

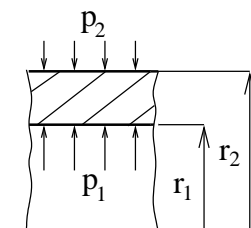
# TLUSTOSTĚNNÉ ROTAČNĚ SYMETRICKÉ VÁLCOVÉ NÁDOBY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

## 1.3 Řešené příklady

### Příklad 1:

Vyšetřete a v měřítku zakreslete napjatost v silnostěnné otevřené válcové nádobě zatížené vnitřním a vnějším přetlakem, viz obr. 1. Na nebezpečném poloměru, z hlediska pevnosti dle HMH a Guestovy hypotézy, proveďte kontrolu bezpečnosti. Dále stanovte velikosti změn poloměrů  $\Delta r(r_1)$ ,  $\Delta r(r_2)$ . Dáno:  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa,  $\nu = 0.3$ ,  $Re = 280$  MPa,  $k = 2$ ,  $p_1 = 90$  MPa,  $p_2 = 72$  MPa,  $r_1 = 100$  mm,  $r_2 = 125$  mm.



Obr. 1

### Řešení:

V prvním kroku nejprve stanovíme integrační konstanty, které se vyskytují ve vztazích pro radiální a obvodové napětí. Okrajové podmínky, které určují integrační konstanty, jsou pro nádobu na obr. 1 dány rovnicemi

$$\sigma_r(r_1) = -p_1 \quad \text{a} \quad \sigma_r(r_2) = -p_2, \quad (1)$$

jež po dosazení obecného řešení přecházejí v soustavu dvou algebraických rovnic

$$D_1 - \frac{D_2}{r_1^2} = -p_1 \quad \text{a} \quad D_1 - \frac{D_2}{r_2^2} = -p_2 \quad (2)$$

pro neznámé  $D_1$  a  $D_2$ . Po vyřešení (2) získáme vztahy pro integrační konstanty ve tvaru

$$D_1 = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{a} \quad D_2 = \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (3)$$

Dosazením numerických hodnot dostáváme

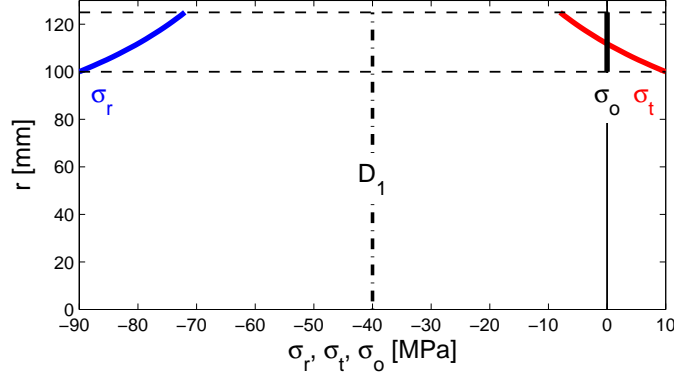
$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{90 \cdot 10^6 \cdot 0.1^2 - 72 \cdot 10^6 \cdot 0.125^2}{0.125^2 - 0.1^2} = -40 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -40 \text{ MPa}, \\ D_2 &= \frac{(90 \cdot 10^6 - 72 \cdot 10^6) 0.1^2 \cdot 0.125^2}{0.125^2 - 0.1^2} = 0.5 \cdot 10^6 \text{ N} = 0.5 \text{ MN}. \end{aligned} \quad (4)$$

S použitím obecných rovnic, definujících průběh radiálního a obvodového napětí v tlustostěnné rotačně symetrické válcové nádobě, a se znalostí  $D_1$  a  $D_2$ , viz (4), lze průběhy napětí popsat funkcemi

$$\sigma_r = -40 \cdot 10^6 - \frac{0.5 \cdot 10^6}{r^2} \quad \text{a} \quad \sigma_t = -40 \cdot 10^6 + \frac{0.5 \cdot 10^6}{r^2} \quad \text{pro} \quad r \in \langle r_1, r_2 \rangle. \quad (5)$$

# TLUSTOSTĚNNÉ ROTAČNĚ SYMETRICKÉ VÁLCOVÉ NÁDOBY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek



Obr. 2

Protože nádobu považujeme v souladu se zadáním za otevřenou, tj. nezátíženou ve směru podélné osy, je osově napětí působící v řezu kolmém na podélnou osu nádoby

$$\sigma_o = 0 \quad \text{pro} \quad r \in \langle r_1, r_2 \rangle . \quad (6)$$

Průběhy všech složek napětí jsou zobrazeny na obr. 2.

Pro hodnoty hlavních napětí (radiálního a obvodového) na vnitřním a vnějším poloměru nádoby pak platí:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r_1) &= D_1 - \frac{D_2}{r_1^2} = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(p_1 - p_2) r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -p_1 = -90 \text{ MPa} , \\ \sigma_r(r_2) &= D_1 - \frac{D_2}{r_2^2} = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(p_1 - p_2) r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = -p_2 = -72 \text{ MPa} , \\ \sigma_t(r_1) &= D_1 + \frac{D_2}{r_1^2} = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(p_1 - p_2) r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = 2D_1 + p_1 = 2(-40) + 90 = 10 \text{ MPa} , \\ \sigma_t(r_2) &= D_1 + \frac{D_2}{r_2^2} = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(p_1 - p_2) r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = 2D_1 + p_2 = 2(-40) + 72 = -8 \text{ MPa} . \end{aligned} \quad (7)$$

Z obr. 2 je evidentní, že nebezpečný stav napjatosti vzniká v nádobě na vnitřním poloměru. Abychom mohli provést kontrolu bezpečnosti, vypočteme nejprve velikosti redukovaného napětí na nebezpečném poloměru podle jednotlivých hypotéz pevnosti. Redukované napětí pro  $r = r_1$  je podle hypotézy

- HMM<sup>1</sup> rovno

$$\begin{aligned} \sigma_{red} &= \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2 + \sigma_o^2 - (\sigma_r \sigma_t + \sigma_t \sigma_o + \sigma_o \sigma_r)} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2 - \sigma_r \sigma_t} = \\ &= \sqrt{(-90)^2 + 10^2 - (-90) \cdot 10} \doteq 95.39 \text{ MPa} , \end{aligned} \quad (8)$$

- Guestovy rovno

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_t - \sigma_r = 10 - (-90) = 100 \text{ MPa} . \quad (9)$$

<sup>1</sup>Hypotéza HMM je v literatuře známá také jako von Misesova hypotéza.

# TLUSTOSTĚNNÉ ROTAČNĚ SYMETRICKÉ VÁLCOVÉ NÁDOBY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Bezpečnost podle hypotézy HMH, resp. Guestovy, vůči mezi kluzu materiálu je potom

$$k = \frac{Re}{\sigma_{red}} = \frac{280}{95.39} \doteq 2.94, \quad \text{resp.} \quad k = \frac{Re}{\sigma_{red}} = \frac{280}{100} = 2.8. \quad (10)$$

S přihlédnutím k vypočteným hodnotám (10) můžeme tedy konstatovat, že předepsaná bezpečnost ze zadání  $k = 2$  je splněna podle obou hypotéz pevnosti.

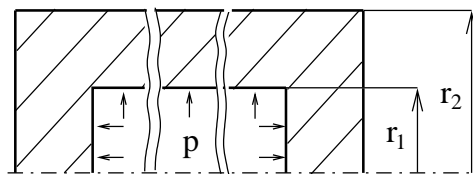
Změny sledovaných poloměrů jsou po dosazení numerických hodnot

$$\begin{aligned} \Delta r(r_1) &= \frac{r_1}{E} [\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_o)] = \frac{r_1}{E} (\sigma_t - \nu\sigma_r) = \\ &= \frac{0.1}{2 \cdot 10^{11}} [10 \cdot 10^6 - 0.3(-90 \cdot 10^6)] = 1.85 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 1.85 \cdot 10^{-2} \text{ mm}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Delta r(r_2) &= \frac{r_2}{E} [\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_o)] = \frac{r_2}{E} (\sigma_t - \nu\sigma_r) = \\ &= \frac{0.125}{2 \cdot 10^{11}} [-8 \cdot 10^6 - 0.3(-72 \cdot 10^6)] = 8.5 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 8.5 \cdot 10^{-3} \text{ mm}. \end{aligned} \quad (12)$$

## Příklad 2:

Je dána uzavřená silnostěnná válcová nádoba namáhaná vnitřním přetlakem  $p$ , jak je patrné z obr. 1. Dimenzujte válcovou část nádoby podle Guestovy hypotézy pevnosti. Vypočtěte velikosti hlavních napětí na vnitřním a vnějším válcovém povrchu a zakreslete v měřítku jejich průběhy, je-li dáno:  $Re = 300 \text{ MPa}$ ,  $k = 1.5$ ,  $p = 50 \text{ MPa}$ ,  $r_1 = 250 \text{ mm}$ .



