

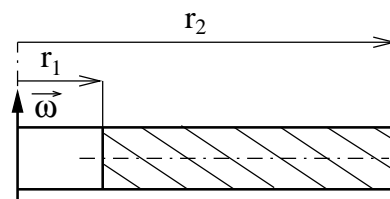
PLNOSTĚNNÉ ROTUJÍCÍ KOTOUČE

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

2.3 Řešené příklady

Příklad 1:

Vyšetřete a v měřítku zakreslete napjatost ve volně rotujícím kotouči konstantní tloušťky 25 mm, který je na obr. 1. Na nebezpečném poloměru proveďte výpočet bezpečnosti z hlediska Guestovy hypotézy pevnosti. Dále stanovte velikosti změn poloměrů $\Delta r(r_1)$, $\Delta r(r_2)$ a změn šířky $\Delta b(r_1)$, $\Delta b(r_2)$ kotouče, je-li dáno: $\rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$, $E = 2.2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$, $Re = 280 \text{ MPa}$, $n = 3000 \text{ min}^{-1}$, $r_1 = 15 \text{ mm}$, $r_2 = 450 \text{ mm}$.



Obr. 1

Řešení:

V prvním kroku stanovíme nejprve integrační konstanty, které se vyskytují ve vztazích pro radiální a obvodové napětí. Jejich hodnoty určíme pomocí okrajových podmínek, které jsou pro kotouč na obr. 1 dány rovnicemi

$$\sigma_r(r_1) = 0 \quad \text{a} \quad \sigma_r(r_2) = 0. \quad (1)$$

Po dosazení obecného řešení přecházíme v soustavu dvou algebraických rovnic

$$D_1 - \frac{D_2}{r_1^2} - (3 + \nu)D_\omega r_1^2 = 0 \quad \text{a} \quad D_1 - \frac{D_2}{r_2^2} - (3 + \nu)D_\omega r_2^2 = 0 \quad (2)$$

pro neznámé D_1 a D_2 . Po vyřešení (2) jsou integrační konstanty dány ve tvaru

$$D_1 = (3 + \nu)D_\omega (r_1^2 + r_2^2) \quad \text{a} \quad D_2 = (3 + \nu)D_\omega r_1^2 r_2^2. \quad (3)$$

Dosazením numerických hodnot nejprve vypočteme

$$D_\omega = \frac{\rho \omega^2}{8} = \frac{\pi^2 \rho n^2}{2} = \frac{\pi^2 \cdot 7.8 \cdot 10^3 \cdot 3000^2}{60^2} \doteq 96.2286 \cdot 10^6 \text{ Pa m}^{-2} \quad (4)$$

a posléze dosazením do (3) určíme i číselné hodnoty integračních konstant

$$D_1 = (3 + 0.3) 96.2286 \cdot 10^6 (0.015^2 + 0.45^2) \doteq 64.3762 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \quad (5)$$

$$D_2 = (3 + 0.3) 96.2286 \cdot 10^6 \cdot 0.015^2 \cdot 0.45^2 \doteq 14468.6 \text{ N}. \quad (6)$$

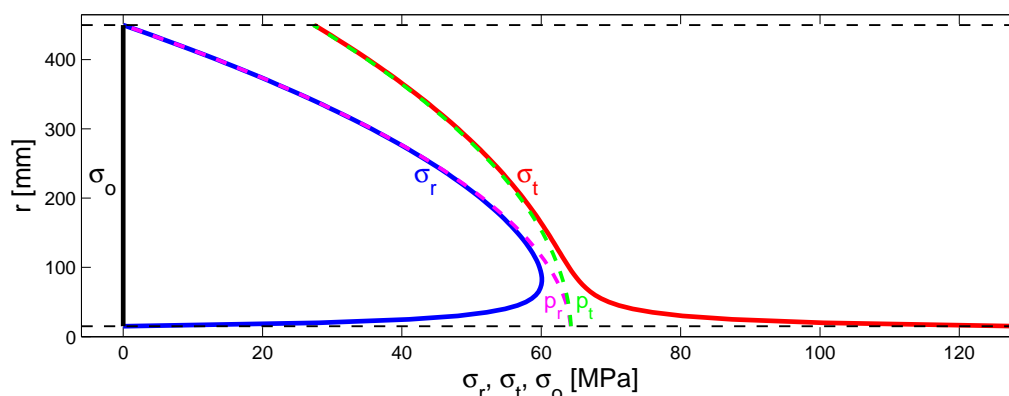
Funkce popisující průběh radiálního a obvodového napětí potom mají tvar

$$\sigma_r(r) = D_1 - \frac{D_2}{r^2} - (3 + \nu)D_\omega r^2 = 64.3762 \cdot 10^6 - \frac{14468.6}{r^2} - 317.555 \cdot 10^6 r^2, \quad (7)$$

$$\sigma_t(r) = D_1 + \frac{D_2}{r^2} - (1 + 3\nu)D_\omega r^2 = 64.3762 \cdot 10^6 + \frac{14468.6}{r^2} - 182.834 \cdot 10^6 r^2. \quad (8)$$

