

VZPĚR PŘÍMÝCH PRUTŮ

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

4.3 Řešené příklady

Příklad 1:

Stanovte průměr D ocelové vzpěry zatížené dle obr. 1 osovou silou F , je-li dáno: $F = 25$ kN, $l = 2$ m, $k = 3$, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_u = 150$ MPa.

Řešení:

Při řešení budeme nejprve předpokládat, že pro zadaný příklad je možné použít Eulerovu teorii vzpěru pro pružnou oblast, tj. že platí nerovnost

$$\lambda \geq \lambda_{mez}. \quad (1)$$

Podle této teorie provedeme dimenzování zadaného prutu a následně pomocí stanoveného průměru D určíme skutečný štíhlostní poměr λ a ověříme splnění nerovnosti (1). V případě, že tato nerovnost bude splněna, předpoklad platnosti Eulerovy teorie byl správný a dimenzování bylo provedeno korektně. V opačném případě je nutné k řešení použít Tetmayerovu teorii vzpěru pro nepružnou oblast.

Při hledání minimálního přípustného průměru D vyjdeme z porovnání velikosti kritické síly F_{kr} , určené podle Eulerovy teorie, s kritickou silou stanovenou z nerovnosti

$$F_{kr} \geq kF. \quad (2)$$

Pro určení velikosti kritické síly pomocí Eulerovy teorie využijeme tzv. Eulerova vztahu ve tvaru

$$F_{kr} = n \frac{\pi^2 E J_{min}}{l^2}, \quad \text{kde} \quad J_{min} = \frac{\pi D^4}{64}. \quad (3)$$

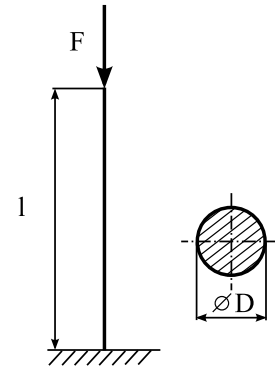
Hodnota parametru n závisí na typu vzpěru. V tomto případě se jedná o vzpěr typu I, a proto platí $n = 1/4$. Dosazením vztahu pro J_{min} a hodnoty n do (3) můžeme kritickou sílu vyjádřit jako

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 E \frac{\pi D^4}{64}}{4l^2} = \frac{\pi^3 E D^4}{256 l^2}. \quad (4)$$

Porovnáním vztahů (4) a (2) dostáváme pro případ rovnosti

$$kF = \frac{\pi^3 E D^4}{256 l^2} \Rightarrow D = \sqrt[4]{\frac{256 F k l^2}{\pi^3 E}} = \sqrt[4]{\frac{256 \cdot 25000 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 10^{11} \pi^3}} \doteq 59.3 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 59.3 \text{ mm}. \quad (5)$$

Nyní ověříme, zda předpoklad řešení vzpěru v pružné oblasti byl správný, tj. zda skutečně platí nerovnost (1). Hodnotu mezního štíhlostního poměru λ_{mez} určíme pomocí



Obr. 1

VZPĚR PŘÍMÝCH PRUTŮ

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

obecného vztahu

$$\lambda_{mez} = \pi \sqrt{\frac{nE}{\sigma_u}}. \quad (6)$$

Po dosazení zadaných parametrů a hodnoty $n = 1/4$ dostáváme $\lambda_{mez} \doteq 57.4$. Skutečnou hodnotu štíhlostního poměru potom vypočteme následujícím postupem:

$$\lambda = \frac{l}{i_{min}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{J_{min}}{A}}} = l \sqrt{\frac{A}{J_{min}}} = l \sqrt{\frac{\frac{\pi D^2}{4}}{\frac{\pi D^4}{64}}} = \frac{4l}{D} = \frac{4 \cdot 2}{59.3 \cdot 10^{-3}} \doteq 134.9 \quad (7)$$

Porovnáním (7) s vypočtenou hodnotou λ_{mez} snadno zjistíme, že nerovnost (1) je splněna, a tedy dimenzování, při němž byl stanoven minimální průměr prutu $D \doteq 59.3$ mm, bylo provedeno správně.