Obr. 1

## Řešení:

Abychom byli schopni splnit všechny úkoly ze zadání, musíme vypočítat velikost vnějšího poloměru  $r_2$ , resp. tloušťku stěny

$$t = r_2 - r_1 \quad (1)$$

válcové části nádoby. S ohledem na fyzikální podstatu problému zřejmě platí  $r_2 \in (r_1, \infty)$ .

Pro funkce udávající velikosti radiálního, obvodového a osového napětí ve stěně válcové části nádoby můžeme psát

$$\sigma_r(r) = D_1 - \frac{D_2}{r^2}, \quad \sigma_t(r) = D_1 + \frac{D_2}{r^2} \quad \text{a} \quad \sigma_o = D_1. \quad (2)$$

Dále nalezneme obecný tvar integračních konstant, které se vyskytují v těchto vztazích. Okrajové podmínky jsou pro válcovou část nádoby z obr. 1 dány vztahy

$$\sigma_r(r_1) = -p \quad \text{a} \quad \sigma_r(r_2) = 0, \quad (3)$$

# TLUSTOSTĚNNÉ ROTAČNĚ SYMETRICKÉ VÁLCOVÉ NÁDOBY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

jež po dosazení obecného řešení přecházejí v soustavu dvou algebraických rovnic

$$D_1 - \frac{D_2}{r_1^2} = -p \quad \text{a} \quad D_1 - \frac{D_2}{r_2^2} = 0 \quad (4)$$

pro neznámé  $D_1$  a  $D_2$ . Po vyřešení soustavy (4) obdržíme integrační konstanty ve tvaru

$$D_1 = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{a} \quad D_2 = \frac{pr_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (5)$$

S ohledem na jejich tvar lze konstatovat, že obě nabývají kladných hodnot, tj.  $D_1 > 0$  a  $D_2 > 0$ . Potom pro hlavní napětí (2) platí na libovolném poloměru  $r \in \langle r_1, r_2 \rangle$  relace

$$\sigma_t > \sigma_o > \sigma_r. \quad (6)$$

Jestliže chceme nyní zapsat redukované napětí dle Guestovy hypotézy na libovolném poloměru  $r \in \langle r_1, r_2 \rangle$ , potom s přihlédnutím k nerovnostem (6) platí:

$$\sigma_{red}(r) = \sigma_{max}(r) - \sigma_{min}(r) = \sigma_t(r) - \sigma_r(r) = 2\frac{D_2}{r^2}. \quad (7)$$

Při dimenzování nádoby rozhoduje největší z hodnot redukovaného napětí. Pevnostní podmínku pak můžeme zapsat následujícím způsobem:

$$\max_{r \in \langle r_1, r_2 \rangle} \sigma_{red}(r) = \frac{Re}{k}. \quad (8)$$

Vzhledem k (7) a nerovnici  $r_1 < r_2$  je zřejmé, že

$$\max_{r \in \langle r_1, r_2 \rangle} \sigma_{red}(r) = 2\frac{D_2}{r_1^2} = \sigma_{red}(r_1). \quad (9)$$

Pak lze pevnostní podmínku (8) pomocí (9), (5) a (1) přepsat do tvaru

$$2\frac{D_2}{r_1^2} = 2(D_1 + p) = 2\left(\frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + p\right) = 2\left[\frac{pr_1^2}{t(2r_1 + t)} + p\right] = \frac{Re}{k}. \quad (10)$$

Úpravou (10) a poté dosazením číselných hodnot obdržíme kvadratickou rovnici

$$t^2 + 2r_1 t + r_1^2 \left(1 - \frac{Re}{2pk}\right)^{-1} = t^2 + 0.5 \cdot t - 0.0625 = 0, \quad (11)$$

jejíž kořeny jsou:

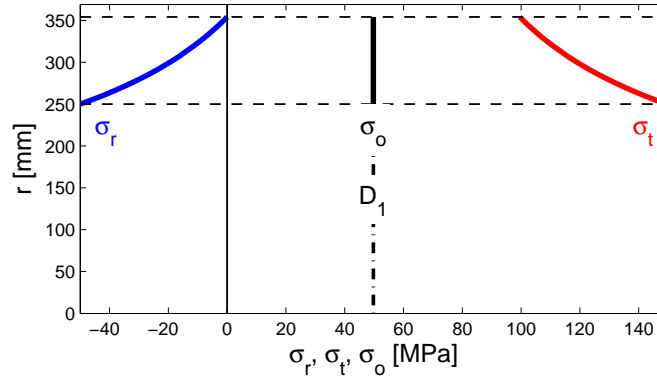
$$t_1 \doteq 0.104 \text{ m} = 104 \text{ mm} \quad \text{a} \quad t_2 \doteq -0.604 \text{ m} = -604 \text{ mm}. \quad (12)$$

Z fyzikálního hlediska má význam pouze první z kořenů, tedy tloušťka stěny válcové části nádoby je  $t = t_1$ , takže pro vnější poloměr nádoby platí

$$r_2 = r_1 + t = 250 + 104 = 354 \text{ mm}. \quad (13)$$

# TLUSTOSTĚNNÉ ROTAČNĚ SYMETRICKÉ VÁLCOVÉ NÁDOBY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek



Obr. 2

Známe-li hodnotu  $r_2$ , můžeme již vyšetřit konkrétní podobu funkcí (2). Dosazením numerických hodnot do (5) dostáváme

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{50 \cdot 10^6 \cdot 0.25^2}{0.354^2 - 0.25^2} \doteq 49.75 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 49.75 \text{ MPa}, \\ D_2 &= \frac{50 \cdot 10^6 \cdot 0.25^2 \cdot 0.354^2}{0.354^2 - 0.25^2} \doteq 6.23 \cdot 10^6 \text{ N} = 6.23 \text{ MN}. \end{aligned} \quad (14)$$

Osové napětí je v celém průřezu kolmém na podélnou osu válcové části nádoby konstantní a dle (2) a (14) je jeho velikost

$$\sigma_o = 49.75 \text{ MPa} \quad \text{pro} \quad r \in \langle r_1, r_2 \rangle. \quad (15)$$

Zbývající hlavní napětí potom popisují funkce

$$\sigma_r = 49.75 \cdot 10^6 - \frac{6.23 \cdot 10^6}{r^2} \quad \text{a} \quad \sigma_t = 49.75 \cdot 10^6 + \frac{6.23 \cdot 10^6}{r^2} \quad \text{pro} \quad r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \quad (16)$$

jejich průběhy jsou spolu se  $\sigma_o$  zobrazeny na obr. 2. Hodnoty radiálního a obvodového napětí na krajních poloměrech nádoby jsou:

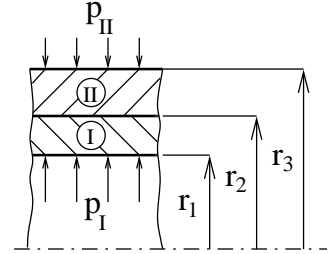
$$\begin{aligned} \sigma_r(r_1) &= D_1 - \frac{D_2}{r_1^2} = -p = -50 \text{ MPa}, \\ \sigma_r(r_2) &= D_1 - \frac{D_2}{r_2^2} = 0, \\ \sigma_t(r_1) &= D_1 + \frac{D_2}{r_1^2} = 2D_1 + p = 2 \cdot 49.75 + 50 = 149.5 \text{ MPa}, \\ \sigma_t(r_2) &= D_1 + \frac{D_2}{r_2^2} = 2D_1 = 2 \cdot 49.75 = 99.5 \text{ MPa}. \end{aligned} \quad (17)$$

# TLUSTOSTĚNNÉ ROTAČNĚ SYMETRICKÉ VÁLCOVÉ NÁDOBY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

## Příklad 3:

Vyšetřete a v měřítku zakreslete napjatost v silnostěnné otevřené dvouplášťové válcové nádobě zatížené vnitřním a vnějším přetlakem, jak je vidět na obr. 1. Na nebezpečném poloměru, z hlediska pevnosti dle Guestovy hypotézy, proveďte výpočet bezpečnosti, je-li dáno:  $Re_I = Re_{II} = Re = 280$  MPa,  $p_I = 90$  MPa,  $p_{II} = 72$  MPa,  $p_n = 10$  MPa,  $r_1 = 100$  mm,  $r_2 = 110$  mm,  $r_3 = 125$  mm.



