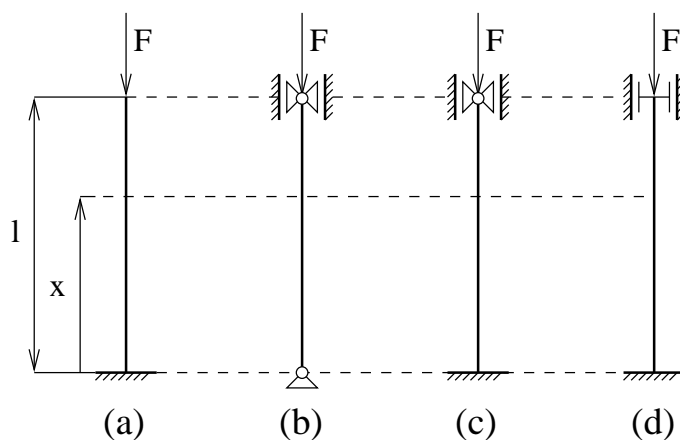
$$\mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (16)$$

kde \mathbf{A} je čtvercová matice 4. řádu, $\mathbf{c} = [C_1, C_2, C_3, C_4]^T$ a $\mathbf{0}$ je nulový sloupcový vektor dimenze 4. Podmínkou netriviálního řešení soustavy rovnic (16) je

$$\det(\mathbf{A}) = 0, \quad (17)$$

což vyjadřuje zároveň podmínku stability prutu. Na základě tohoto kritéria stability potom vypočteme velikost kritického zatížení a kritické síly.

S ohledem na uložení prutů, viz obr. 3, se v praxi obvykle setkáváme se čtyřmi základními případy vzpěru v pružné oblasti řešení.



Obr. 3: Základní případy uložení prutů.

VZPĚR PŘÍMÝCH PRUTŮ

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

I. případ vzpěru, kdy je prut na jednom konci vetknutý a na druhém volný – obr. 3a.

- Okrajové podmínky:

$$v(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad M(l) = 0, \quad T(l) = 0. \quad (18)$$

- Okrajové podmínky v bezrozměrném tvaru:

$$w(0) = 0, \quad \frac{dw(0)}{d\xi} = 0, \quad \frac{d^2w(1)}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d^3w(1)}{d\xi^3} + \eta^2 \frac{dw(1)}{d\xi} = 0. \quad (19)$$

- Kritérium stability:

$$\cos \eta = 0 \quad \text{pro} \quad \eta \neq 0. \quad (20)$$

- Kritické vzpěrné zatížení¹:

$$\eta = \frac{\pi}{2}. \quad (21)$$

II. případ vzpěru, kdy je prut na jednom konci pevně kloubově upevněn a na druhém kloubově upevněn a veden – obr. 3b.

- Okrajové podmínky:

$$v(0) = 0, \quad M(0) = 0, \quad v(l) = 0, \quad M(l) = 0. \quad (22)$$

- Okrajové podmínky v bezrozměrném tvaru:

$$w(0) = 0, \quad \frac{d^2w(0)}{d\xi^2} = 0, \quad w(1) = 0, \quad \frac{d^2w(1)}{d\xi^2} = 0. \quad (23)$$

- Kritérium stability:

$$\sin \eta = 0 \quad \text{pro} \quad \eta \neq 0. \quad (24)$$

- Kritické vzpěrné zatížení:

$$\eta = \pi. \quad (25)$$

III. případ vzpěru, kdy je prut na jednom konci vetknutý a na druhém kloubově upevněn a veden – obr. 3c.

- Okrajové podmínky:

$$v(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad v(l) = 0, \quad M(l) = 0. \quad (26)$$

¹Praktický význam mají ve všech čtyřech případech vzpěru pouze uvedené kořeny. V případě ostatních kořenů by musely mít pruty boční vedení.

VZPĚR PŘÍMÝCH PRUTŮ

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

- Okrajové podmínky v bezrozměrném tvaru:

$$w(0) = 0, \quad \frac{dw(0)}{d\xi} = 0, \quad w(1) = 0, \quad \frac{d^2w(1)}{d\xi^2} = 0. \quad (27)$$

- Kritérium stability:

$$\tan \eta = \eta \quad \text{pro} \quad \eta \neq 0. \quad (28)$$

- Kritické vzpěrné zatížení:

$$\eta = \sqrt{2.0457\pi} \cong \sqrt{2}\pi. \quad (29)$$

IV. případ vzpěru, kdy je prut na jednom konci vetknutý a na druhém ukončen posuvným vetknutím – obr. 3d.

- Okrajové podmínky:

$$v(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad v(l) = 0, \quad \varphi(l) = 0. \quad (30)$$

- Okrajové podmínky v bezrozměrném tvaru:

$$w(0) = 0, \quad \frac{dw(0)}{d\xi} = 0, \quad w(1) = 0, \quad \frac{dw(1)}{d\xi} = 0. \quad (31)$$

- Kritérium stability:

$$1 - \cos \eta = \frac{\eta}{2} \sin \eta \quad \text{pro} \quad \eta \neq 0. \quad (32)$$

- Kritické vzpěrné zatížení:

$$\eta = 2\pi. \quad (33)$$

Velikost kritické síly pro jednotlivé případy plyne z porovnání (8) s příslušnými velikostmi kritického vzpěrného zatížení. Z porovnání takto získaných vztahů je zřejmá jejich vzájemná vazba. Všechny případy můžeme vyjádřit jednotným vzorcem