PLNOSTĚNNÉ ROTUJÍCÍ KOTOUČE

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek



Obr. 2

Grafy těchto funkcí jsou pro $r \in \langle r_1, r_2 \rangle$ na obr. 2, kde je zobrazeno také osově napětí, které je v celém kotouči nulové, tj.

$$\sigma_o = 0 \quad \text{pro} \quad r \in \langle r_1, r_2 \rangle . \quad (9)$$

Dále vypočteme velikosti radiálního a obvodového napětí na krajních poloměrech r_1 a r_2 . Vzhledem k tomu, že vztahy (7) a (8) jsou zatíženy chybou danou zaokrouhlováním, je vhodné vztahy pro napětí na poloměrech r_1 a r_2 upravit nejprve symbolicky a teprve poté vyčíslit. Dosazením (3) do obecného tvaru (7) pro radiální napětí na vnitřním a vnějším poloměru kotouče vycházejí v obou případech napětí nulová, což je plně v souladu s okrajovými podmínkami (1). Dále po provedení algebraických úprav, viz vztahy (3) a (8), a dosazení numerických hodnot dostáváme pro obvodová napětí

$$\begin{aligned} \sigma_t(r_1) &= D_1 + \frac{D_2}{r_1^2} - (1 + 3\nu)D_\omega r_1^2 = 2D_\omega [(1 - \nu)r_1^2 + (3 + \nu)r_2^2] = \\ &= 2 \cdot 96.2286 \cdot 10^6 [(1 - 0.3)0.015^2 + (3 + 0.3)0.45^2] \doteq 128.64 \cdot 10^6 \text{ Pa} , \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_t(r_2) &= D_1 + \frac{D_2}{r_2^2} - (1 + 3\nu)D_\omega r_2^2 = 2D_\omega [(3 + \nu)r_1^2 + (1 - \nu)r_2^2] = \\ &= 2 \cdot 96.2286 \cdot 10^6 [(3 + 0.3)0.015^2 + (1 - 0.3)0.45^2] \doteq 27.42 \cdot 10^6 \text{ Pa} . \end{aligned} \quad (11)$$

Z obr. 2 je evidentní, že nebezpečný stav napjatosti vzniká v kotouči na vnitřním poloměru. Dříve, než vypočteme bezpečnost, stanovme velikost redukovaného napětí na nebezpečném poloměru dle Guestovy hypotézy pevnosti. Redukované napětí pro $r = r_1$ je potom rovno

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_t - \sigma_r = \sigma_t - \sigma_o = 128.64 - 0 = 128.64 \text{ MPa} . \quad (12)$$

Vzhledem k tomu, že $\sigma_r = \sigma_o = 0$, jedná se v tomto případě fakticky o jednoosý stav napjatosti. Bezpečnost vůči mezi kluzu materiálu je potom

$$k = \frac{Re}{\sigma_{red}} = \frac{280}{128.64} \doteq 2.18 . \quad (13)$$

PLNOSTĚNNÉ ROTUJÍCÍ KOTOUČE

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Změny sledovaných poloměrů jsou po dosazení numerických hodnot

$$\Delta r(r_1) = \frac{r_1}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_r) = \frac{r_1 \sigma_t}{E} = \frac{0.015 \cdot 128.64 \cdot 10^6}{2.2 \cdot 10^{11}} \doteq 8.77 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 8.77 \cdot 10^{-3} \text{ mm}, \quad (14)$$

$$\Delta r(r_2) = \frac{r_2}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_r) = \frac{r_2 \sigma_t}{E} = \frac{0.45 \cdot 27.42 \cdot 10^6}{2.2 \cdot 10^{11}} \doteq 5.61 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 5.61 \cdot 10^{-2} \text{ mm}. \quad (15)$$

Obdobně vypočítáme změny šířky kotouče na sledovaných poloměrech pomocí vztahů

$$\Delta b(r_1) = -\frac{\nu b}{E} (\sigma_t + \sigma_r) = -\frac{\nu b \sigma_t}{E} = -\frac{0.3 \cdot 0.025 \cdot 128.64 \cdot 10^6}{2.2 \cdot 10^{11}} \doteq -4.39 \cdot 10^{-6} \text{ m}, \quad (16)$$

$$\Delta b(r_2) = -\frac{\nu b}{E} (\sigma_t + \sigma_r) = -\frac{\nu b \sigma_t}{E} = -\frac{0.3 \cdot 0.025 \cdot 27.42 \cdot 10^6}{2.2 \cdot 10^{11}} \doteq -0.93 \cdot 10^{-6} \text{ m}. \quad (17)$$

Poznámka: V případech, jako je tento, kde je vnitřní poloměr kotouče výrazně menší než vnější poloměr, je možné provést přibližný výpočet stavu napjatosti jako u kotouče s velmi malým otvorem. Potom pro $r_1 \rightarrow 0$ vychází podle (3) integrační konstanta $D_2 \rightarrow 0$, což znamená, že hyperbolické členy $D_2 r^{-2}$ ve vztazích pro radiální a obvodové napětí jsou rovněž blízké nule. Při grafickém znázornění průběhů napětí to znamená, že křivky $\sigma_r(r)$ a $\sigma_t(r)$ prakticky splynou s parabolami

$$p_r(r) = D_1 - (3 + \nu) D_\omega r^2 \quad \text{a} \quad p_t(r) = D_1 - (1 + 3\nu) D_\omega r^2, \quad (18)$$

kromě blízkého okolí místa $r = r_1$, viz obr. 2. Při splnění okrajových podmínek (1) lze vyjádřit integrační konstantu D_1 (viz vztah (3)) jako

$$D_1 = \lim_{r_1 \rightarrow 0} (3 + \nu) D_\omega (r_1^2 + r_2^2) = (3 + \nu) D_\omega r_2^2. \quad (19)$$

