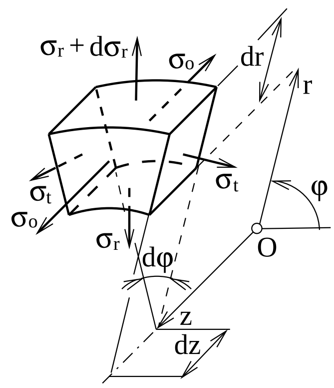
TLUSTOSTĚNNÉ ROTAČNĚ SYMETRICKÉ VÁLCOVÉ NÁDOBY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

1.1 Shrnutí základních poznatků

Pojmem nádoba obvykle označujeme součásti strojů a zařízení, které jsou svým tvarem a charakterem namáhání shodné s dutými tělesy zatíženými vnitřním, popř. i vnějším tlakem. S ohledem na to považujeme za nádoby různá potrubí a kotlová tělesa, ale např. i tlakové nádoby pro jadernou energetiku.

V technické praxi se setkáváme s případy tlustostěnných nádob s uvážením vlivu rozměrových a tvarových změn, např. nestejnosti tloušťky stěn nebo ovality. Vzhledem ke složitějšímu matematickému popisu těchto úloh a také s přihlédnutím k potřebám technické praxe se těmito úlohami nebudeme zabývat. Zaměříme pozornost pouze na teorii tlustostěnných rotačně symetrických válcových nádob majících značný technický význam. Pomocí této teorie lze například poměrně snadno (za zjednodušujících předpokladů) provádět prvotní rozměrový návrh částí tvarově složitějších součástí strojů a zařízení.



Obr. 1: Napjatost v elementárním hranolku.

Při odvození teorie tlustostěnných rotačně symetrických válcových nádob bereme v úvahu tyto předpoklady:

- Materiál nádoby je lineárně elastický (zatěžování probíhá v oblasti platnosti Hookeova zákona), homogenní a isotropní.
- Poměrné deformace, které mohou vznikat v tělese nádoby, jsou malé, tj. $\varepsilon \ll 1$.
- Respektujeme Saint-Venantův princip, při kterém se lokální charakter zatížení projevuje jen v jeho blízkém okolí.
- Podmínky rovnováhy sil sestavujeme na nepřetvořeném tělese nádoby.
- Nádoba má dokonale válcový tvar, tlaky na vnitřním a vnějším povrchu jsou rovnoměrně rozložené.
- Vliv vlastní tíhy tělesa na stav napjatosti a deformace zanedbáváme.

Na základě uvedených předpokladů je řešená úloha osově rotačně symetrická vzhledem k podélné ose nádoby.

Pro vyšetřování stavu napjatosti u této nádoby je nejvýhodněší použití válcových souřadnic, jednotlivé souřadnice označme dle zvyklostí r, φ, z, viz obr. 1. Prvým krokem řešení je vyjmutí elementárního prvku nádoby za dodržení zásad metody řezů. Veďme 6 myšlených řezů: 2 rovnoběžné řezy vedené kolmo na podélnou osu nádoby ve vzdálenosti z a $z + \mathrm{d}z$, 2 souosé válcové řezy o poloměrech r a $r + \mathrm{d}r$ a 2 soumezné řezy obsahující podélnou osu válce, které jsou určené souřadnicemi φ a $\varphi + \mathrm{d}\varphi$, viz obr. 1. Na 6 stěn takto vzniklého elementárního hranolku připojíme účinky vnitřních sil z odstraněné části nádoby. Přitom využijeme těchto skutečností:

- Stěny hranolku mají nekonečně malou plochu, a tak napětí, na ně působící, lze uvažovat jako rovnoměrně rozložená.
- Vzhledem k osové rotační symetrii nádoby nemůže při deformaci elementárního prvku dojít ke zkosení. Odtud plyne, že na stěnách hranolku nemohou vznikat smykové složky napětí a hraniční stěny elementu jsou zároveň hlavními rovinami.
- V elementárním hranolku proto vzniká trojosý stav napjatosti určený hlavními napětími σ_r − radiální, σ_t − obvodové a σ_o − osové.[1] Protože smysly napětí nejsou předem známy, uvažují se všechna a priori jako tahová (obr. 1), přičemž jejich skutečná orientace je dána znaménkem řešení konkrétní úlohy.