Obr. 1

## Řešení:

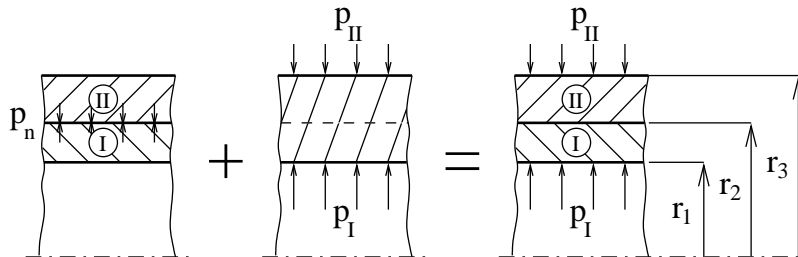
Dvouplášťová nádoba je konstruována tak, že její plášť je složen ze dvou válců na sebe navzájem nalisovaných s přesahem. Tím ve stykové ploše válců vzniká tlakové předpětí, nalisovací tlak  $p_n$ , které vnitřní válec  $I$  stlačuje, zatímco vnější válec  $II$  roztahuje. Teprve poté je dvouplášťová nádoba zatížena tlaky  $p_I$  a  $p_{II}$  na vnitřním a vnějším poloměru. Potom s ohledem na platnost principu superpozice zatížení můžeme celkový stav napjatosti ve složené nádobě vyšetřit jako součet oddělených případů zatížení, což je schématicky vyjádřeno na obr. 2. Řešení tak rozdělíme do tří kroků.

**Krok 1:** Vyšetříme stav napjatosti ve vnitřní a vnější nádobě při působení pouze nalisovacího tlaku  $p_n$ . Nejprve stanovíme integrační konstanty, které se vyskytují ve vztazích pro hlavní napětí. Funkci popisující radiální napětí ve stěně nádoby můžeme zapsat ve tvaru

$$\sigma_{r,n}(r) = \begin{cases} D_1^{1,2} - \frac{D_2^{1,2}}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \\ D_1^{2,3} - \frac{D_2^{2,3}}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_2, r_3 \rangle, \end{cases} \quad (1)$$

a obdobně můžeme psát i pro funkci popisující obvodové napětí

$$\sigma_{t,n}(r) = \begin{cases} D_1^{1,2} + \frac{D_2^{1,2}}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \\ D_1^{2,3} + \frac{D_2^{2,3}}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_2, r_3 \rangle. \end{cases} \quad (2)$$



Obr. 2

# TLUSTOSTĚNNÉ ROTAČNĚ SYMETRICKÉ VÁLCOVÉ NÁDOBY

*Autoři: M. Zajíček, V. Adámek*

Integrační konstanty  $D_1^{1,2}$  a  $D_2^{1,2}$  určíme z okrajových podmínek pro vnitřní nádobu

$$\sigma_{r,n}(r_1) = 0 \quad \text{a} \quad \sigma_{r,n}(r_2) = -p_n, \quad (3)$$

jež po dosazení obecného řešení přecházejí v soustavu dvou algebraických rovnic

$$D_1^{1,2} - \frac{D_2^{1,2}}{r_1^2} = 0 \quad \text{a} \quad D_1^{1,2} - \frac{D_2^{1,2}}{r_2^2} = -p_n \quad (4)$$

pro neznámé  $D_1^{1,2}$  a  $D_2^{1,2}$ . Po vyřešení (4) mají integrační konstanty tvar

$$D_1^{1,2} = \frac{-p_n r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{a} \quad D_2^{1,2} = \frac{-p_n r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (5)$$

Analogicky stanovíme i integrační konstanty  $D_1^{2,3}$  a  $D_2^{2,3}$ . V tomto případě vycházíme z okrajových podmínek

$$\sigma_{r,n}(r_2) = -p_n \quad \text{a} \quad \sigma_{r,n}(r_3) = 0, \quad (6)$$

kteřé platí pro vnější nádobu. Řešením soustavy algebraických rovnic

$$D_1^{2,3} - \frac{D_2^{2,3}}{r_2^2} = -p_n \quad \text{a} \quad D_1^{2,3} - \frac{D_2^{2,3}}{r_3^2} = 0 \quad (7)$$

vyplývajících bezprostředně z (6) a (1) obdržíme hledané integrační konstanty ve tvaru

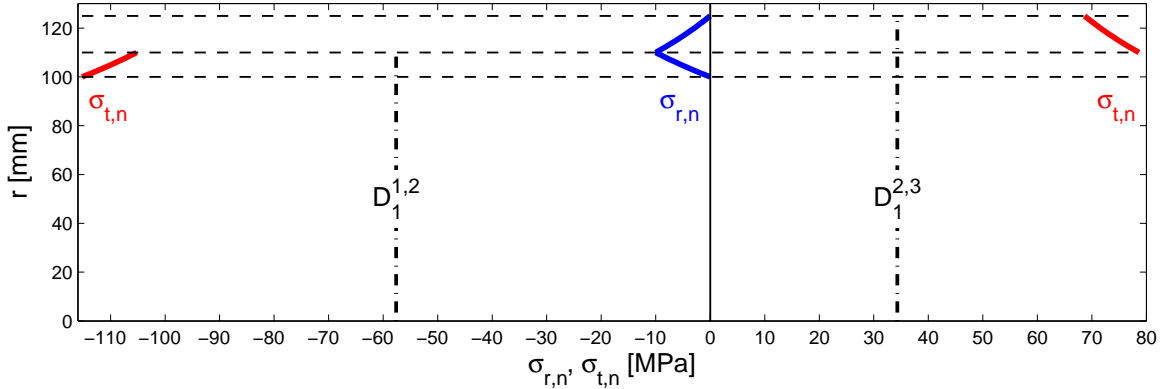
$$D_1^{2,3} = \frac{p_n r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \quad \text{a} \quad D_2^{2,3} = \frac{p_n r_2^2 r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (8)$$

Dosazením numerických hodnot do (5) a (8) postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} D_1^{1,2} &= \frac{-10 \cdot 10^6 \cdot 0.11^2}{0.11^2 - 0.1^2} \doteq -57.62 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -57.62 \text{ MPa}, \\ D_2^{1,2} &= \frac{-10 \cdot 10^6 \cdot 0.1^2 \cdot 0.11^2}{0.11^2 - 0.1^2} \doteq -0.5762 \cdot 10^6 \text{ N} = -0.5762 \text{ MN}, \\ D_1^{2,3} &= \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 0.11^2}{0.125^2 - 0.11^2} \doteq 34.33 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 34.33 \text{ MPa}, \\ D_2^{2,3} &= \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 0.11^2 \cdot 0.125^2}{0.125^2 - 0.11^2} \doteq 0.5363 \cdot 10^6 \text{ N} = 0.5363 \text{ MN}. \end{aligned} \quad (9)$$

# TLUSTOSTĚNNÉ ROTAČNĚ SYMETRICKÉ VÁLCOVÉ NÁDOBY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek



Obr. 3

Hodnoty radiálního a obvodového napětí na poloměrech  $r_1$  až  $r_3$  potom jsou<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r,n}(r_1) &= D_1^{1,2} - \frac{D_2^{1,2}}{r_1^2} = 0, \\
 \sigma_{r,n}(r_2) &= D_1^{1,2} - \frac{D_2^{1,2}}{r_2^2} = D_1^{2,3} - \frac{D_2^{2,3}}{r_2^2} = -p_n = -10 \text{ MPa}, \\
 \sigma_{r,n}(r_3) &= D_1^{2,3} - \frac{D_2^{2,3}}{r_3^2} = 0, \\
 \sigma_{t,n}(r_1) &= D_1^{1,2} + \frac{D_2^{1,2}}{r_1^2} = 2 D_1^{1,2} = 2(-57.62) = -115.24 \text{ MPa}, \\
 \sigma_{t,n}(r_2 - 0) &= D_1^{1,2} + \frac{D_2^{1,2}}{r_2^2} = 2 D_1^{1,2} + p_n = 2(-57.62) + 10 = -105.24 \text{ MPa}, \\
 \sigma_{t,n}(r_2 + 0) &= D_1^{2,3} + \frac{D_2^{2,3}}{r_2^2} = 2 D_1^{2,3} + p_n = 2 \cdot 34.33 + 10 = 78.66 \text{ MPa}, \\
 \sigma_{t,n}(r_3) &= D_1^{2,3} + \frac{D_2^{2,3}}{r_3^2} = 2 D_1^{2,3} = 2 \cdot 34.33 = 68.66 \text{ MPa}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Z vypočtených hodnot napětí (10) je patrné, že zatímco funkce popisující průběh radiálního napětí je na celém intervalu  $\langle r_1, r_3 \rangle$  spojitá, po dosažení numerických hodnot z (9) do (1) má tvar

$$\sigma_{r,n}(r) = \begin{cases} -57.62 \cdot 10^6 + \frac{0.5762 \cdot 10^6}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \\ 34.33 \cdot 10^6 - \frac{0.5363 \cdot 10^6}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_2, r_3 \rangle, \end{cases} \tag{11}$$

<sup>2</sup>Zápis  $f(a+0)$ , resp.  $f(a-0)$ , vyjadřuje limitu funkce  $f(x)$  v bodě  $a$  zprava, resp. zleva, nebo-li  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ , resp.  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ .



# TLUSTOSTĚNNÉ ROTAČNĚ SYMETRICKÉ VÁLCOVÉ NÁDOBY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

funkce popisující průběh obvodového napětí má v bodě  $r_2$  nespojitost prvního druhu

$$\sigma_{t,n}(r) = \begin{cases} -57.62 \cdot 10^6 - \frac{0.5762 \cdot 10^6}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \\ 34.33 \cdot 10^6 + \frac{0.5363 \cdot 10^6}{r^2} & \text{pro } r \in (r_2, r_3). \end{cases} \quad (12)$$

Skok  $\sigma_{t,n}(r_2 + 0) - \sigma_{t,n}(r_2 - 0)$  funkce  $\sigma_{t,n}(r)$  v bodě  $r_2$  je patrný i na obr. 3, kde jsou zobrazeny průběhy obou hlavních napětí.

**Krok 2:** Vyšetříme stav napjatosti ve složené nádobě jako celku při zatížení na vnitřním poloměru  $r_1$  tlakem  $p_I$  a na vnějším poloměru  $r_3$  tlakem  $p_{II}$ . Nejprve stanovíme opět integrační konstanty, které se vyskytují ve vztazích

$$\sigma_{r,p}(r) = D_1^{1,3} - \frac{D_2^{1,3}}{r^2} \quad \text{a} \quad \sigma_{t,p}(r) = D_1^{1,3} + \frac{D_2^{1,3}}{r^2} \quad \text{pro } r \in \langle r_1, r_3 \rangle, \quad (13)$$

pro radiální a obvodové napětí. Jejich tvar určíme z okrajových podmínek

$$\sigma_{r,p}(r_1) = -p_I \quad \text{a} \quad \sigma_{r,p}(r_3) = -p_{II}. \quad (14)$$

Po dosazení obecného řešení přecházejí v soustavu dvou algebraických rovnic

$$D_1^{1,3} - \frac{D_2^{1,3}}{r_1^2} = -p_I \quad \text{a} \quad D_1^{1,3} - \frac{D_2^{1,3}}{r_3^2} = -p_{II}. \quad (15)$$

Jejich řešením pak obdržíme integrační konstanty

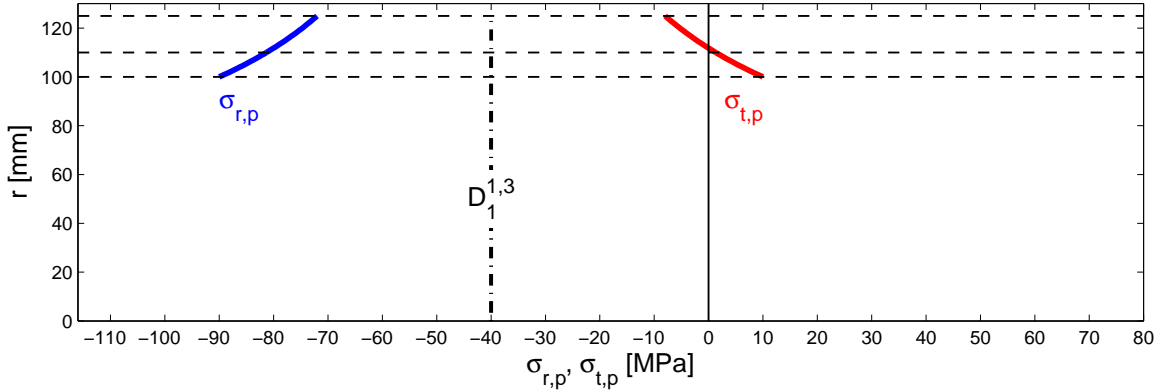
$$\begin{aligned} D_1^{1,3} &= \frac{p_I r_1^2 - p_{II} r_3^2}{r_3^2 - r_1^2} = \frac{90 \cdot 10^6 \cdot 0.1^2 - 72 \cdot 10^6 \cdot 0.125^2}{0.125^2 - 0.1^2} = -40 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -40 \text{ MPa}, \\ D_2^{1,3} &= \frac{(p_I - p_{II}) r_1^2 r_3^2}{r_3^2 - r_1^2} = \frac{(90 \cdot 10^6 - 72 \cdot 10^6) 0.1^2 \cdot 0.125^2}{0.125^2 - 0.1^2} = 0.5 \cdot 10^6 \text{ N} = 0.5 \text{ MN}. \end{aligned} \quad (16)$$

Radiální a obvodové napětí potom nabývají na poloměrech  $r_1$ ,  $r_2$  a  $r_3$  následujících hodnot:

$$\begin{aligned} \sigma_{r,p}(r_1) &= D_1^{1,3} - \frac{D_2^{1,3}}{r_1^2} = -p_I = -90 \text{ MPa}, \\ \sigma_{r,p}(r_2) &= D_1^{1,3} - \frac{D_2^{1,3}}{r_2^2} = -40 \cdot 10^6 - \frac{0.5 \cdot 10^6}{0.11^2} = -81.32 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -81.32 \text{ MPa}, \\ \sigma_{r,p}(r_3) &= D_1^{1,3} - \frac{D_2^{1,3}}{r_3^2} = -p_{II} = -72 \text{ MPa}, \\ \sigma_{t,p}(r_1) &= D_1^{1,3} + \frac{D_2^{1,3}}{r_1^2} = -40 \cdot 10^6 + \frac{0.5 \cdot 10^6}{0.1^2} = 10 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 10 \text{ MPa}, \\ \sigma_{t,p}(r_2) &= D_1^{1,3} + \frac{D_2^{1,3}}{r_2^2} = -40 \cdot 10^6 + \frac{0.5 \cdot 10^6}{0.11^2} \doteq 1.32 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 1.32 \text{ MPa}, \\ \sigma_{t,p}(r_3) &= D_1^{1,3} + \frac{D_2^{1,3}}{r_3^2} = -40 \cdot 10^6 + \frac{0.5 \cdot 10^6}{0.125^2} = -8 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -8 \text{ MPa}. \end{aligned} \quad (17)$$

# TLUSTOSTĚNNÉ ROTAČNĚ SYMETRICKÉ VÁLCOVÉ NÁDOBY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek



Obr. 4

Průběhy napětí, které jsou zobrazeny na obr. 4, jsou s přihlédnutím k (13) a (16) popsány funkcemi

$$\sigma_{r,p} = -40 \cdot 10^6 - \frac{0.5 \cdot 10^6}{r^2} \quad \text{a} \quad \sigma_{t,p} = -40 \cdot 10^6 + \frac{0.5 \cdot 10^6}{r^2} \quad \text{pro} \quad r \in \langle r_1, r_3 \rangle. \quad (18)$$

**Krok 3:** Vyšetříme průběh výsledných napětí ve dvouplášťové nádobě, přičemž využijeme zákona superpozice napětí. Pro výsledná napětí můžeme psát

$$\sigma_r(r) = \sigma_{r,n} + \sigma_{r,p} = \begin{cases} D_1^{1,2} + D_1^{1,3} - \frac{D_2^{1,2} + D_2^{1,3}}{r^2} = D_1^I - \frac{D_2^I}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \\ D_1^{2,3} + D_1^{1,3} - \frac{D_2^{2,3} + D_2^{1,3}}{r^2} = D_1^{II} - \frac{D_2^{II}}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_2, r_3 \rangle, \end{cases} \quad (19)$$

$$\sigma_t(r) = \sigma_{t,n} + \sigma_{t,p} = \begin{cases} D_1^{1,2} + D_1^{1,3} + \frac{D_2^{1,2} + D_2^{1,3}}{r^2} = D_1^I + \frac{D_2^I}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \\ D_1^{2,3} + D_1^{1,3} + \frac{D_2^{2,3} + D_2^{1,3}}{r^2} = D_1^{II} + \frac{D_2^{II}}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_2, r_3 \rangle, \end{cases} \quad (20)$$

kde celkové integrační konstanty jsou rovny

$$D_1^I = D_1^{1,2} + D_1^{1,3} = -57.62 - 40 = -97.62 \text{ MPa}, \quad (21)$$

$$D_2^I = D_2^{1,2} + D_2^{1,3} = -0.5762 + 0.5 = -0.0762 \text{ MN}, \quad (22)$$

$$D_1^{II} = D_1^{2,3} + D_1^{1,3} = 34.33 - 40 = -5.77 \text{ MPa}, \quad (23)$$