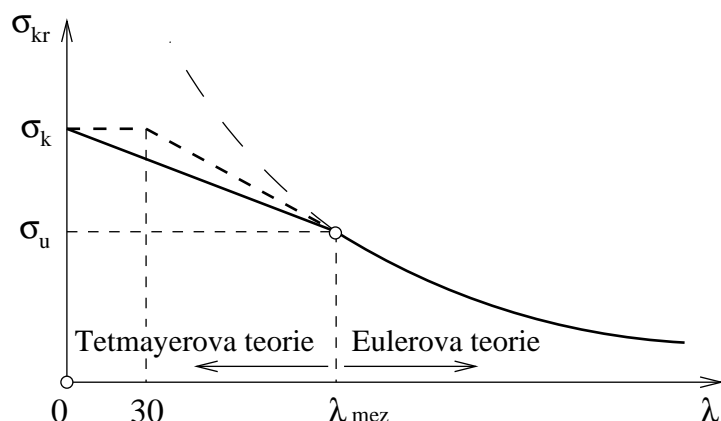
$$F_{kr} = n \frac{\pi^2 E J_{min}}{l^2}, \quad \text{kde} \quad n = \begin{cases} 1/4 & \text{pro} & \text{I. případ vzpěru,} \\ 1 & \text{pro} & \text{II. případ vzpěru,} \\ 2 & \text{pro} & \text{III. případ vzpěru,} \\ 4 & \text{pro} & \text{IV. případ vzpěru,} \end{cases} \quad (34)$$

který je označován jako Eulerův vzorec vzpěru. Ze vzorce je patrné, že za kvadratický moment průřezu prutu je vždy nutné dosadit jeho minimální hodnotu. To plyne ze skutečnosti, že vybočení osově stlačovaného prutu nastane v rovině nejmenší ohybové tuhosti. Jestliže zavedeme tzv. poloměr setrvačnosti i a štíhlostní poměr λ pomocí vztahů

$$i_{min}^2 = \frac{J_{min}}{A} \quad \text{a} \quad \lambda = \frac{l}{i_{min}}, \quad (35)$$

VZPĚR PŘÍMÝCH PRUTŮ

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek



Obr. 4: Průběh kritického napětí dle Tetmayerovy a Eulerovy teorie vzpěru.

můžeme vyjádřit velikost kritického napětí dle Eulerova

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = n \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (36)$$

kde A je velikost průřezu prutu. Závislost σ_{kr} na λ je hyperbola 2. řádu s asymptotami v souřadnicových osách, jak je patrné z obr. 4.

Jak již bylo dříve uvedeno, je použitelnost Eulerovy teorie vzpěru omezena platností Hookeova zákona, a je proto vázána podmínkou

$$\sigma_{kr} \leq \sigma_u, \quad (37)$$

tj. že kritické napětí nepřevýší mez úměrnosti materiálu, viz obr. 4. Napětí σ_u odpovídá tzv. meznímu štíhlostnímu poměru λ_{mez} , jehož hodnotu určíme v souladu se vztahem (36) a podmínkou (37) jako

$$\lambda_{mez} = \pi \sqrt{\frac{nE}{\sigma_u}}. \quad (38)$$

V souladu se vztahem (37) pak můžeme vymežit pružnou oblast řešení vzpěru podmínkou²

$$\lambda \geq \lambda_{mez}. \quad (39)$$

Tetmayerova teorie vzpěru

Řešení v nepružném oblasti vzpěru není dosud uspokojivě teoreticky nalezeno. Dimenzování se zde velmi často provádí na základě experimentů. Vznikají tak empirické vzorce, mezi které patří i Tetmayerův vztah. Pro houževnaté materiály je uváděn ve tvaru

$$\sigma_{kr} = \sigma_T = a - b\lambda, \quad (40)$$

²V případě II. typu vzpěru se navíc nedoporučuje zatěžovat prut na vzpěr, jestliže štíhlostní poměr přesahuje hodnotu 200.

VZPĚR PŘÍMÝCH PRUTŮ

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

zatímco pro křehké materiály je doplněn ještě o jeden člen

$$\sigma_{kr} = \sigma_T = a - b\lambda - c\lambda^2. \quad (41)$$

Konstanty a a b , popř. c , jsou závislé na použitém materiálu a musí být určeny experimentálně. Jestliže u houževnatého materiálu tyto konstanty neznáme, můžeme je přibližně určit ze znalosti σ_u , λ_{mez} a meze kluzu materiálu σ_k pro hodnotu $\lambda = 0$, resp. $\lambda = 30$, viz obr. 4. Při malých štíhlostních poměrech

$$\lambda \leq 30 \quad (42)$$

přechází vzpěr v prostý tlak a není nutné jej uvažovat.

Kritickou sílu v nepružné oblasti dostaneme ze známého napětí σ_T (viz vztah (40), popř. (41)) jako

$$F_{kr} = F_T = A\sigma_T. \quad (43)$$

Poznámka: Kritická síla je pouze teoretická hodnota a při praktickém výpočtu zatížení prutu je nutné brát v úvahu snížení nosnosti, která je zapříčena např. vlivem výrobní tolerance nebo nehomogenity materiálu. Tyto okolnosti zahrnujeme do výpočtu pomocí bezpečnosti k , což můžeme vyjádřit vztahem pro provozní sílu F , resp. napětí σ ,

$$F \leq \frac{F_{kr}}{k}, \quad \text{resp.} \quad \sigma \leq \frac{\sigma_{kr}}{k}. \quad (44)$$

Bezpečnost se obvykle uvažuje v elastickém i plastickém rozsahu vzpěru konstantní a pro běžné konstrukce se udává $k = 2.5 \div 3.5$.