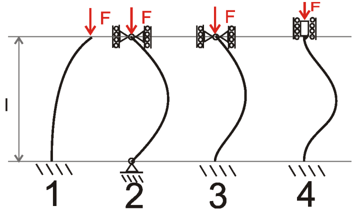
# Pruty namáhané na vzpěr

Martin Fišer

# Obsah

- Úvod
- Eulerova teorie namáhání prutů na vzpěr




  - První případ vzpěru zde
  - Druhý případ vzpěru zde
  - Třetí případ vzpěru zde
  - Čtvrtý případ vzpěru zde
  - Shrnutí vzorců potřebných pro výpočet Eulerovy teorie zde
- Tetmayerova teorie namáhání prutů na vzpěr zde
- Dimenzování zde

# Úvod

V následujícím textu se budeme zabývat problematikou prutů namáhaných na vzpěr. Budou zmíněny dvě teorie (Eulerova a Tetmayerova) pro výpočet kritické síly, popřípadě kritického napětí. Tyto teorie platí v různých oblastech rozdělených dle mezného štíhlostního poměru, definovaného dále v textu.

Návrat na obsah.

# Eulerova teorie-první případ vzpěru


Obrázek: Zatížený prut

Vztah pro kritickou sílu $F_{krit}$ v prvním případě vzpěru je

$$F_{krit} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}. \tag{1}$$


Obrázek: Zatížený prut

Vztah pro kritickou sílu $F_{krit}$ v prvním případě vzpěru je

$$F_{krit} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}. \tag{1}$$

Dimenzování provedeme takto.

Návrat na obsah

# Eulerova teorie-druhý případ vzpěru


Obrázek: Zatížený prut

Vztah pro kritickou sílu $F_{krit}$ ve druhém případě zpěru je

$$F_{krit} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \tag{2}$$

# Eulerova teorie-druhý případ vzpěru


Obrázek: Zatížený prut

Vztah pro kritickou sílu $F_{krit}$ ve druhém případě zpěru je

$$F_{krit} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \tag{2}$$

Dimenzování provedeme takto.

Návrat na obsah

# Eulerova teorie-třetí případ vzpěru


Obrázek: Zatížený prut

Pro třetí případ je kritická síla

$$F_{krit} = \frac{2\pi^2 EJ}{l^2}. \tag{3}$$

# Eulerova teorie-třetí případ vzpěru


Obrázek: Zatížený prut

Pro třetí případ je kritická síla

$$F_{krit} = \frac{2\pi^2 EJ}{l^2}. \tag{3}$$

Dimenzování provedeme takto.

Návrat na obsah

# Eulerova teorie-čtvrtý případ vzpěru


Obrázek: Zatížený prut

Pro čtvrtý případ je kritická síla

$$F_{krit} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}. \tag{4}$$

# Eulerova teorie-čtvrtý případ vzpěru


Obrázek: Zatížený prut

Pro čtvrtý případ je kritická síla

$$F_{krit} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}. \tag{4}$$

Dimenzování provedeme takto.

Návrat na obsah

# Vztahy platné pro Eulerovu teorii

Kritickou sílu lze pro jednotlivé případy vzpěru vyjádřit jako

$$F_{krit} = n\frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \tag{5}$$

kde pro první případ vzpěru $n = \frac{1}{4}$, pro druhý $n = 1$, pro třetí $n = 2$ a pro čtvrtý $n = 4$.
Poloměr setrvačnosti $i$, štíhlostní poměr $\lambda$ a mezný štíhlostní poměr $\lambda_m$ jsou definovány následovně:

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}}, \quad \lambda = \frac{l}{i}, \quad \lambda_m = \sqrt{n\frac{\pi^2 E}{\sigma_u}}, \tag{6}$$

kde $J$ je minimální kvadratický moment průřezu, $A$ je plocha průřezu, $E$ je Youngův modul pružnosti a $\sigma_u$ je mez úměrnosti materiálu.

Návrat na obsah

# Vztahy platné pro Tetmayerovu teorii

Pro výpočet kritického napětí $\sigma_{kr}$ (respektivě kritické síly $F_{krit} = \sigma_{kr} A$) v oblasti, kde neplatí Eulerova teorie, existuje více teorií. My si uvedeme pouze Tetmayerovu lineární závislost kritického napětí na štíhlostním poměru, tj.

$$\sigma_{kr} = \sigma_T = a - b\lambda, \tag{7}$$

kde $a$ a $b$ jsou materiálové konstanty a $\lambda$ je štíhlostní poměr, viz vztahy (6).