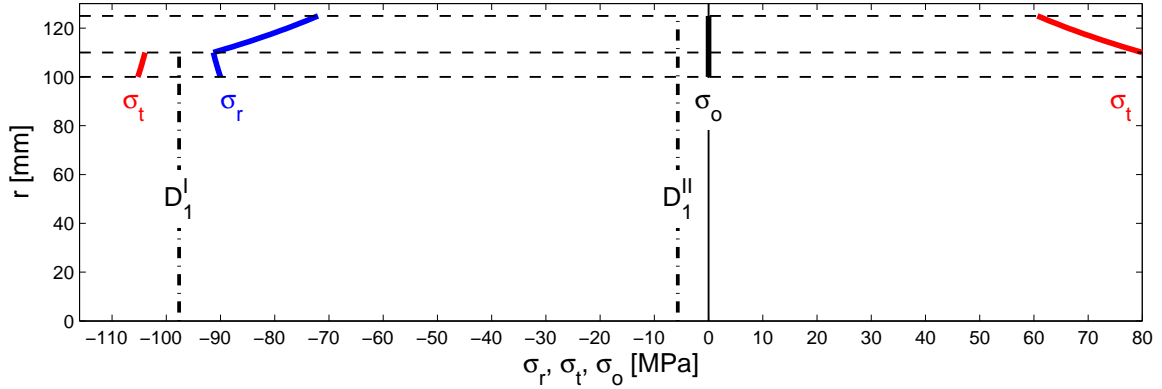
$$D_2^{II} = D_2^{2,3} + D_2^{1,3} = 0.5363 + 0.5 = 1.0363 \text{ MN}, \quad (24)$$

viz (9) a (16). Funkce obvodového napětí má v bodě  $r_2$  také nespojitost prvního druhu. Doposud jsme se nezmiňovali o osovém napětí. To je ovšem, s ohledem na to, že jsme v obou dosavadních krocích uvažovali otevřené nádoby, rovno nule. Tedy i pro výsledné osově napětí platí:

$$\sigma_o = 0 \quad \text{pro} \quad r \in \langle r_1, r_3 \rangle. \quad (25)$$

# TLUSTOSTĚNNÉ ROTAČNĚ SYMETRICKÉ VÁLCOVÉ NÁDOBY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek



Obr. 5

Výsledné průběhy radiálního a obvodového napětí zobrazené na obr. 5 jsou potom podle vztahů (19) až (24) dány funkcemi

$$\sigma_r(r) = \begin{cases} -97.62 \cdot 10^6 + \frac{76.2 \cdot 10^3}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \\ -5.77 \cdot 10^6 - \frac{1.0363 \cdot 10^6}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_2, r_3 \rangle, \end{cases} \quad (26)$$

$$\sigma_t(r) = \begin{cases} -97.62 \cdot 10^6 - \frac{76.2 \cdot 10^3}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \\ -5.77 \cdot 10^6 + \frac{1.0363 \cdot 10^6}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_2, r_3 \rangle. \end{cases} \quad (27)$$

Velikosti radiálního a obvodového napětí na poloměrech  $r_1$ ,  $r_2$  a  $r_3$  lze pak vypočítat buď s pomocí vztahů (26) a (27), nebo s pomocí již dříve vypočtených hodnot na těchto poloměrech. Využijeme-li tedy např. vztahů (10) a (17), můžeme potom pro jednotlivá napětí na poloměrech  $r_1$ ,  $r_2$  a  $r_3$  psát

$$\begin{aligned} \sigma_r(r_1) &= \sigma_{r,n}(r_1) + \sigma_{r,p}(r_1) = 0 - 90 = -90 \text{ MPa}, \\ \sigma_r(r_2) &= \sigma_{r,n}(r_2) + \sigma_{r,p}(r_2) = -10 - 81.32 = -91.32 \text{ MPa}, \\ \sigma_r(r_3) &= \sigma_{r,n}(r_3) + \sigma_{r,p}(r_3) = 0 - 72 = -72 \text{ MPa}, \\ \sigma_t(r_1) &= \sigma_{t,n}(r_1) + \sigma_{t,p}(r_1) = -115.24 + 10 = -105.24 \text{ MPa}, \\ \sigma_t(r_2 - 0) &= \sigma_{t,n}(r_2 - 0) + \sigma_{t,p}(r_2) = -105.24 + 1.32 = -103.92 \text{ MPa}, \\ \sigma_t(r_2 + 0) &= \sigma_{t,n}(r_2 + 0) + \sigma_{t,p}(r_2) = 78.66 + 1.32 = 79.98 \text{ MPa}, \\ \sigma_t(r_3) &= \sigma_{t,n}(r_3) + \sigma_{t,p}(r_3) = 68.66 - 8 = 60.66 \text{ MPa}. \end{aligned} \quad (28)$$

Z obr. 5 je patrné, že nebezpečný stav napjatosti vzniká ve dvouplášťové nádobě na vnitřním poloměru vnějšího válce. Redukované napětí podle Guestovy hypotézy pevnosti je tedy rovno

$$\sigma_{red} = \sigma_t(r_2 + 0) - \sigma_r(r_2) = 79.98 - (-91.32) = 171.3 \text{ MPa} \quad (29)$$

# TLUSTOSTĚNNÉ ROTAČNĚ SYMETRICKÉ VÁLCOVÉ NÁDOBY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

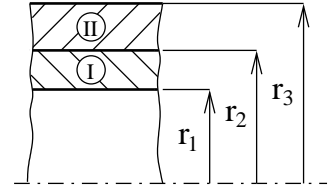
a odtud je bezpečnost vůči mezi kluzu materiálu

$$k = \frac{Re}{\sigma_{red}} = \frac{280}{171.3} \doteq 1.63. \quad (30)$$

*Poznámka:* Provedeme-li porovnání dosažené bezpečnosti s bezpečností vypočtenou v příkladu 1 pro jednovrstevnou nádobu, zjistíme, že stav napjatosti ve dvouvrstevné nádobě je méně výhodný. Vhodnou konstrukcí dvouvrstevné nádoby, tj. vhodným návrhem poloměru  $r_2$  a nalisovacího tlaku  $p_n$ , lze docílit i optimálního využití materiálových vlastností obou částí a dosáhnout tak maximální možné bezpečnosti nádoby.

## Příklad 4:

Pro dvouvrstevnou otevřenou nádobu navrhnete potřebný přesah poloměrů  $\Delta r_2$  tak, aby v nádobě bez vnějšího zatížení, viz obr. 1, působil na stykové ploše měrný tlak  $p_n = 10$  MPa. Dále vypočtete měrnou nalisovací sílu při znalosti součinitele tření  $f_t = 0.2$  ve stykové ploše, je-li dáno:  $E_I = 2.1 \cdot 10^5$  MPa,  $E_{II} = 1.8 \cdot 10^5$  MPa,  $\nu_I = 0.3$ ,  $\nu_{II} = 0.29$ ,  $r_1 = 100$  mm,  $r_2 = 110$  mm,  $r_3 = 125$  mm.