Příklad 2:

Dimenzujte dřevěný sloup délky l znázorněný na obr. 1, který je namáhán osovou silou F , je-li dáno: $F = 50$ kN, $l = 2$ m, $k = 3.5$, $E = 8 \cdot 10^3$ MPa, $\sigma_u = 19.5$ MPa, $a = 29.3$ MPa, $b = 0.194$ MPa.

Řešení:

Při řešení tohoto příkladu budeme postupovat zcela analogicky, jako při řešení prvního příkladu této kapitoly. Nejprve budeme předpokládat, že pro řešený příklad je možné použít Eulerovu teorii vzpěru pro pružnou oblast, tj. že platí nerovnost

$$\lambda \geq \lambda_{mez}. \quad (1)$$

Za tohoto předpokladu určíme pomocí vztahu

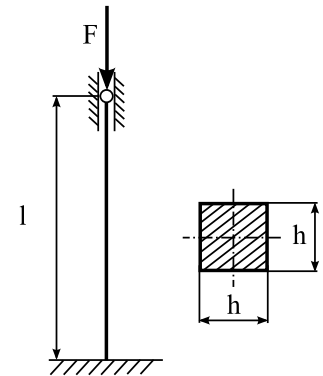
$$F_{kr} = n \frac{\pi^2 E J_{min}}{l^2}, \quad \text{kde} \quad J_{min} = \frac{h^4}{12} \quad (2)$$

velikost kritické síly, přičemž platí $n = 2$, neboť se jedná o vzpěr typu III. Z rovnice (2) pak můžeme vyjádřit hledaný rozměr h jako

$$F_{kr} = \frac{2\pi^2 E}{l^2} \frac{h^4}{12} \Rightarrow h = \sqrt[4]{\frac{6l^2 F_{kr}}{\pi^2 E}}, \quad (3)$$

kde velikost kritické síly F_{kr} určíme z podmínky

$$F \leq \frac{F_{kr}}{k}. \quad (4)$$



Obr. 1

VZPĚR PŘÍMÝCH PRUTŮ

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Dosazením limitního případu nerovnosti (4) do (3) a dosazením zadaných hodnot, lze pro minimální rozměr h psát

$$h = \sqrt[4]{\frac{6kl^2F}{\pi^2E}} = \sqrt[4]{\frac{6 \cdot 3.5 \cdot 4 \cdot 50000}{\pi^2 \cdot 8 \cdot 10^9}} \doteq 85.4 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 85.4 \text{ mm}. \quad (5)$$

Nyní je ještě nutné ověřit, zda pro vypočtenou hodnotu h a zadané parametry je splněna podmínka (1). Pro mezní hodnotu štíhlostního poměru λ_{mez} platí

$$\lambda_{mez} = \pi \sqrt{\frac{nE}{\sigma_u}} = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 10^9}{19.5 \cdot 10^6}} \doteq 100. \quad (6)$$

Velikost skutečného štíhlostního poměru λ vypočteme následovně:

$$\lambda = \frac{l}{i_{min}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{J_{min}}{A}}} = l \sqrt{\frac{A}{J_{min}}} = l \sqrt{\frac{h^2}{\frac{h^4}{12}}} = 2\sqrt{3} \frac{l}{h}. \quad (7)$$

Po dosazení zadaných hodnot a vyčíslení dostáváme $\lambda \doteq 81.1$. Porovnáním této hodnoty a hodnoty λ_{mez} je zřejmé, že předpoklad (1) nebyl správný, tj. pro řešení úlohy nelze použít Eulerovu teorii vzpěru, a proto dimenzování (konkrétně určení kritické síly F_{kr}) nebylo provedeno korektně. Pro stanovení minimálního rozměru h proto musíme použít Tetmayerovu teorii vzpěru pro nepružnou oblast.