Před uvedením základních rovnic pro řešení problému ještě proveďme následující analýzu. S ohledem na předpoklad rovnoměrného zatížení povrchu válce můžeme prohlásit, že složky napětí nejsou závislé na souřadnici z. Vzhledem k rotační symetrii lze dále konstatovat, že složky napětí nejsou funkcemi ani souřadnice φ. Osové napětí lze považovat dokonce za konstantní, tedy $\sigma_o \neq \sigma_o(r)$, pokud se předpokládá, že příslušný řez vedený kolmo na podélnou osu válce je dostatečně vzdálen od dna nebo víka uzavřené nádoby. Dno nebo víko vyztužuje plášť válce a způsobuje, že příčné řezy válcem nejsou po deformaci rovinné. V dostatečné vzdálenosti od dna nádoby je však vliv zanedbatelný a prakticky platí, že poměrné prodloužení podélných vláken v řezu nádoby je všude stejné, nebo-li $\varepsilon_o = \text{konst.}$ Osové napětí potom vypočítáme jako v případě prostého tahu − tlaku. Z rozdílu osových sil působících z vnitřku a z vnějšku uzavřené nádoby na víko platí

$$\sigma_o = \frac{p_1 \pi r_1^2 - p_2 \pi r_2^2}{\pi r_2^2 - \pi r_1^2} = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\,, \tag{1}$$

kde p_1, resp. p_2, je tlak působící na vnitřním, resp. vnějším, povrchu válcové části nádoby na poloměru r_1, resp. r_2. V případě, že vnější, resp. vnitřní, tlak je nulový, snadno odvodíme ze vztahu (1)

$$\sigma_o = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\,, \qquad \text{resp.} \qquad \sigma_o = \frac{-p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\,. \tag{2}$$

Ze vztahu (1) je rovněž patrno, že u otevřené nádoby, tj. u nádoby bez den, je

$$\sigma_o = 0\,. \tag{3}$$

Obě zbývající hlavní napětí, radiální σ_r a obvodové σ_t, jsou v tloušťce stěny rozložena nerovnoměrně a můžeme tak psát: $\sigma_r = \sigma_r(r)$, $\sigma_t = \sigma_t(r)$.

Základní rovnice a jejich obecné řešení

Abychom dokázali určit úlpný stav napjatosti v rotačně symetrické tlustostěnné válcové nádobě, sestavíme pro elementární hranolek (obr. 1):

[1]Napětí σ_t a σ_o se také často značí dle příslušných souřadnic, tj. σ_φ a σ_z.

- jednu podmínku rovnováhy v radiálním směru

$$\sigma_r - \sigma_t + r\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r} = 0\,, \tag{4}$$

- dvě geometricko-deformační rovnice vyjadřující závislost mezi poměrnými deformacemi (prodlouženími) v radiálním a obvodovém směru a posuvem $u = u(r)$ v radiálním směru[2]

$$\varepsilon_r = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} \qquad \text{a} \qquad \varepsilon_t = \frac{(r+u)\mathrm{d}\varphi - r\mathrm{d}\varphi}{r\mathrm{d}\varphi} = \frac{u}{r}\,, \tag{5}$$

- jednu rovnici spojitosti deformací, tzv. rovnici kompatibility, ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_t}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r}\left(\varepsilon_r - \varepsilon_t\right)\,, \tag{6}$$

- užitím obecného Hookeova zákona dvě fyzikální rovnice pro poměrné deformace v radiálním a obvodovém směru

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\left(\sigma_t + \sigma_o\right)\right] \quad \text{a} \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E}\left[\sigma_t - \nu\left(\sigma_r + \sigma_o\right)\right]\,, \tag{7}$$

  kde E je Youngův modul pružnosti a ν je Poissonovo číslo.

Základní soustavu šesti rovnic (4) až (7) je možné v zásadě řešit dvěma způsoby. Při hledání neznámých funkcí použijeme buď deformační variantu řešení, kde jsou neznámými posuvy, nebo silovou variantu řešení, kde jsou neznámými napětí. Ať již použijeme jednu či druhou variantu, lze ukázat, že soustavě rovnic (4) až (7) vyhovují dvě obecná řešení[3]

$$\sigma_r = D_1 \pm \frac{D_2}{r^2} \qquad \text{a} \qquad \sigma_t = D_1 \mp \frac{D_2}{r^2} \tag{8}$$

určující rozložení hlavních napětí σ_r a σ_t ve stěně nádoby, kde D_1 a D_2 jsou integrační konstanty. Z (8) je zřejmé, že křivky zobrazující průběhy napětí σ_r a σ_t jsou hyperboly 2. stupně, což určují druhé členy na pravé straně těchto rovnic, zatímco první člen, v obou případech stejný, určuje posunutí křivek ve směru souřadnicové osy, na níž jsou napětí vynášena, viz obr. 2.