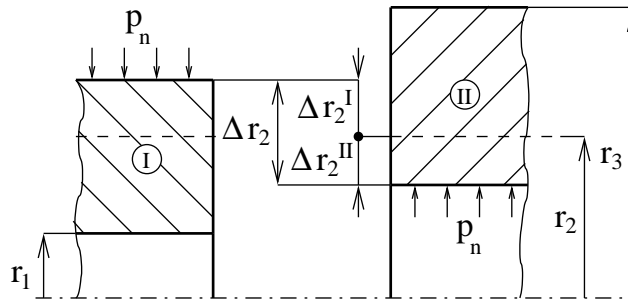


Obr. 1

## Řešení:

Aby mohl ve stykové ploše obou válcových nádob vzniknout tlak  $p_n$ , musí být vnitřní nádoba I vyrobena s vnějším poloměrem  $r_2 - \Delta r_2^I$ , neboť dochází ke stlačení vnějšího poloměru nádoby a tedy  $\Delta r_2^I < 0$ . Vnější nádoba II pak s vnitřním poloměrem  $r_2 - \Delta r_2^II$ , jak je vidět na obr. 2. Protože kladný přírůstek změny poloměru  $\Delta r(r)$  byl obecně definován ve směru přírůstku poloměru  $r$ , je přesah obou nádob dán rozdílem vnějšího poloměru vnitřní a vnitřního poloměru vnější nádoby, tj.

$$\Delta r_2 = -\Delta r_2^I + \Delta r_2^II = |\Delta r_2^I| + \Delta r_2^II. \quad (1)$$



Obr. 2

## TLUSTOSTĚNNÉ ROTAČNĚ SYMETRICKÉ VÁLCOVÉ NÁDOBY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Velikosti změn jednotlivých poloměrů válcových nádob jsou s ohledem na předpoklad malých deformací velmi malé při porovnání s příslušnými poloměry, což můžeme formálně zapsat na obecném poloměru jako  $r \gg \Delta r$ . Dopustíme se tak zanedbatelné chyby, jestliže výpočty změn poloměrů  $\Delta r_2^I$  a  $\Delta r_2^{II}$  budeme vztahovat k výpočtu nádob při jejich vzájemném spojení. Budeme tak pracovat s hodnotami poloměrů  $r_1$ ,  $r_2$  a  $r_3$ , přestože  $r_2$  není původním rozměrem nádob.

Napjatost ve dvouplášťové válcové nádobě může být popsána pomocí radiálního a obvodového napětí vztahy<sup>3</sup>

$$\sigma_r(r) = \begin{cases} D_1^I - \frac{D_2^I}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \\ D_1^{II} - \frac{D_2^{II}}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_2, r_3 \rangle, \end{cases} \quad \sigma_t(r) = \begin{cases} D_1^I + \frac{D_2^I}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \\ D_1^{II} + \frac{D_2^{II}}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_2, r_3 \rangle, \end{cases} \quad (2)$$

kde jsou jednotlivé integrační konstanty rovny

$$D_1^I = \frac{-p_n r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad D_2^I = \frac{-p_n r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad D_1^{II} = \frac{p_n r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \quad \text{a} \quad D_2^{II} = \frac{p_n r_2^2 r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (3)$$

Protože dvouplášťová nádoba je uvažována jako otevřená, je osové napětí

$$\sigma_o = 0 \quad \text{pro } r \in \langle r_1, r_3 \rangle \quad (4)$$

a v dalších výpočtech nemá žádný význam.

Pro změny poloměrů  $\Delta r_2^I$  a  $\Delta r_2^{II}$  můžeme s přihlédnutím ke vztahům (2) až (4) psát

$$\Delta r_2^I = \frac{r_2}{E_I} (\sigma_t(r_2 - 0) - \nu_I \sigma_r(r_2)) = \frac{r_2}{E_I} \left( D_1^I + \frac{D_2^I}{r_2^2} + \nu_I p_n \right) = -\frac{p_n r_2}{E_I} \left( \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \nu_I \right), \quad (5)$$

$$\Delta r_2^{II} = \frac{r_2}{E_{II}} (\sigma_t(r_2 + 0) - \nu_{II} \sigma_r(r_2)) = \frac{r_2}{E_{II}} \left( D_1^{II} + \frac{D_2^{II}}{r_2^2} + \nu_{II} p_n \right) = \frac{p_n r_2}{E_{II}} \left( \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \nu_{II} \right). \quad (6)$$

Změny poloměrů jsou po dosažení numerických hodnot

$$\Delta r_2^I = -\frac{10 \cdot 10^6 \cdot 0.11}{2.1 \cdot 10^{11}} \left( \frac{0.11^2 + 0.1^2}{0.11^2 - 0.1^2} - 0.3 \right) \doteq -5.355 \cdot 10^{-5} \text{ m} = -5.355 \cdot 10^{-2} \text{ mm}, \quad (7)$$

$$\Delta r_2^{II} = \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 0.11}{1.8 \cdot 10^{11}} \left( \frac{0.125^2 + 0.11^2}{0.125^2 - 0.11^2} + 0.29 \right) \doteq 4.984 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 4.984 \cdot 10^{-2} \text{ mm} \quad (8)$$

a potřebný přesah poloměrů  $\Delta r_2$ , viz (1), má velikost

$$\Delta r_2 = |\Delta r_2^I| + \Delta r_2^{II} = 5.355 \cdot 10^{-2} + 4.984 \cdot 10^{-2} = 1.0339 \cdot 10^{-1} \text{ mm}. \quad (9)$$

Celkový přesah poloměrů můžeme vyjádřit také přímo s pomocí parametrů zadání. Postačí dosadit do (1) z (5) a (6). Po úpravě obdržíme obecně platný vztah

$$\Delta r_2 = p_n r_2 \left[ \frac{1}{E_I} \left( \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \nu_I \right) + \frac{1}{E_{II}} \left( \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \nu_{II} \right) \right]. \quad (10)$$

<sup>3</sup>Napjatost byla detailně analyzována v příkladu 3.

# TLUSTOSTĚNNÉ ROTAČNĚ SYMETRICKÉ VÁLCOVÉ NÁDOBY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Při určení měrné nalisovací síly  $F_l$  postupujeme takto: stavíme měrnou sílu svěrnou, která působí na jednotku délky nalisovaného spoje, a násobíme ji součinitelem tření. Tím získáme měrnou sílu třecí, která musí být měrnou nalisovací silou překonána. Tento postup může být zapsán následujícím způsobem:

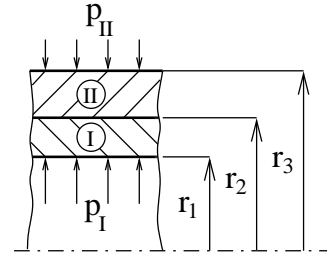
$$F_l > 2\pi r_2 p_n f_t = 2\pi \cdot 0.11 \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 0.2 = 440000\pi \text{ Nm}^{-1}. \quad (11)$$

Nalisovací síla je potom dána součinem měrné síly  $F_l$  a celkové délky nalisovaného spoje.

## Příklad 5:

Navrhněte silnostěnnou otevřenou dvouplášťovou válcovou nádobu zatíženou vnitřním a vnějším přetlakem (obr. 1) tak, aby bezpečnost v nádobě byla maximální. Návrh proveďte z hlediska Guestovy hypotézy pevnosti. Vyšetřete a v měřítku zakreslete odpovídající stav napjatosti, je-li dáno:

$Re_I = Re_{II} = Re = 280 \text{ MPa}$ ,  $p_I = 90 \text{ MPa}$ ,  $p_{II} = 72 \text{ MPa}$ ,  
 $r_1 = 100 \text{ mm}$ ,  $r_3 = 125 \text{ mm}$ .



Obr. 1

## Řešení:

Radiální a obvodové napětí může být ve dvouplášťové válcové nádobě popsáno pomocí vztahů<sup>4</sup>

$$\sigma_r(r) = \begin{cases} D_1^I - \frac{D_2^I}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \\ D_1^{II} - \frac{D_2^{II}}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_2, r_3 \rangle, \end{cases} \quad \sigma_t(r) = \begin{cases} D_1^I + \frac{D_2^I}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \\ D_1^{II} + \frac{D_2^{II}}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_2, r_3 \rangle, \end{cases} \quad (1)$$

kde jsou jednotlivé integrační konstanty rovny

$$D_1^I = \frac{p_I r_1^2 - p_{II} r_3^2}{r_3^2 - r_1^2} - \frac{p_n r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad D_2^I = \frac{(p_I - p_{II}) r_1^2 r_3^2}{r_3^2 - r_1^2} - \frac{p_n r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (2)$$

$$D_1^{II} = \frac{p_I r_1^2 - p_{II} r_3^2}{r_3^2 - r_1^2} + \frac{p_n r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}, \quad D_2^{II} = \frac{(p_I - p_{II}) r_1^2 r_3^2}{r_3^2 - r_1^2} + \frac{p_n r_2^2 r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (3)$$

Protože dvouplášťová nádoba je uvažována jako otevřená, je osové napětí

$$\sigma_o = 0 \quad \text{pro } r \in \langle r_1, r_3 \rangle. \quad (4)$$

Definujme nyní tlak  $p_s$  jako záporně vzatou hodnotu radiálního napětí na poloměru  $r_2$ . Pro tento tlak pak můžeme psát

$$p_s = -\sigma_r(r_2) = \frac{1}{r_3^2 - r_1^2} \left[ \frac{r_1^2 r_3^2}{r_2^2} (p_I - p_{II}) + p_{II} r_3^2 - p_I r_1^2 \right] + p_n. \quad (5)$$

<sup>4</sup>Napjatost byla detailně analyzována v příkladu 3.