Podle této teorie lze velikost F_{kr} určit pomocí vztahu

$$F_{kr} = A\sigma_T, \quad (8)$$

kde pro kritickou hodnotu napětí σ_T podle Tetmayera v případě houževnatých materiálů je používán empirický vztah

$$\sigma_T = a - b\lambda, \quad (9)$$

ve kterém je hodnota λ dána vztahem (7). Dosazením (7) a (9) do (8) a využitím limitního případu nerovnosti (1) můžeme pro hledaný rozměr h psát

$$Fk = h^2 \left(a - 2\sqrt{3} \frac{bl}{h} \right), \quad (10)$$

což po úpravě vede na kvadratickou rovnici

$$ah^2 - 2\sqrt{3}bhl - Fk = 0. \quad (11)$$

Řešení této rovnice lze zapsat ve tvaru

$$h_{1,2} = \frac{\sqrt{3}bhl \pm \sqrt{(\sqrt{3}bhl)^2 + akF}}{a}. \quad (12)$$

VZPĚR PŘÍMÝCH PRUTŮ

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Po dosazení zadaných hodnot a vyčíslení dostáváme dva kořeny: $h_1 \doteq 103.6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ a $h_2 \doteq -57.7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Je zřejmé, že druhý nalezený kořen není fyzikálně přípustný, proto hledaný minimální rozměr průřezu sloupu je $h \doteq 103.6 \text{ mm}$.

Na závěr řešení je vhodné ještě ověřit, zda platí podmínka

$$\lambda < \lambda_{mez}, \quad (13)$$

což je ekvivalentní se splněním nerovnosti

$$\sigma_T > \sigma_u. \quad (14)$$

Hodnotu λ , resp. hodnotu σ_T , snadno určíme dosazením vypočteného h do (7), resp. pomocí vztahů (8) a (4). Po vyčíslení potom dostáváme $\lambda \doteq 66.9$, resp. $\sigma_T \doteq 16.3 \text{ MPa}$, takže nerovnost (13), resp. (14), je splněna.

Příklad 3:

O jakou teplotu ΔT je možné ohřát prut délky l znázorněný na obr. 1, aby nedošlo ke ztrátě jeho stability. Dáno: $b = 60 \text{ mm}$, $h = 80 \text{ mm}$, $l = 3 \text{ m}$, $k = 2.5$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\sigma_u = 210 \text{ MPa}$, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

Řešení:

Ke ztrátě stability prutu dojde v případě, že není splněna podmínka

$$F \leq \frac{F_{kr}}{k}, \quad (1)$$

kde F představuje provozní sílu, což je v tomto případě síla v prutu vyvolaná jeho ohřátím o ΔT . Hodnotu F_{kr} pak určíme pomocí příslušné teorie. O tom, jakou teorii pro výpočet F_{kr} použijeme, rozhodne splnění (nesplnění) podmínky

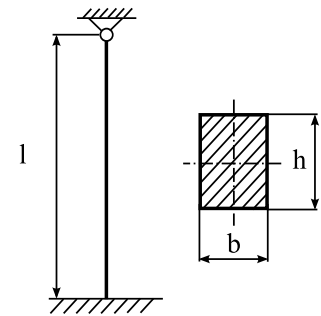
$$\lambda \geq \lambda_{mez}. \quad (2)$$

Hodnoty λ a λ_{mez} lze přitom v tomto případě přímo vypočítat ze zadaných parametrů. Pro štíhlostní poměr λ platí

$$\lambda = \frac{l}{i_{min}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{J_{min}}{A}}} = l \sqrt{\frac{A}{J_{min}}} = l \sqrt{\frac{bh}{\frac{b^3 h}{12}}} = 2\sqrt{3} \frac{l}{b} \doteq 173.2. \quad (3)$$

Hodnotu mezního štíhlostního poměru λ_{mez} určíme pomocí vztahu

$$\lambda_{mez} = \pi \sqrt{\frac{nE}{\sigma_u}}, \quad (4)$$



Obr. 1

VZPĚR PŘÍMÝCH PRUTŮ

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

kde $n = 2$, neboť se jedná o vzpěr typu III. Po dosazení zadaných hodnot a n do (4) získáme $\lambda_{mez} \doteq 137.1$. Z porovnání této mezní hodnoty s hodnotou (3) je zřejmé, že nerovnost (2) je splněna, a tedy pro výpočet velikosti kritické síly F_{kr} můžeme použít Eulerovu teorii vzpěru. Potom lze psát

$$F_{kr} = n \frac{\pi^2 E J_{min}}{l^2} = \frac{n \pi^2 b^3 h E}{12 l^2}. \quad (5)$$

V dalším kroku řešení je nutné určit velikost provozní síly F . Při využití Hookeova zákona pro jednoosou napjatost a vztahu pro určení deformace prizmatického prutu vlivem změny teploty můžeme tuto hodnotu vypočítat jako

$$F = \sigma_t A = E \varepsilon_t A = E \alpha \Delta T A = \alpha b h E \Delta T, \quad (6)$$

kde σ_t , resp. ε_t , představuje napětí, resp. deformaci, při změně teploty o ΔT .