## Poznámka

*Například pro křehké materiály je výhodnější použít kvadratickou závislost vyjádření napětí.*

Návrat na obsah

# Dimenzování-Eulerova teorie

Dimenzujeme s bezpečností $k$ na zátěžnou sílu $F$. Zaveďme kritickou sílu $F_{krit} = kF$. Ze vztahu pro kritickou sílu,viz vztah (5), vyjádříme

$$J = \frac{kFl^2}{n\pi^2 E}. \tag{8}$$

Dimenzujeme s bezpečností $k$ na zátěžnou sílu $F$. Zaveďme kritickou sílu $F_{krit} = kF$. Ze vztahu pro kritickou sílu,viz vztah (5), vyjádříme

$$J = \frac{kFl^2}{n\pi^2 E}. \tag{8}$$

Například pro obdélníkový průřez o rozměrech $b$, $h$, kde $h = 2b \Rightarrow b < h$, je

$$J = J_{min} = \frac{1}{12} b^3 h, \quad \text{po dosazení a úpravě} \quad b = \sqrt[4]{\frac{6kFl^2}{n\pi^2 E}}. \tag{9}$$

# Dimenzování-Eulerova teorie

Dimenzujeme s bezpečností $k$ na zátěžnou sílu $F$. Zaveďme kritickou sílu $F_{krit} = kF$. Ze vztahu pro kritickou sílu,viz vztah (5), vyjádříme

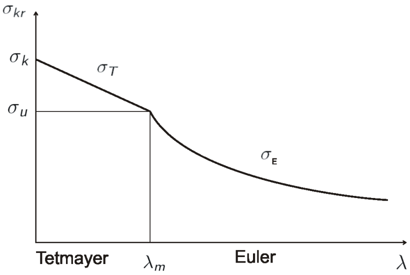
$$J = \frac{kFl^2}{n\pi^2 E}. \tag{8}$$

Například pro obdélníkový průřez o rozměrech $b$, $h$, kde $h = 2b \Rightarrow b < h$, je

$$J = J_{min} = \frac{1}{12} b^3 h, \quad \text{po dosazení a úpravě} \quad b = \sqrt[4]{\frac{6kFl^2}{n\pi^2 E}}. \tag{9}$$

Nyní musíme ověřit, zda se pohybujeme v oblasti platnosti Eulerovy teorie. Ověření provedeme následovně.

# Ověření platnosti Eulerovy teorie




Obrázek: Závislost kritického napětí na štíhlostním poměru

Eulerova teorie platí pouze v určité oblasti napětí, viz obrázek. V této oblasti musí být štíhlostní poměr větší než mezný štíhlostní poměr, tj. $\lambda \geq \lambda_m$.

# Ověření platnosti Eulerovy teorie

Mezný štíhlostní poměr je definován jako

$$\lambda_m = \sqrt{n\frac{\pi^2 E}{\sigma_u}}, \tag{10}$$

kde $\sigma_u$ je napětí na mezi úměrnosti. Poloměr setrvačnosti $i$ je

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}}, \tag{11}$$

kde $J$ je minimální kvadratický moment průřezu.

# Dimenzování-Tetmayerova teorie

Pokud neplatí $\lambda \geq \lambda_m$, pak musíme dimenzovat dle Tetmayerovy teorie

$$\sigma_{kr} = \sigma_T = \frac{F_{krit}}{A} = \frac{kF}{A} = a - b\lambda, \tag{12}$$

kde $a$ a $b$ jsou materiálové konstanty. Pomocí tohoto vztahu dimenzujeme daný prut.

Například pro čtvercový průřez o délce hrany $s$, kde kvadratický moment průřezu je roven $J = \frac{1}{12}s^4$, dostáváme dosazením do (12)

$$\frac{F \cdot k}{s^2} = a - b\frac{l}{\sqrt{\frac{\frac{1}{12}s^4}{s^2}}} = a - b\frac{2\sqrt{3}l}{s}$$
$$\Downarrow$$
$$as^2 - 2\sqrt{3}bls - Fk = 0.$$

Z této kvadratické rovnice vyjádříme $s$. Řešením je nejmenší reálný kladný kořen.