Rovnice udávající průběhy $\sigma_r(r)$ a $\sigma_t(r)$ v kotouči s nekonečně malým otvorem pak s přihlédnutím k obecnému tvaru řešení, viz vztahy (7) a (8) nebo (18), mají tvar

$$\sigma_r(r) = D_1 - (3 + \nu) D_\omega r^2 = D_\omega (3 + \nu) (r_2^2 - r^2), \quad (20)$$

$$\sigma_t(r) = D_1 - (1 + 3\nu) D_\omega r^2 = D_\omega [(3 + \nu) r_2^2 - (1 + 3\nu) r^2]. \quad (21)$$

Poznamenejme, že ke stejným závislostem dospějeme také u plného kotouče bez otvoru. Dosazením číselných hodnot obdržíme funkční závislosti pro

$$\sigma_r(r) = p_r(r) = D_\omega (3 + \nu) (r_2^2 - r^2) \doteq 64.3048 \cdot 10^6 - 317.555 \cdot 10^6 r^2, \quad (22)$$

$$\sigma_t(r) = p_t(r) = D_\omega [(3 + \nu) r_2^2 - (1 + 3\nu) r^2] \doteq 64.3048 \cdot 10^6 - 182.834 \cdot 10^6 r^2, \quad (23)$$

kteří jsou zobrazeny na obr. 2. Je vidět, že průběhy napětí se od přesného řešení liší skutečně málo. Vyjímkou je blízké okolí poloměru r_1 .

V rámci tohoto přibližného výpočtu ještě zbývá stanovit hodnoty radiálního a obvodového napětí v bodě $r = r_1 \rightarrow 0$. Hodnoty je nutno odvodit ze vztahů pro kotouč, kde $r_1 \neq 0$. Potom radiální napětí musí vyhovovat okrajové podmínce (1) a obvodové napětí lze stanovit pomocí vztahu (10), tj.

$$\sigma_r(r_1) = 0 \quad \text{a} \quad \sigma_t(r_1) = \lim_{r_1 \rightarrow 0} 2D_\omega [(1 - \nu) r_1^2 + (3 + \nu) r_2^2] = 2(3 + \nu) D_\omega r_2^2. \quad (24)$$

PLNOSTĚNNÉ ROTUJÍCÍ KOTOUČE

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Je vidět, že velikost $\sigma_t(r_1)$ je dvakrát větší, než-li je velikost D_1 ve vztahu (19). Po dosazení numerických hodnot do (24)₂ zjistíme, že

$$\sigma_t(r_1) = 2(3 + \nu)D_\omega r_2^2 = 2(3 + 0.3)96.2286 \cdot 10^6 \cdot 0.45^2 \doteq 128.61 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \quad (25)$$

tj. že se oproti skutečné velikosti obvodového napětí na poloměru r_1 odlišuje velmi málo, viz vztah (10).

Příklad 2:

Odvoďte funkci popisující obrys profilu rotujícího kotouče stálé pevnosti zatíženého na vnějším poloměru R radiálním napětím σ_L od lopatek. Uveďte podmínky, které je nutné respektovat při konstrukci takového kotouče. Vypočítejte bezpečnost dle hypotézy Guestovy a HMH, stanovte velikost změny vnějšího poloměru kotouče $\Delta r(R)$ a nakreslete obrys profilu kotouče při dané tloušťce kotouče v ose rotace $B = 20$ cm, je-li dáno: $\rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$, $E = 2.2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$, $Re = 280 \text{ MPa}$, $n = 3000 \text{ min}^{-1}$, $\sigma_L = 120 \text{ MPa}$, $R = 60$ cm.

Řešení:

Abychom byli schopni splnit podmínku stálé pevnosti kotouče, musí být dán obrys profilu takovým předpisem $b = b(r)$, aby se hodnoty radiálního a obvodového napětí v každém bodě kotouče rovnaly. To znamená, že tuto podmínku je nutné splnit i na poloměru R , kde působí tahové napětí σ_L od lopatek vyhovující okrajové podmínce

$$\sigma_r(R) = \sigma_L. \quad (1)$$

Souhrnně lze tedy podmínku stálé pevnosti vyjádřit předpisem

$$\sigma_r(r) = \sigma_t(r) = \sigma_L \quad \text{pro} \quad r \in \langle 0, R \rangle. \quad (2)$$

Z výše uvedeného lze již v tomto kroku výpočtu stanovit bezpečnost, protože známe stav napjatosti v každém bodě kotouče - osově napětí je nulové. Vypočteme nejprve velikost redukovaného napětí, které je v libovolném bodě kotouče podle hypotézy

- Guestovy rovno

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_t - \sigma_o = \sigma_r - \sigma_o = \sigma_L = 120 \text{ MPa}, \quad (3)$$

- HMH¹ rovno

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2 + \sigma_o^2 - (\sigma_r \sigma_t + \sigma_t \sigma_o + \sigma_o \sigma_r)} = \sigma_L = 120 \text{ MPa}. \quad (4)$$

Bezpečnost je v tomto případě podle obou hypotéz stejná a vůči mezi kluzu materiálu má velikost

$$k = \frac{Re}{\sigma_{red}} = \frac{280}{120} = 2.\bar{3}. \quad (5)$$

¹Hypotéza HMH je v literatuře známá také jako von Misesova hypotéza.

