PLNOSTĚNNÉ ROTUJÍCÍ KOTOUČE

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

2.1 Shrnutí základních poznatků

S plnostěnnými rotujícími kotouči se setkáváme hlavně u parních a spalovacích turbín a turbokompresorů. Matematický model rotujících kotoučů můžeme s úspěchem využít např. i při návrhu některých setrvačníků.

Při odvození teorie plnostěnných rotujících kotoučů respektujeme základní předpoklady, se kterými se setkáváme i u řady jiných technických problémů:

- Materiál kotouče je lineárně elastický (zatěžování probíhá v oblasti platnosti Hookeova zákona), homogenní a isotropní.
- Poměrné deformace, které mohou vznikat v kotouči, jsou malé, tj. $\varepsilon \ll 1$.
- Respektujeme Saint-Venantův princip, při kterém se lokální charakter zatížení projevuje jen v jeho blízkém okolí.
- Podmínky rovnováhy sil sestavujeme na nepřetvořeném tělese kotouče.
- Vliv vlastní tíhy tělesa na stav napjatosti a deformace neuvažujeme (zanedbáváme).

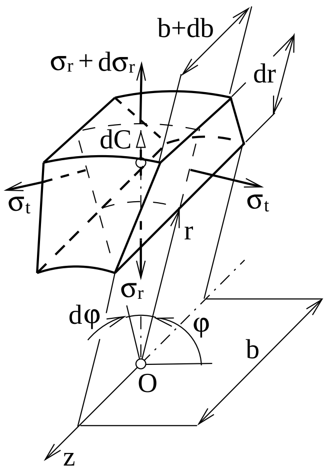
Stav napjatosti a deformace v obecném bodě kotouče je účelné vyšetřovat ve válcových souřadnicích r, φ, z, jejichž orientace je patrná z obr. 1. S ohledem na tvar kotouče není stav napjatosti obecně snadno řešitelný, a proto učiňme další zjednodušující předpoklady:

- Kotouč je vzhledem ke svému průměru tenký a symetrický vůči rovině $r - z$. Tloušťka kotouče b je obecně proměnná, přičemž je známa funkční závislost $b = b(r)$. Potom můžeme uvažovat napětí v radiálním směru na libovolné válcové ploše souosé s kotoučem za nezávislé na tloušťce, což v důsledku znamená, že σ_r není funkcí z.
- Kotouč rotuje kolem osy rotace z konstantní úhlovou rychlostí $\omega\,[\mathrm{rad\,s^{-1}}]$, kterou lze vyjádřit pomocí počtu otáček kotouče $n\,[\mathrm{min^{-1}}]$ vztahem

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \text{konst.} \tag{1}$$

Do výpočtu tedy nezahrnujeme dobu rozběhu a doběhu kotouče, popř. změnu otáček za provozu. Při splnění uvedených předpokladů zůstávají válcové a osové řezy kotouče i za deformace vzájemně kolmé, nedochází mezi nimi ke zkosu a v konečném důsledku jsou sdružená smyková napětí v těchto řezech nulová. Na válcových řezech mohou i tak působit smyková napětí rovnoběžná s osou rotace. Proto se ještě činí následující předpoklad:

- Smyková napětí na válcových řezech působící ve směru osy rotace zanedbáváme, tj. u tenkých kotoučů jsou velikosti těchto smykových napětí zanedbatelná v porovnání s nenulovými normálovými napětími. Válcové a osové řezy tak považujeme za hlavní roviny napětí.



Obr. 1: Napjatost v elementárním hranolku.

Vzhledem k výše uvedenému je zkoumaná úloha rotačně symetrická vzhledem k ose rotace (napětí nejsou funkcí φ).

Při vyšetřování stavu napjatosti kotouče vycházíme z vyjmutého elementárního prvku nádoby za dodržení principu metody řezů. Vedeme 4 myšlené řezy: 2 souosé válcové řezy o poloměrech r a $r + \mathrm{d}r$ a 2 soumezné řezy určené souřadnicemi φ a $\varphi + \mathrm{d}\varphi$, které obsahují osu rotace kotouče, viz obr. 1. Protože je kotouč považován za tenký, nejsou pro vymezení elementárního prvku nutné řezy kolmé na osu rotace z. Na 4 stěny (řezy) takto vzniklého elementárního hranolku připojíme účinky vnitřních sil ze zbývající části kotouče. Přitom využijeme těchto skutečností:

- Stěny hranolku mají nekonečně malou plochu, a tak napětí, na ně působící, lze uvažovat jako rovnoměrně rozložená.
- S ohledem na rotaci kotouče při konstantních otáčkách působí na hranolek v radiálním směru elementární odstředivá síla $\mathrm{d}C$, jejíž velikost určíme jako

$$\mathrm{d}C = \omega^2 r \mathrm{d}m = \varrho\omega^2 r \mathrm{d}V = \varrho\omega^2 r^2 b\, \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi\,, \tag{2}$$

  kde ϱ je měrná hmotnost (hustota) materiálu kotouče a kde $\mathrm{d}m$, resp. $\mathrm{d}V$, reprezentuje hmotnost, resp. objem, elementárního hranolku z obr. 1.
- V elementárním hranolku je tedy dvojosý stav napjatosti určený hlavními napětími σ_r – radiální a σ_t – obvodové [1]. Protože smysly napětí nejsou předem známy, uvažují se obě a priori jako tahová (obr. 1), přičemž jejich skutečné směry obdržíme při řešení konkrétní úlohy.

S ohledem na dříve uvedené skutečnosti můžeme uvést, že rovněž obvodové napětí považujeme funkčně závislé pouze na poloměru r, tj. $\sigma_t = \sigma_t(r)$.

Základní rovnice

Abychom dokázali určit úlpný stav napjatosti v plnostěnném rotujícím kotouči, sestavíme pro elementární prvek (obr. 1):

- jednu podmínku rovnováhy v radiálním směru

$$\sigma_r - \sigma_t + r\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r} + \frac{r}{b}\sigma_r\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}r} + \varrho\omega^2 r^2 = 0\,, \tag{3}$$

[1]Napětí σ_t se také často značí dle příslušné souřadnice, tj. σ_φ.

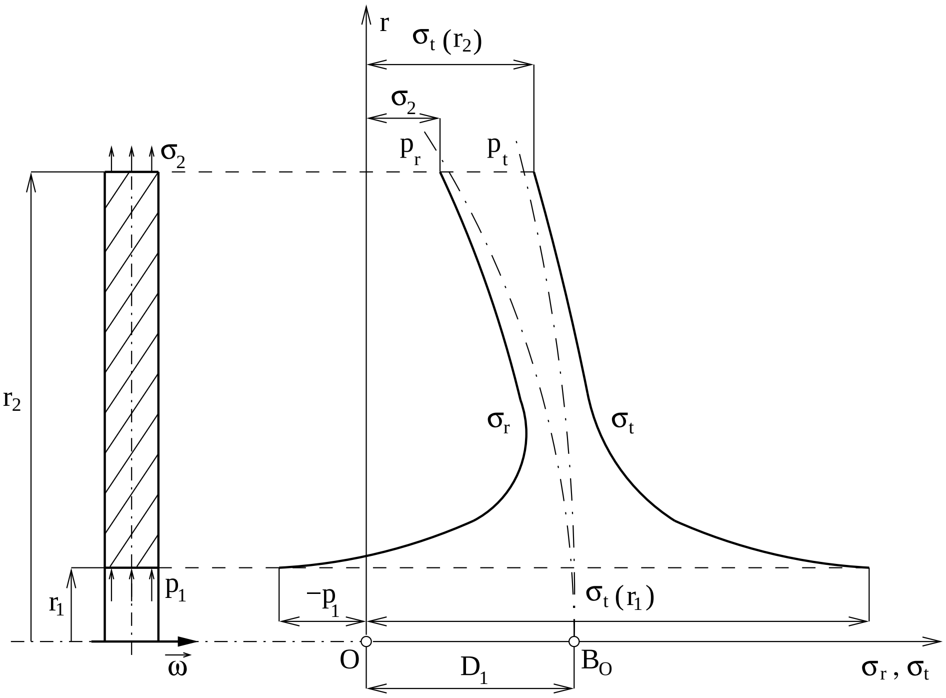
- dvě geometricko-deformační rovnice vyjadřující závislost mezi poměrnými deformacemi (prodlouženími) v radiálním a obvodovém směru a posuvem $u = u(r)$ v radiálním směru[2]
$$\varepsilon_r = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} \qquad \text{a} \qquad \varepsilon_t = \frac{(r+u)\mathrm{d}\varphi - r\mathrm{d}\varphi}{r\mathrm{d}\varphi} = \frac{u}{r}\,, \tag{4}$$
- jednu rovnici spojitosti deformací, tzv. rovnici kompatibility,
$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_t}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r}\left(\varepsilon_r - \varepsilon_t\right)\,, \tag{5}$$
- užitím obecného Hookeova zákona dvě fyzikální rovnice pro poměrné deformace v radiálním a obvodovém směru
$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \nu\sigma_t\right) \qquad \text{a} \qquad \varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \nu\sigma_r\right)\,, \tag{6}$$
kde E je Youngův modul pružnosti a ν je Poissonovo číslo.