# TLUSTOSTĚNNÉ ROTAČNĚ SYMETRICKÉ VÁLCOVÉ NÁDOBY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

S jeho pomocí lze přepsat integrační konstanty (2) a (3) do nového formálního tvaru

$$D_1^I = \frac{p_I r_1^2 - p_s r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad D_2^I = \frac{(p_I - p_s) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (6)$$

$$D_1^{II} = \frac{p_s r_2^2 - p_{II} r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}, \quad D_2^{II} = \frac{(p_s - p_{II}) r_2^2 r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (7)$$

Má-li být ve dvouplášťové nádobě maximální bezpečnost, budeme požadovat, aby v obou částech nádoby byla tato bezpečnost stejná. Tím budou maximálně využity vlastnosti obou jeho částí-kroužků. Maximální hodnoty redukovaného napětí jsou dosaženy na vnitřních poloměrech jednotlivých částí. Podle Guestovy hypotézy pevnosti nelze na poloměru  $r_1$  dosáhnout menší hodnoty redukovaného napětí, než

$$\sigma_{red}(r_1) = \sigma_{max}(r_1) - \sigma_{min}(r_1) = \sigma_o - \sigma_r(r_1) = p_I. \quad (8)$$

Je to způsobeno tím, že obě hodnoty napětí  $\sigma_o = 0$  a  $\sigma_r = -p_I$  jsou předepsány již v zadání úlohy. Maximální bezpečnost tak dosahuje velikosti

$$k = \frac{Re}{p_I} = \frac{280}{90} = 3.\bar{1}. \quad (9)$$

Naším úkolem je tedy nalézt velikost poloměru  $r_2$  a nalisovacího tlaku  $p_n > 0$  tak, abychom požadavek na maximální bezpečnost  $k$  splnili v obou částech nádoby. Pokud má platit vztah (8), musí být splněno

$$\sigma_t(r_1) \leq 0 \quad \wedge \quad \sigma_t(r_1) \geq \sigma_r(r_1). \quad (10)$$

Protože tlak  $p_s > p_{II}$  ( $p_n > 0$ ), plyne ze (7), že konstanta  $D_2^{II} > 0$  a tudíž  $\sigma_t(r_2+0) > \sigma_r(r_2)$ . Potom má pevnostní podmínka na vnitřním poloměru vnějšího kroužku tvar

$$\frac{Re}{k} = \begin{cases} \sigma_t(r_2+0) - \sigma_r(r_2) & \text{pro } \sigma_t(r_2+0) \geq 0, \\ \sigma_o - \sigma_r(r_2) & \text{pro } \sigma_t(r_2+0) \leq 0. \end{cases} \quad (11)$$

V dalším tedy analyzujeme dva stavy napjatosti.

**Stav 1:** Stanovme velikost poloměru  $r_2 \in (r_1, r_3)$  a tlaku  $p_n > 0$ , jestliže mají být splněny podmínky (10) a  $\sigma_t(r_2+0) \geq 0$ . Sloučením vztahů (9) a (11) obdržíme závislost

$$\sigma_t(r_2+0) - \sigma_r(r_2) = p_I. \quad (12)$$

Po dosazení z (1) a (3) do (12) a po provedení patřičných úprav můžeme psát

$$p_n = \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_1^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_3} \right)^2 \right] p_I - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 (p_I - p_{II}) \right\}. \quad (13)$$

# TLUSTOSTĚNNÉ ROTAČNĚ SYMETRICKÉ VÁLCOVÉ NÁDOBY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Dále po dosazení do podmínek (10) a  $\sigma_t(r_2+0) \geq 0$  ze vztahů (1), (3) a (13) a po provedení příslušných úprav obdržíme soustavu (konjunkci) tří nerovnic

$$\frac{(r_1^2 r_3^2 + r_2^4) p_I}{2 r_2^2 r_3^2} - p_{II} \leq 0 \quad \wedge \quad \left(1 + \frac{r_2^2}{r_3^2}\right) \frac{p_I}{2} - p_{II} \geq 0 \quad \wedge \quad (r_3^2 - r_2^2) \left(\frac{p_{II}}{r_3^2 + r_2^2} - \frac{p_I}{2 r_3^2}\right) \leq 0. \quad (14)$$

Vztahy (14)<sub>1</sub> a (14)<sub>2</sub> byly nalezeny za předpokladu  $r_2 \neq \pm r_1$ . Obdobně byl odvozen i vztah (14)<sub>3</sub> za předpokladu  $r_2 \neq \pm r_3$ .

Dosadíme-li nyní numerické hodnoty do (14)<sub>1</sub>, za předpokladu  $r_2 \neq 0$ , můžeme psát

$$45000000 (r_2 + 0.1118034)^2 (r_2 - 0.1118034)^2 \leq 0. \quad (15)$$

Je zřejmé, že tato nerovnice je splněna (včetně podmínek  $r_2 \neq \pm r_1$  a  $r_2 \neq 0$ ) pouze pro hodnoty

$$I_{11} = \{-0.1118034, 0.1118034\} \text{ m}. \quad (16)$$

Pro druhou z nerovnic (14)<sub>2</sub> po dosazení numerických hodnot dostáváme

$$r_2^2 - 9.375 \cdot 10^{-3} \geq 0. \quad (17)$$

Řešíme-li ji např. metodou intervalů<sup>5</sup>, snadno zjistíme, že nerovnice je splněna pro

$$I_{12} \doteq (-\infty, -0.096825) \cup \langle 0.096825, \infty \rangle - \{\pm 0.1\} \text{ m}. \quad (18)$$

Třetí nerovnici (14)<sub>3</sub> upravíme po dosazení numerických hodnot do tvaru

$$20480 r_2^4 - 512 r_2^2 + 3 \doteq 20480 (r_2^2 - 9.375 \cdot 10^{-3})(r_2^2 - 1.5625 \cdot 10^{-2}) \leq 0. \quad (19)$$

Pomocí metody intervalů zjistíme, že nerovnice platí pro

$$I_{13} \doteq (-0.125, -0.096825) \cup \langle 0.096825, 0.125 \rangle \text{ m}. \quad (20)$$

Množinou všech řešení je potom vzájemný průnik intervalů (16), (18) a (20) a intervalu  $(r_1, r_3)$ , tj.

$$r_2 \in I_1 = I_{11} \cap I_{12} \cap I_{13} \cap (0.1, 0.125) = \{0.1118034\} \text{ m}. \quad (21)$$

Patříčný nalisovací tlak vypočítáme dosazením do (13). Dostáváme

$$p_n = \frac{0.125^2 - 0.1118034^2}{0.125^2 - 0.1^2} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{0.1}{0.125} \right)^2 \right] \frac{90}{2} - \left( \frac{0.1}{0.1118034} \right)^2 (90 - 72) \right\} \doteq 1 \text{ MPa}. \quad (22)$$

Hodnota nalisovacího tlaku je větší než nula, čímž je splněna podmínka, že v místě nalisování musí skutečně vznikat tlak.

<sup>5</sup>Metoda intervalů je známá také jako metoda nulových bodů. Bližší informace o této metodě viz např. J. Polák, Přehled středoškolské matematiky, SPN, Praha, 1991.



## TLUSTOSTĚNNÉ ROTAČNĚ SYMETRICKÉ VÁLCOVÉ NÁDOBY

*Autoři: M. Zajíček, V. Adámek*

**Stav 2:** Stanovme velikost poloměru  $r_2 \in (r_1, r_3)$  a tlaku  $p_n > 0$ , jestliže mají být splněny podmínky (10) a  $\sigma_t(r_2 + 0) \leq 0$ . Sloučením vztahů (9) a (11) obdržíme závislost

$$p_s = p_I. \quad (23)$$

Po dosazení (5) do (23) a úpravě lze pro nalisovací tlak psát

$$p_n = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 (p_I - p_{II}). \quad (24)$$

Následným dosazením do podmínek (10) a  $\sigma_t(r_2 + 0) \leq 0$  z (1), (3) a (24) obdržíme po provedení potřebných úprav soustavu (konjunkci) tří nerovnic

$$\frac{(r_2^2 - r_1^2) p_I}{2 r_2^2} \geq 0 \quad \wedge \quad p_I \leq p_{II} \quad \wedge \quad p_I - \frac{2 p_{II} r_3^2}{r_3^2 + r_2^2} \leq 0. \quad (25)$$

Vztahy (25)<sub>1</sub> a (25)<sub>2</sub> byly nalezeny za předpokladu  $r_2 \neq \pm r_1$ . Obdobně byl odvozen i vztah (25)<sub>3</sub> za předpokladu  $r_2 \neq \pm r_3$ .