PLNOSTĚNNÉ ROTUJÍCÍ KOTOUČE

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Stejně jako v případě bezpečnosti je možné v této fázi výpočtu stanovit i změnu poloměru $\Delta r(R)$, protože stav napjatosti v kotouči je již znám. Použitím obecného Hookeova zákona snadno zjistíme, že deformace Δr lineárně roste v závislosti na poloměru r a nabývá největší hodnoty na vnějším poloměru

$$\Delta r(R) = \frac{R}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_r) = \frac{R \sigma_L}{E} (1 - \nu) = \frac{0.6 \cdot 120 \cdot 10^6}{2.2 \cdot 10^{11}} (1 - 0.3) \doteq 0.229 \cdot 10^{-3} \text{ m}. \quad (6)$$

Při odvození vztahu popisujícího obrys profilu rotujícího kotouče vyjdeme z rovnice rovnováhy v radiálním směru v obecném bodě kotouče, kterou lze psát ve tvaru

$$\sigma_r - \sigma_t + r \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{r}{b} \sigma_r \frac{db}{dr} + \rho \omega^2 r^2 = 0. \quad (7)$$

Dosadíme-li do této rovnice podmínku (2), pak po úpravě obdržíme lineární diferenciální rovnici 1. řádu

$$\frac{db}{dr} + \frac{\rho \omega^2}{\sigma_L} b r = 0. \quad (8)$$

Po separaci proměnných určíme jednoduchým postupem integrál diferenciální rovnice (8), jehož tvar je

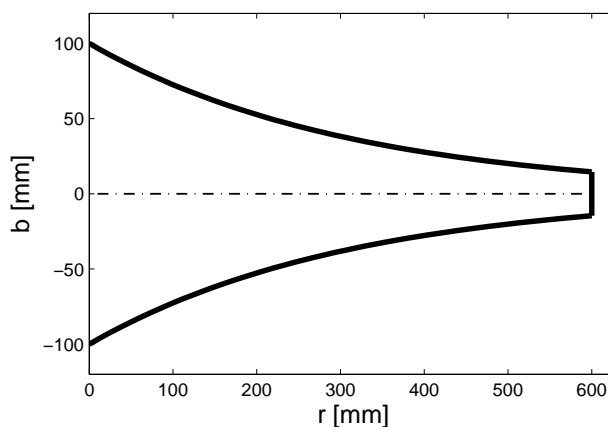
$$\ln b - \ln C = -\frac{\rho \omega^2}{2\sigma_L} r^2. \quad (9)$$

Po úpravě tak dostáváme obecný vztah popisující obrys profilu rotujícího kotouče stále pevnosti

$$b(r) = C \exp\left(-\frac{\rho \omega^2}{2\sigma_L} r^2\right) = C \exp\left(-4 \frac{D_\omega}{\sigma_L} r^2\right). \quad (10)$$

Hodnota integrační konstanty C vyplývá z okrajové podmínky, která je s přihlédnutím ke známé tloušťce kotouče v ose rotace dána vztahem

$$b(0) = B. \quad (11)$$



Obr. 1

PLNOSTĚNNÉ ROTUJÍCÍ KOTOUČE

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Dosažením této podmínky do rovnice (10) získáme hodnotu integrační konstanty $C = B$, takže platí

$$b(r) = B \exp\left(-\frac{\rho\omega^2}{2\sigma_L}r^2\right) = B \exp\left(-2\frac{\pi^2\rho n^2}{\sigma_L}r^2\right) = 0.2 e^{-0.325\pi^2 r^2} \quad \text{pro } r \in \langle 0, R \rangle. \quad (12)$$

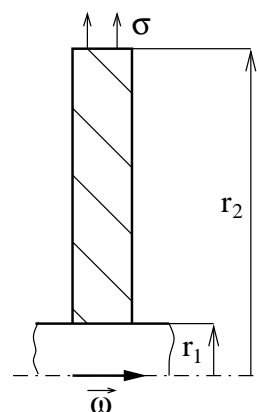
Obrys profilu kotouče je znázorněn na obr. 1. Je zřejmé, že při vyšších úhlových rychlostech vychází tloušťka kotouče na ose rotace mnohonásobně větší než tloušťka na obvodu. Proto se z konstrukčních důvodů, např. u vícestupňových turbín, volí tloušťka na ose rotace menší, a připouští se tak vyšší hodnota obvodového napětí.