Základní soustavu šesti rovnic (3) až (6) je možné v zásadě řešit dvěma způsoby. Při hledání neznámých funkcí použijeme buď deformační variantu řešení, kde jsou neznámými posuvy, nebo silovou variantu řešení, kde jsou neznámými napětí. Řešitelnost soustavy do značné míry určuje funkce $b(r)$. Proto se řešení analytickým přístupem obvykle zjednodušuje na případy, u nichž je řešení soustavy poměrně snadné. Řešení zjednodušených případů rotujícího kotouče pak může sloužit za základ přibližných metod, umožňujících poměrně snadno řešit i obecnější úlohy. S výhodou při tom můžeme využívat zákona superpozice zatížení.

Obecné řešení rotujícího kotouče konstantní tloušťky

Při hledání dvojosého stavu napjatosti v kotouči konstantní tloušťky zůstávají vztahy (4) až (6) bez změny. Podmínka rovnováhy (3) se s přihlédnutím k $b \neq b(r)$ zjednoduší na tvar
$$\sigma_r - \sigma_t + r\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r} + \varrho\omega^2 r^2 = 0\,. \tag{7}$$
Soustavě rovnic (4) až (7) potom vyhovují dvě obecná řešení[3]
$$\sigma_r = D_1 \pm \frac{D_2}{r^2} - (3+\nu)D_\omega r^2 \qquad \text{a} \qquad \sigma_t = D_1 \mp \frac{D_2}{r^2} - (1+3\nu)D_\omega r^2 \tag{8}$$
určující rozložení hlavních napětí σ_r a σ_t ve stěně kotouče, kde D_1 a D_2 jsou integrační konstanty. Konstantu D_ω můžeme psát ve tvaru
$$D_\omega = \frac{\varrho\omega^2}{8}\,. \tag{9}$$
Ze vztahů (8) je zřejmé, že první člen v obou rovnicích vyjadřuje pouze posunutí výsledných křivek, druhé členy určují hyperboly 2. stupně a třetí členy určují dvě paraboly. Definujme

[2] Funkce u je proměnné pouze r, což plyne obdobně jako u složek napětí z uvedených předpokladů.
[3] V dalším budeme pracovat s řešením: $\sigma_r = D_1 - D_2 r^{-2} - (3+\nu)D_\omega r^2$ a $\sigma_t = D_1 + D_2 x^{-2} - (1+3\nu)D_\omega r^2$



Obr. 2: Rozložení napětí σ_r a σ_t ve stěně rotujícího kotouče konstantní tloušťky.

nyní dvě pomocné parabolické funkce

$$p_r = D_1 - (3+\nu)D_\omega r^2 \qquad \text{a} \qquad p_t = D_1 - (1+3\nu)D_\omega r^2$$

se společným vrcholem v bodě B_O o souřadnicích $[0, D_1]$, které vznikly ze vztahů (8) pro σ_r a σ_t anulováním druhých (hyperbolických) členů, viz obr. 2. Je evidentní, že tvar obou parabol nezávisí na integračních konstantách D_1 a D_2 a tudíž nezávisí ani na okrajových podmínkách. Porovnáme-li nyní charakter křivek σ_r a p_r, resp. σ_t a p_t, lze konstatovat, že σ_r, resp. σ_t, se asymptoticky blíží k p_r, resp. p_t, jak je zřejmé z obr. 2. Z obrázku je dále patrný rostoucí vliv hyperbolických členů s klesající velikostí poloměru r. Z analýzy dále vyplývá, že v případě zastavení kotouče, tj. pro $\omega = 0$, mají vztahy pro napětí σ_r a σ_t formálně stejný tvar jako u úlohy rotačně symetrické tlustostěnné válcové nádoby.