Úloha s okrajovými podmínkami

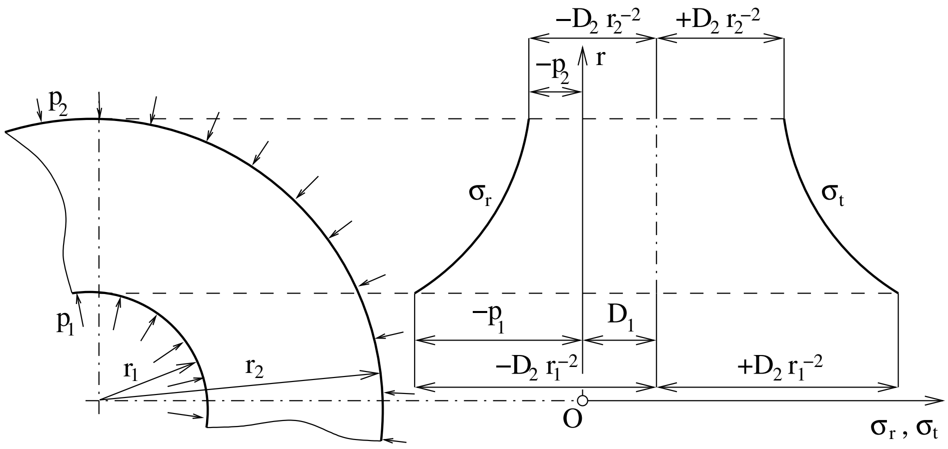
Pomocí obecného řešení (8) a příslušných okrajových podmínek[4] stanovíme konkrétní tvar integračních konstant D_1 a D_2. Poté již můžeme vyšetřit skutečný průběh napětí σ_r a σ_t ve stěně válcové nádoby. Z hlediska technické praxe budeme uvažovat pouze případy, kdy je

---

[2] Funkce u je proměnné pouze r, což plyne obdobně jako u složek napětí z uvedených předpokladů.

[3] Obecně platí: $\sigma_r + \sigma_t = 2D_1$. Dále budeme pracovat s řešením: $\sigma_r = D_1 - D_2 r^{-2}$ a $\sigma_t = D_1 + D_2 r^{-2}$

[4] Jedná se o statické okrajové podmínky, protože na hranici (povrchu) válce předepisujeme statické podmíky rovnováhy.



Obr. 2: Rozložení napětí σ_r a σ_t po tloušťce stěny nádoby ($p_1 r_1^2 > p_2 r_2^2$).

nádoba namáhána pouze přetlaky na vnitřním a vnějším povrchu nebo je tam nezatížena. Obecně uvažujme působící tlak p_1 na vnitřním poloměru r_1 a tlak p_2 na vnějším poloměru r_2, jak je vidět na obr. 2. Potom jsou okrajové podmínky dány vztahy

$$\sigma_r(r_1) = -p_1 \qquad \text{a} \qquad \sigma_r(r_2) = -p_2\,, \tag{9}$$

kde skutečnost, že jde o tlaky, je vyjádřena zápornými znaménky a symboly p_1 a p_2 značí pouze velikost těchto tlaků. S využitím (8) upravíme okrajové podmínky (9) na tvar

$$D_1 - \frac{D_2}{r_1^2} = -p_1 \qquad \text{a} \qquad D_1 - \frac{D_2}{r_2^2} = -p_2\,. \tag{10}$$

Obdrželi jsme tak soustavu dvou lineárních algebraických rovnic pro neznámé D_1 a D_2. Řešením soustavy dostáváme pro hledané konstanty vztahy

$$D_1 = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \qquad \text{a} \qquad D_2 = \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\,. \tag{11}$$

V případě, že vnější, resp. vnitřní, tlak je nulový, získáme ze vztahů (9) a (10), nebo přímo využitím vztahů (11), konstanty

$$D_1 = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{a} \quad D_2 = \frac{p_1 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\,, \qquad \text{resp.} \qquad D_1 = \frac{-p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{a} \quad D_2 = \frac{-p_2 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\,. \tag{12}$$

Při porovnání vztahů (11) a (12) se vztahy (1) a (2) je potom zřejmé, že u uzavřených nádob (se dnem) můžeme přímo psát

$$\sigma_o = D_1\,. \tag{13}$$

Jestliže provádíme analýzu stavu napjatosti nádoby, obvykle nás také zajímá deformace, především změna poloměru $\Delta r(r)$. Jednoduchou úvahou dospějeme k závěru, že $\Delta r \equiv u$. Pro změnu poloměru tedy platí, s přihlédnutím k (5) a (7),

$$\Delta r = r\,\varepsilon_t = \frac{r}{E}\left[\sigma_t - \nu\,(\sigma_r + \sigma_o)\right]\,. \tag{14}$$

V závěru shrnutí je ještě účelné rozlišit pojmy tenkostěnná a tlustostěnná nádoba. Za tenkostěnné považuje takové nádoby, jejichž tloušťka stěny je oproti ostatním charakteristickým rozměrům velmi malá, takže lze uvažovat, že rozložení napětí po tloušťce stěny je rovnoměrné. U uzavřených tlustostěnných nádob navíc vzniká v elementárním hranolku, vyjmutém ze stěny nádoby, trojosý stav napjatosti, na rozdíl od tenkostěnných nádob, kde je dvojosý stav napjatosti. Určení hranice, kdy můžeme nádobu považovat již za tenkostěnnou, závisí na zvolené přípustné chybě ve velikosti napětí, která vznikne při zanedbání tlustostěnnosti. U válcových nádob je v technické praxi běžná hranice:

$$\text{střední poloměr/tloušťka stěny} \geq 5\,.$$

Výpočet potom provádíme dle skořepinové teorie.