S ohledem na řešení, které je prezentováno v tomto příkladě, je při konstrukci kotouče stále pevnosti nezbytné respektovat následující skutečnosti:

- Kotouč musí být na vnějším poloměru zatížen tak, aby byla splněna podmínka (1).
- V kotouči nemohou být otvory, neboť na okrajích otvorů by nemohla být splněna podmínka stálé pevnosti (2). To platí i pro případ nalisovaného spoje, neboť ve stykové ploše nelze podmínku stálé pevnosti nikdy splnit.

Příklad 3:

Vyšetřete a v měřítku zakreslete napjatost u nalisovaného spojení rotujícího kotouče konstantní tloušťky, který je zatížený na vnějším okraji o poloměru r_2 tahovým napětím σ , a rotujícího hřídele při společných otáčkách n , jak je zřejmé z obr. 1. Vypočtete bezpečnost tohoto spojení za provozu, jestliže je za rotace ve stykové ploše kotouče a hřídele požadován tlak p_ω . Dále vypočtete montážní přesah za klidu. I pro tento případ vyšetřete a v měřítku zakreslete stav napjatosti a vypočtete bezpečnost za klidu. Pro výpočet bezpečnosti použijte Guestovu hypotézu pevnosti. Dáno: $\rho_h = 7.8 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$, $\rho_k = 7.85 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$, $E_h = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $E_k = 1.8 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\nu_h = 0.3$, $\nu_k = 0.29$, $Re_h = 280 \text{ MPa}$, $Re_k = 520 \text{ MPa}$, $n = 5500 \text{ min}^{-1}$, $\sigma = 50 \text{ MPa}$, $p_\omega = 25 \text{ MPa}$, $r_1 = 45 \text{ mm}$, $r_2 = 225 \text{ mm}$.



Obr. 1

Řešení:

Aby mohl při rotaci ve stykové ploše hřídele „h“ a kotouče „k“ vzniknout nenulový tlak p_ω , musí být obě tělesa spojena s celkovým přesahem za rotace $\Delta r_{1\omega}$ a s dílčími přesahy hřídele $\Delta r_{1\omega}^h$ a kotouče $\Delta r_{1\omega}^k$, pro něž platí vzájemná relace

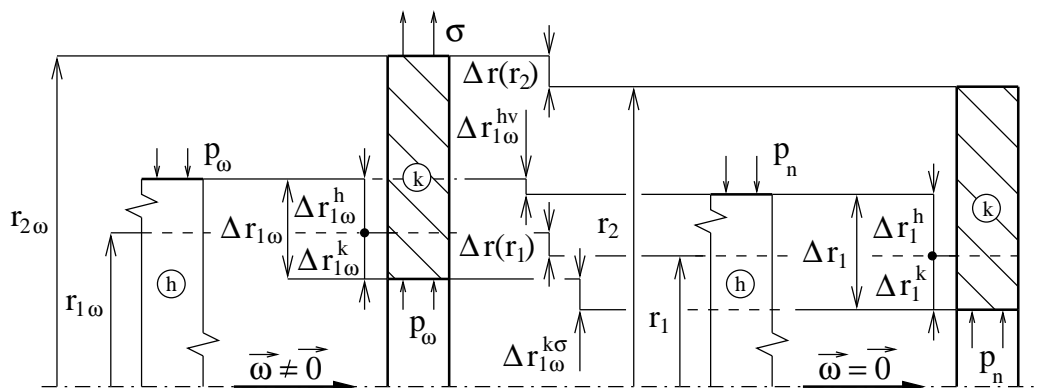
$$\Delta r_{1\omega} = -\Delta r_{1\omega}^h + \Delta r_{1\omega}^k = |\Delta r_{1\omega}^h| + \Delta r_{1\omega}^k, \quad (1)$$

viz obr. 2. Záporné znaménko u přesahu $\Delta r_{1\omega}^h$ vyjadřuje skutečnost, že u hřídele dochází ve stykové ploše ke stlačení² a tedy $\Delta r_{1\omega}^h < 0$.

²Kladný přírůstek změny poloměru byl obecně definován ve směru kladného přírůstku poloměru.

PLNOSTĚNNÉ ROTUJÍCÍ KOTOUČE

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek



Obr. 2

Velikost celkového přesahu za rotace lze stanovit také pomocí přesahu za klidu Δr_1 . Nejprve uvažujme hřídel a kotouč, které jsou vyrobeny s dílčími přesahy Δr_1^h a Δr_1^k vůči jmenovitému poloměru r_1 za klidu, jak je patrné na obr. 2. Dále předpokládejme, že necháme rotovat hřídel úhlovou rychlostí ω , přičemž na něj v místě spojení pohlížíme jako na rotující kotouč bez otvoru. Hřídel zvětší svůj rozměr na poloměru $r_1 + |\Delta r_1^h|$ o hodnotu $\Delta r_{1\omega}^{hv}$. Obdobně necháme rotovat i kotouč, který je na vnitřním poloměru nezatížený a na vnějším poloměru působí tahové napětí σ . Kotouč pak zvětší svůj rozměr na poloměru $r_1 - \Delta r_1^k$ o hodnotu $\Delta r_{1\omega}^{k\sigma}$, která odpovídá zvětšení od vlivu působení setrvačných sil a napětí σ . Celkový přesah za rotace potom můžeme vyjádřit rovnicí

$$\Delta r_{1\omega} = \Delta r_1 + \Delta r_{1\omega}^{hv} - \Delta r_{1\omega}^{k\sigma} = |\Delta r_1^h| + \Delta r_1^k + \Delta r_{1\omega}^{hv} - \Delta r_{1\omega}^{k\sigma}. \quad (2)$$

Změny jednotlivých poloměrů na hřídeli a na kotouči jsou s ohledem na předpoklad malých deformací velmi malé při porovnání s příslušnými poloměry, což můžeme formálně zapsat jako $r \gg \Delta r$. Dopustíme se tak zanedbatelné chyby, jestliže výpočty změn všech poloměrů budeme vztahovat ke jmenovitým hodnotám poloměrů r_1 a r_2 .