Úloha s okrajovými podmínkami pro kotouč konstantní tloušťky

Pomocí obecného řešení (8) a okrajových podmínek[4] stanovíme konkrétní tvar integračních konstant D_1 a D_2. Z hlediska technické praxe uvažujme typický případ namáhání kotouče (obr. 2) odstředivou silou částí na něj připevněných (např. turbínových lopatek) a tlakem v nalisování, je-li kotouč s přesahem nalisován na hřídel. Příslušné okrajové podmínky lze potom formulovat takto:

$$\sigma_r(r_1) = -p_1 \qquad \text{a} \qquad \sigma_r(r_2) = \sigma_2\,, \tag{10}$$

kde skutečnost, že jde na poloměru r_1 o tlak, je vyjádřena záporným znaménkem a symbol

[4] Jedná se o statické okrajové podmínky, protože na hranici předepisujeme statické podmíky rovnováhy.

p_1 pak značí pouze velikost tohoto tlaku. S využitím (8) upravíme okrajové podmínky (10) na soustavu dvou lineárních algebraických rovnic

$$D_1 - \frac{D_2}{r_1^2} - (3+\nu)D_\omega r_1^2 = -p_1 \qquad \text{a} \qquad D_1 - \frac{D_2}{r_2^2} - (3+\nu)D_\omega r_2^2 = \sigma_2 \tag{11}$$

pro neznámé D_1 a D_2. Po vyřešení soustavy obdržíme

$$D_1 = (3+\nu)D_\omega\left(r_1^2 + r_2^2\right) + \frac{p_1 r_1^2 + \sigma_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{a} \quad D_2 = (3+\nu)D_\omega r_1^2 r_2^2 + \frac{(p_1+\sigma_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\,. \tag{12}$$

Vzhledem k platnosti principu superpozice zatížení lze ukázat, že první členy ve vztazích (12) odpovídají řešení rotujícího kotouče s nezatíženými okraji, zatímco druhé členy řešení nerotujícího kotouče s okrajovými podmínkami (10).

Deformace rotujícího kotouče

Považujme stav napjatosti v kotouči, obecně proměnné tloušťky, za známý. Změnu poloměru $\Delta r(r)$ kotouče vypočteme stejně jako radiální posuv $u(r)$, tj. $\Delta r \equiv u$. Pro změnu poloměru obecného kruhového vlákna tedy platí, s přihlédnutím k (4) a (6),

$$\Delta r = r\,\varepsilon_t = \frac{r}{E}\left(\sigma_t - \nu\sigma_r\right)\,. \tag{13}$$

Pro výpočet změny šířky kotouče $\Delta b(r)$ využijeme platnosti vztahu $\varepsilon_z = \mathrm{d}(\Delta z)/\mathrm{d}z$. Využitím Hookeova zákona lze pro celkovou změnu tloušťky kotouče Δb psát

$$\Delta b = \int_{-b/2}^{b/2} \varepsilon_z \mathrm{d}z = \frac{1}{E}\left[-\nu\left(\sigma_r + \sigma_t\right)\right]\int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}z = -\frac{\nu b}{E}\left(\sigma_r + \sigma_t\right)\,. \tag{14}$$

Z uvedeného odvození je patrné, že Δb není na celém kotouči konstantní, neboť $\sigma_r = \sigma_r(r)$ a $\sigma_t = \sigma_t(r)$. Vzhledem k charakteru napětí je příčné zúžení kotouče blíže ose rotace větší. V osových řezech kotouče tedy skutečně dochází ke zkosení a vzniku smykového napětí, které ovšem zanedbáváme, jak bylo uvedeno v předpokladech.

V závěru shrnutí upozorněme na možnost vzniku přídavného namáhání kotouče od nerovnoměrně rozložené teploty podél poloměru kotouče. S tímto problémem se obvykle setkáváme u spalovacích turbín, na jejichž obvodu jsou teploty vysoké a kotouče jsou proto chlazeny. Ve výpočtech se pro zjednodušení uvažuje teplota $T\,[\mathrm{K}]$ jako funkce obecného poloměru, tedy $T = T(r)$. Vliv teploty se v soustavě základních rovnic projeví rozšířením rovnic (6) o člen, který představuje deformaci vlivem změny teploty. Tuto deformace udává teplotní rozdíl $\Delta T = T - T_0$, kde T_0 je známá počáteční teplota, a součinitel tepelné roztažnosti materiálu kotouče $\alpha_T\,[\mathrm{K}^{-1}]$. Fyzikální rovnice potom nabývají tvaru

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \nu\sigma_t\right) + \alpha_T \Delta T \quad \text{a} \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \nu\sigma_r\right) + \alpha_T \Delta T\,. \tag{15}$$

Ještě upozorněme na fakt, že za vysokých teplot je nutno také přihlížet k možným změnám mechanických vlastností materiálu, popř. ke vzniku dlouhodobého procesu tečení (creep) materiálu za vysokých teplot.