Dosadíme-li nyní numerické hodnoty do (25)<sub>1</sub>, za předpokladu  $r_2 \neq 0$ , můžeme psát

$$r_2^2 - 0.01 \geq 0. \quad (26)$$

Je zřejmé, že tato nerovnice je spolu s podmínkou  $r_2 \neq \pm r_1$  splněna pro interval

$$I_{21} = (-\infty, -0.1) \cup (0.1, \infty) \text{ m}. \quad (27)$$

Druhá z nerovnic (25)<sub>2</sub> má samozřejmě význam pouze pro  $p_I = p_{II}$ . Tato podmínka v podstatě vyjadřuje fakt, že pro  $p_I = p_s$  je konstanta  $D_2^I = 0$  a tudíž  $\sigma_r(r) = \sigma_t(r) = -p_I$  pro  $r \in \langle r_1, r_2 \rangle$ , viz (6) a (1). Interval platnosti potom můžeme zapsat jako

$$I_{22} = (-\infty, +\infty) - \{\pm 0.1\} \text{ m}. \quad (28)$$

Třetí nerovnici (25)<sub>3</sub> upravíme po dosazení numerických hodnot do tvaru

$$r_2^2 - 9.375 \cdot 10^{-3} \leq 0. \quad (29)$$

Pomocí metody intervalů zjistíme, že nerovnice platí pro interval

$$I_{23} \doteq \langle -0.096825, 0.096825 \rangle \text{ m}. \quad (30)$$

Množinou všech řešení je potom vzájemný průnik intervalů (27), (28) a (30) s intervalem  $(r_1, r_3)$ , tj.

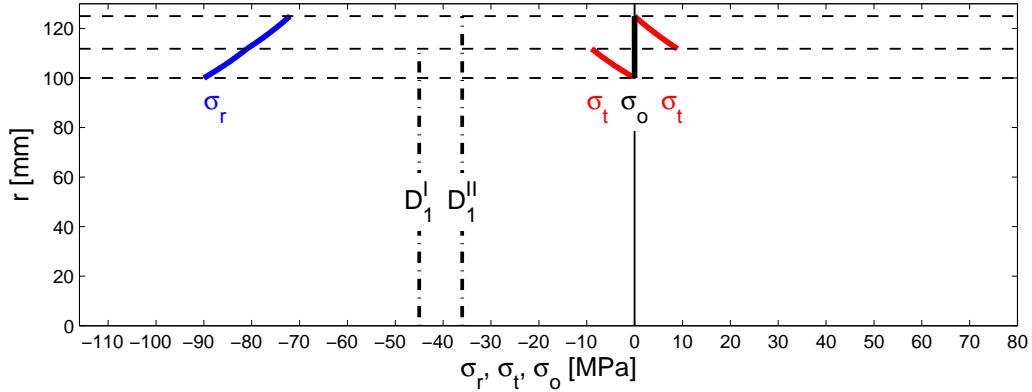
$$r_2 \in I_2 = I_{21} \cap I_{22} \cap I_{23} \cap (0.1, 0.125) = \emptyset, \quad (31)$$

což je prázdná množina. Pro stav 2 tedy nebylo nalezeno žádné řešení.

Přesto, že úloha byla vyšetřována intervalově, bylo zjištěno, že existuje jediné řešení pro  $r_2 \doteq 0.1118 \text{ m}$  a  $p_n = 1 \text{ MPa}$ , viz (21) a (22). V závěru příkladu tedy ještě vyšetřeme odpovídající stav napjatosti pro tyto hodnoty a zakresleme jej. Nejprve dosadíme numerické

# TLUSTOSTĚNNÉ ROTAČNĚ SYMETRICKÉ VÁLCOVÉ NÁDOBY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek



Obr. 2

hodnoty do vztahů (2) a (3). Dostáváme

$$\begin{aligned}
 D_1^I &= \frac{90 \cdot 0.1^2 - 72 \cdot 0.125^2}{0.125^2 - 0.1^2} - \frac{1 \cdot 0.1118^2}{0.1118^2 - 0.1^2} \doteq -44.99 \text{ MPa}, \\
 D_2^I &= \frac{(90 - 72) 0.1^2 \cdot 0.125^2}{0.125^2 - 0.1^2} - \frac{1 \cdot 0.1^2 \cdot 0.1118^2}{0.1118^2 - 0.1^2} \doteq 0.4501 \text{ MN}, \\
 D_1^{II} &= \frac{90 \cdot 0.1^2 - 72 \cdot 0.125^2}{0.125^2 - 0.1^2} + \frac{1 \cdot 0.1118^2}{0.125^2 - 0.1118^2} \doteq -36.01 \text{ MPa}, \\
 D_2^{II} &= \frac{(90 - 72) 0.1^2 \cdot 0.125^2}{0.125^2 - 0.1^2} + \frac{1 \cdot 0.1118^2 \cdot 0.125^2}{0.125^2 - 0.1118^2} \doteq 0.5623 \text{ MN}. \quad (32)
 \end{aligned}$$

Výsledné průběhy radiálního a obvodového napětí zobrazené na obr. 2 jsou potom podle vztahů (32) a (1) dány funkcemi

$$\sigma_r(r) = \begin{cases} -44.99 \cdot 10^6 - \frac{450.1 \cdot 10^3}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \\ -36.01 \cdot 10^6 - \frac{562.3 \cdot 10^3}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_2, r_3 \rangle, \end{cases} \quad (33)$$

$$\sigma_t(r) = \begin{cases} -44.99 \cdot 10^6 + \frac{450.1 \cdot 10^3}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \\ -36.01 \cdot 10^6 + \frac{562.3 \cdot 10^3}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_2, r_3 \rangle. \end{cases} \quad (34)$$

Pro velikosti radiálního a obvodového napětí na poloměrech  $r_1$ ,  $r_2$  a  $r_3$  pak můžeme psát

$$\begin{aligned}
 \sigma_r(r_1) &= -44.99 \cdot 10^6 - \frac{450.1 \cdot 10^3}{0.1^2} = -90 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -90 \text{ MPa}, \\
 \sigma_r(r_2) &= -44.99 \cdot 10^6 - \frac{450.1 \cdot 10^3}{0.1118^2} \doteq -81 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -81 \text{ MPa}, \\
 \sigma_r(r_3) &= -36.01 \cdot 10^6 - \frac{562.3 \cdot 10^3}{0.125^2} \doteq -72 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -72 \text{ MPa}, \quad (35)
 \end{aligned}$$

## TLUSTOSTĚNNÉ ROTAČNĚ SYMETRICKÉ VÁLCOVÉ NÁDOBY

*Autoři: M. Zajíček, V. Adámek*

$$\begin{aligned}
 \sigma_t(r_1) &= -44.99 \cdot 10^6 + \frac{450.1 \cdot 10^3}{0.1^2} \doteq 0.02 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 0.02 \text{ MPa}, \\
 \sigma_t(r_2 - 0) &= -44.99 \cdot 10^6 + \frac{450.1 \cdot 10^3}{0.1118^2} \doteq -8.98 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -8.98 \text{ MPa}, \\
 \sigma_t(r_2 + 0) &= -36.01 \cdot 10^6 + \frac{562.3 \cdot 10^3}{0.1118^2} \doteq 8.98 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 8.98 \text{ MPa}, \\
 \sigma_t(r_3) &= -36.01 \cdot 10^6 + \frac{562.3 \cdot 10^3}{0.125^2} \doteq -0.02 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -0.02 \text{ MPa}. \quad (36)
 \end{aligned}$$

*Poznámky:* Nepatrné rozdíly ve vypočtených hodnotách obvodového napětí oproti očekávaným ( $\sigma_t(r_1) = 0$ ,  $\sigma_t(r_2 + 0) = 9 \text{ MPa}$ ) jsou způsobeny dřívějším zaokrouhlením hodnot  $r_2$  a  $p_n$ . Dále doporučujeme čtenáři, aby konfrontoval získané výsledky s výsledky z příkladů 1 a 2. Odtud je patrné, že relativně malou změnou některých parametrů lze významně ovlivnit stav napjatosti ve dvouplášťové nádobě.