S ohledem na rovnice (1) a (2) se ukazuje jako vhodné rozdělit řešení celé úlohy do dvou hlavních částí. V první z nich vyšetříme stav napjatosti, bezpečnost a velikost celkového přesahu za rotace. Ve druhé potom postupně určíme velikost přesahu za klidu, velikost nalisovacího tlaku, stav napjatosti po montáži a příslušnou bezpečnost.

Část 1: Nejprve stanovíme integrační konstanty, které se vyskytují ve vztazích pro radiální a obvodové napětí.

Okrajové podmínky jsou pro hřídel na levé části obr. 2 dány rovnicemi

$$\sigma_r^h(0) = \sigma_t^h(0) \quad \text{a} \quad \sigma_r^h(r_1) = -p_\omega. \quad (3)$$

První z těchto podmínek vyjadřuje, že v ose rotace nelze rozlišit mezi radiálním a obvodovým napětím. Po dosazení do (3)₁ dostáváme

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[D_1^h - \frac{D_2^h}{r^2} - (3 + \nu_h) D_\omega^h r^2 \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \left[D_1^h + \frac{D_2^h}{r^2} - (1 + 3\nu_h) D_\omega^h r^2 \right]. \quad (4)$$

PLNOSTĚNNÉ ROTUJÍCÍ KOTOUČE

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Tuto rovnici lze splnit pouze pro případ

$$D_2^h = 0. \quad (5)$$

Po dosazení do druhé z okrajových podmínek (3), tj.

$$D_1^h - \frac{D_2^h}{r_1^2} - (3 + \nu_h)D_\omega^h r_1^2 = -p_\omega, \quad (6)$$

a s přihlédnutím k (5), vychází integrační konstanta D_1^h ve tvaru

$$D_1^h = (3 + \nu_h)D_\omega^h r_1^2 - p_\omega. \quad (7)$$

Pro případ rotujícího kotouče z levé části obr. 2 jsou okrajové podmínky

$$\sigma_r^k(r_1) = -p_\omega \quad \text{a} \quad \sigma_r^k(r_2) = \sigma. \quad (8)$$

Rozepsáním těchto podmínek za použití obecného předpisu pro rozložení radiálního napětí v rotujícím kotouči získáme soustavu rovnic

$$D_1^k - \frac{D_2^k}{r_1^2} - (3 + \nu_k)D_\omega^k r_1^2 = -p_\omega \quad \text{a} \quad D_1^k - \frac{D_2^k}{r_2^2} - (3 + \nu_k)D_\omega^k r_2^2 = \sigma, \quad (9)$$

jejímž řešením obdržíme integrační konstanty

$$D_1^k = (3 + \nu_k)D_\omega^k (r_1^2 + r_2^2) + \frac{p_\omega r_1^2 + \sigma r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{a} \quad D_2^k = (3 + \nu_k)D_\omega^k r_1^2 r_2^2 + \frac{(p_\omega + \sigma)r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (10)$$

Před vyčíslením integračních konstant je výhodné znát velikosti konstant D_ω^h a D_ω^k . Ty pro řešenou úlohu nabývají hodnot

$$D_\omega^h = \frac{\rho_h \omega^2}{8} = \frac{\pi^2 \rho_h n^2}{2} = \frac{\pi^2 7.8 \cdot 10^3 \cdot 5500^2}{2 \cdot 60^2} \doteq 323.435 \cdot 10^6 \text{ Pa m}^{-2}, \quad (11)$$

$$D_\omega^k = \frac{\rho_k \omega^2}{8} = \frac{\pi^2 \rho_k n^2}{2} = \frac{\pi^2 7.85 \cdot 10^3 \cdot 5500^2}{2 \cdot 60^2} \doteq 325.508 \cdot 10^6 \text{ Pa m}^{-2}. \quad (12)$$

Nenulová integrační konstanta (7) je pro hřídel rovna

$$D_1^h = (3 + 0.3) 323.435 \cdot 10^6 \cdot 0.045^2 - 25 \cdot 10^6 \doteq -22.839 \cdot 10^6 \text{ Pa} \quad (13)$$