Dosazením (6) a (5) do (1) získáme nerovnost

$$\alpha b h E \Delta T \leq \frac{n \pi^2 b^3 h E}{12 k l^2}, \quad (7)$$

ze které již snadno vyjádříme hledanou změnu teploty ΔT jako

$$\Delta T \leq \frac{n \pi^2 b^2}{12 \alpha k l^2} = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot 0.06^2}{12 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 2.5 \cdot 9} \doteq 21.9^\circ\text{C}. \quad (8)$$

To znamená, že ztráta stability prutu nenastane, pokud se jeho teplota nezvýší o více jak 21.9°C .

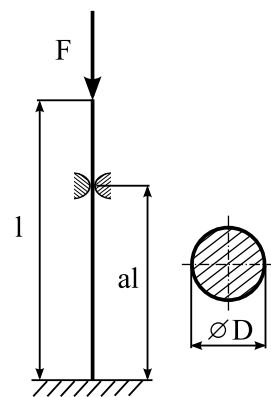
Příklad 4:

Pro prut kruhového průřezu o průměru D a délky l , který je zatížen osovou silou F (viz obr. 1), odvoďte kritérium stability a určete velikost kritické síly F_{kr} pro hodnoty parametru $a = \{0.25, 0.5, 0.75\}$, je-li dáno: $D = 50 \text{ mm}$, $l = 3 \text{ m}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$. Při řešení předpokládejte platnost Eulerovy teorie vzpěru.

Řešení:

Při řešení zadané úlohy je nutné rozdělit prut na dvě části. Provedme toto rozdělení v souladu s obr. 2 na část 1, kde $x \in \langle 0, al \rangle$, a část 2, kde $x \in \langle al, l \rangle$. Je zřejmé, že v obou uvažovaných částech prutu musí platit Eulerova rovnice vzpěru ve tvaru

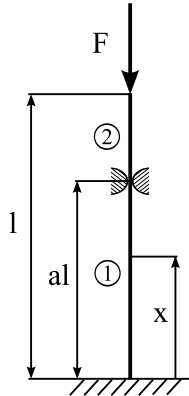
$$\frac{d^4 w_i(\xi)}{d\xi^4} + \eta^2 \frac{d^2 w_i(\xi)}{d\xi^2} = 0, \quad (1)$$



Obr. 1

VZPĚR PŘÍMÝCH PRUTŮ

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek



Obr. 2

kde index $i = 1, 2$ odpovídá jednotlivým částem prutu, přičemž pro veličiny ξ , w a η platí

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad w = \frac{v}{l} \quad \text{a} \quad \eta^2 = \frac{Fl^2}{EJ}, \quad (2)$$

kde v představuje průhyb (vybočení) prutu.

Obecná řešení rovnice (1) pro jednotlivé části prutu lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} w_1(\xi) &= B_1 + B_2 \xi + B_3 \sin(\eta \xi) + B_4 \cos(\eta \xi), \\ w_2(\xi) &= C_1 + C_2 \xi + C_3 \sin(\eta \xi) + C_4 \cos(\eta \xi), \end{aligned} \quad (3)$$

kde B_i a C_i ($i = 1, \dots, 4$) představují 8 integračních konstant, které je nutné určit z celkem 8 okrajových podmínek formulovaných na koncích prutu, tj. pro $\xi = 0$ a $\xi = 1$, a v místě $\xi = a$. S ohledem na uložení prutu lze těchto 8 okrajových podmínek formulovat následovně:

$$\begin{aligned} w_1(0) &= 0 \quad (\text{nulový průhyb ve vetknutí}), \\ \frac{dw_1(0)}{d\xi} &= 0 \quad (\text{nulový úhel natočení ve vetknutí}), \\ w_1(a) &= 0 \quad (\text{nulový průhyb části 1 v místě } \xi = a), \\ w_2(a) &= 0 \quad (\text{nulový průhyb části 2 v místě } \xi = a), \\ \frac{dw_1(a)}{d\xi} &= \frac{dw_2(a)}{d\xi} \quad (\text{spojitost úhlu natočení části 1 a 2 v místě } \xi = a), \\ \frac{d^2w_1(a)}{d\xi^2} &= \frac{d^2w_2(a)}{d\xi^2} \quad (\text{spojitost funkcí ohybového momentu části 1 a 2 v místě } \xi = a), \\ \frac{d^2w_2(1)}{d\xi^2} &= 0 \quad (\text{nulový ohybový moment v místě } \xi = 1), \\ \frac{d^3w_2(1)}{d\xi^3} + \eta^2 \frac{dw_2(1)}{d\xi} &= 0 \quad (\text{nulová posouvající síla v místě } \xi = 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Dosazením obecných řešení (3) do okrajových podmínek (4) získáme soustavu 8 rovnic pro

VZPĚR PŘÍMÝCH PRUTŮ

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

8 neznámých konstant B_i a C_i ($i = 1, \dots, 4$), kterou lze zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & \sin(\eta a) & \cos(\eta a) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & \sin(\eta a) & \cos(\eta a) \\ 0 & 1 & \cos(\eta a)\eta & -\sin(\eta a)\eta & 0 & -1 & -\cos(\eta a)\eta & \sin(\eta a)\eta \\ 0 & 0 & -\sin(\eta a)\eta^2 & -\cos(\eta a)\eta^2 & 0 & 0 & \sin(\eta a)\eta^2 & \cos(\eta a)\eta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\eta)\eta^2 & -\cos(\eta)\eta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Z podmínky existence netriviálního řešení soustavy (5), tj. z podmínky nulovosti determinantu matice soustavy, potom získáme rovnici, kterou lze po úpravě zapsat ve tvaru

$$\eta^7 \{ [2 - \cos(\eta a)] \sin[(1 - a)\eta] + \eta a \cos \eta - \sin \eta \} = 0. \quad (6)$$

Z tvaru rovnice (6) je patrné, že prvním jejím kořenem je $\eta = 0$. Tento násobný kořen však nemá fyzikální význam, neboť, s ohledem na vztah (2)₃, odpovídá $F = 0$. Zbývající kořeny lze nalézt řešením rovnice

$$[2 - \cos(\eta a)] \sin[(1 - a)\eta] + \eta a \cos \eta - \sin \eta = 0, \quad (7)$$

která představuje hledané kritérium stability prutu. První nenulový kořen této rovnice, který můžeme pro konkrétní hodnoty parametru a nalézt jejím numerickým řešením, potom reprezentuje kritické vzpěrné zatížení prutu. Pro zadané hodnoty a tak dostáváme kořeny

$$\eta_{0.25} \doteq 1.9329, \quad \eta_{0.5} \doteq 2.5032 \quad \text{a} \quad \eta_{0.75} \doteq 3.4484. \quad (8)$$

Z nalezených kořenů (8) již potom pomocí vztahu (2)₃ a vztahu $J = \frac{\pi D^4}{64}$ velmi snadno dopočítáme hodnoty kritických sil v jednotlivých případech:

$$F_{kr0.25} \doteq 25.470 \text{ kN}, \quad F_{kr0.5} \doteq 42.718 \text{ kN} \quad \text{a} \quad F_{kr0.75} \doteq 81.071 \text{ kN}^1. \quad (9)$$

Z uvedených hodnot kritických sil je zřejmé, že z hlediska stability prutu je nejbezpečnější varianta $a = 0.75$, což bylo možné očekávat.

¹V případě $a = 1$ přechází řešená úloha na vzpěr typu III, kritérium stability (7) se zjednoduší na rovnici $\tan \eta = \eta$, jejíž první nenulový kořen je $\eta \doteq 4.4934 \doteq \sqrt{2.0457\pi}$. Tato hodnota odpovídá kritické síle $F_{kr1} \doteq 137.654 \text{ kN}$.