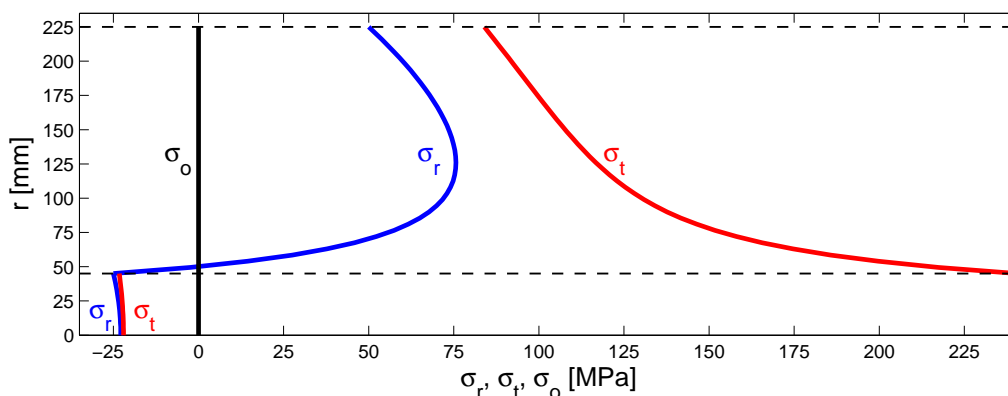
a numerické hodnoty integračních konstant (10) jsou pro kotouč

$$D_1^k = (3 + 0.29) 325.508 \cdot 10^6 (0.045^2 + 0.225^2) + \frac{25 \cdot 10^6 \cdot 0.045^2 + 50 \cdot 10^6 \cdot 0.225^2}{0.225^2 - 0.045^2} \doteq 109.509 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \quad (14)$$

$$D_2^k = (3 + 0.29) 325.508 \cdot 10^6 \cdot 0.045^2 \cdot 0.225^2 + \frac{(25 \cdot 10^6 + 50 \cdot 10^6) 0.045^2 \cdot 0.225^2}{0.225^2 - 0.045^2} \doteq 267989 \text{ N}. \quad (15)$$

PLNOSTĚNNÉ ROTUJÍCÍ KOTOUČE

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek



Obr. 3

Funkce určující průběh radiálního a obvodového napětí mají v hřídeli po dosažení tvar

$$\sigma_r^h(r) = D_1^h - (3 + \nu_h)D_\omega^h r^2 = -22.839 \cdot 10^6 - 1067.34 \cdot 10^6 r^2, \quad (16)$$

$$\sigma_t^h(r) = D_1^h - (1 + 3\nu_h)D_\omega^h r^2 = -22.839 \cdot 10^6 - 614.527 \cdot 10^6 r^2, \quad (17)$$

a podobně mají pro kotouč po dosažení tvar

$$\sigma_r^k(r) = D_1^k - \frac{D_2^k}{r^2} - (3 + \nu_k)D_\omega^k r^2 = 109.509 \cdot 10^6 - \frac{267989}{r^2} - 1070.92 \cdot 10^6 r^2, \quad (18)$$

$$\sigma_t^k(r) = D_1^k + \frac{D_2^k}{r^2} - (1 + 3\nu_k)D_\omega^k r^2 = 109.509 \cdot 10^6 + \frac{267989}{r^2} - 608.701 \cdot 10^6 r^2. \quad (19)$$

Výsledné průběhy hlavních napětí působících v nalisovaném spojení hřídele a kotouče za rotace jsou potom, viz (16) až (19),

$$\sigma_r(r) = \begin{cases} \sigma_r^h(r) & \text{pro } r \in \langle 0, r_1 \rangle, \\ \sigma_r^k(r) & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \end{cases} \quad \sigma_t(r) = \begin{cases} \sigma_t^h(r) & \text{pro } r \in \langle 0, r_1 \rangle, \\ \sigma_t^k(r) & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \end{cases} \quad (20)$$

přičemž osové napětí je apriori nulové,

$$\sigma_o = 0 \quad \text{pro } r \in \langle 0, r_2 \rangle. \quad (21)$$

Tyto funkce jsou graficky znázorněny na obr. 3.

Funkce radiálního napětí splňuje okrajové podmínky (3) a (8), a proto na ose rotace a na poloměrech r_1 a r_2 platí:

$$\begin{aligned} \sigma_r(0) &= \sigma_r^h(0) = D_1^h \doteq -22.84 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \\ \sigma_r(r_1) &= \sigma_r^h(r_1) = \sigma_r^k(r_1) = -p_\omega = -25 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \\ \sigma_r(r_2) &= \sigma_r^k(r_2) = \sigma = 50 \cdot 10^6 \text{ Pa}. \end{aligned} \quad (22)$$

PLNOSTĚNNÉ ROTUJÍCÍ KOTOUČE

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Ve stejných místech stanovíme také velikosti obvodového napětí. S pomocí vztahů (7), (9) a (16) až (20) můžeme psát³

$$\sigma_t(0) = \sigma_t^h(0) = D_1^h \doteq -22.84 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \sigma_t(r_1 - 0) &= \sigma_t^h(r_1) = D_1^h - (1 + 3\nu_h)D_\omega^h r_1^2 = 2D_\omega^h(1 - \nu_h)r_1^2 - p_\omega = \\ &= 2 \cdot 323.435 \cdot 10^6(1 - 0.3)0.045^2 - 25 \cdot 10^6 \doteq -24.08 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_t(r_1 + 0) &= \sigma_t^k(r_1) = D_1^k + \frac{D_2^k}{r_1^2} - (1 + 3\nu_k)D_\omega^k r_1^2 = 2D_\omega^k [(1 - \nu_k)r_1^2 + (3 + \nu_k)r_2^2] + \\ &+ \frac{p_\omega(r_1^2 + r_2^2) + 2\sigma r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = 2 \cdot 325.508 \cdot 10^6 [(1 - 0.29)0.045^2 + (3 + 0.29)0.225^2] + \\ &+ \frac{25 \cdot 10^6(0.045^2 + 0.225^2) + 2 \cdot 50 \cdot 10^6 \cdot 0.225^2}{0.225^2 - 0.045^2} \doteq 240.62 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \sigma_t(r_2) &= \sigma_t^k(r_2) = D_1^k + \frac{D_2^k}{r_2^2} - (1 + 3\nu_k)D_\omega^k r_2^2 = 2D_\omega^k [(3 + \nu_k)r_1^2 + (1 - \nu_k)r_2^2] + \\ &+ \frac{2p_\omega r_1^2 + \sigma(r_1^2 + r_2^2)}{r_2^2 - r_1^2} = 2 \cdot 325.508 \cdot 10^6 [(3 + 0.29)0.045^2 + (1 - 0.29)0.225^2] + \\ &+ \frac{2 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 0.045^2 + 50 \cdot 10^6(0.045^2 + 0.225^2)}{0.225^2 - 0.045^2} \doteq 83.99 \cdot 10^6 \text{ Pa}. \end{aligned} \quad (26)$$

Jak je zřejmé z průběhů hlavních napětí na obr. 3, je nejvíce namáhán kotouč na poloměru $r = r_1$. Zde je také nejmenší bezpečnost, přestože je $Re_k > Re_h$. Podle Guestovy hypotézy pevnosti je tedy v kotouči hodnota největšího redukovaného napětí rovna

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_t^k - \sigma_r^k = 240.62 - (-25) = 265.62 \text{ MPa}. \quad (27)$$

Bezpečnost vůči mezi kluzu materiálu kotouče je v tomto případě rovna

$$k = \frac{Re_k}{\sigma_{red}} = \frac{520}{265.62} \doteq 1.96. \quad (28)$$

To je zároveň výsledná bezpečnost nalisovaného spojení kotouče na hřídel za rotace.

Nyní můžeme přistoupit k výpočtu změn poloměrů $\Delta r_{1\omega}^h$, $\Delta r_{1\omega}^k$ a k výpočtu celkového přesahu za rotace $\Delta r_{1\omega}$. S přihlédnutím ke vztahům (22)₂, (24) a (25) lze psát

$$\Delta r_{1\omega}^h = \frac{r_1}{E_h} (\sigma_t^h - \nu_h \sigma_r^h) = \frac{0.045}{2.1 \cdot 10^{11}} [-24.08 \cdot 10^6 - 0.3(-25 \cdot 10^6)] \doteq -0.355 \cdot 10^{-5} \text{ m}, \quad (29)$$

$$\Delta r_{1\omega}^k = \frac{r_1}{E_k} (\sigma_t^k - \nu_k \sigma_r^k) = \frac{0.045}{1.8 \cdot 10^{11}} [240.62 \cdot 10^6 - 0.29(-25 \cdot 10^6)] \doteq 6.197 \cdot 10^{-5} \text{ m}. \quad (30)$$

Celkový přesah za rotace má potom velikost

$$\Delta r_{1\omega} = |\Delta r_{1\omega}^h| + \Delta r_{1\omega}^k = 0.355 \cdot 10^{-5} + 6.197 \cdot 10^{-5} = 6.552 \cdot 10^{-5} \text{ m}. \quad (31)$$

³Zápis $f(a + 0)$, resp. $f(a - 0)$, vyjadřuje limitu funkce $f(x)$ v bodě a zprava, resp. zleva, nebo-li $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$, resp. $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$.

PLNOSTĚNNÉ ROTUJÍCÍ KOTOUČE

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Část 2: Pro výpočet montážního přesahu za klidu Δr_1 a tomu odpovídajícího stavu napjatosti v hřídeli a kotouči musíme nejprve, ve shodě s rovnicí (2), vypočítat velikosti $\Delta r_{1\omega}^{hv}$ a $\Delta r_{1\omega}^{k\sigma}$.

Při výpočtu $\Delta r_{1\omega}^{hv}$ vyjdeme z řešení rotujícího kotouče bez otvoru s nezatíženým vnějším okrajem na poloměru r_1 . Při stanovení integračních konstant D_1^{hv} a D_2^{hv} aplikujeme okrajové podmínky

$$\sigma_r^{hv}(0) = \sigma_t^{hv}(0) \quad \text{a} \quad \sigma_r^{hv}(r_1) = 0. \quad (32)$$

Po dosazení do první z nich dostáváme vztah

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[D_1^{hv} - \frac{D_2^{hv}}{r^2} - (3 + \nu_h) D_\omega^h r^2 \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \left[D_1^{hv} + \frac{D_2^{hv}}{r^2} - (1 + 3\nu_h) D_\omega^h r^2 \right], \quad (33)$$

který lze splnit pouze pro případ

$$D_2^{hv} = 0. \quad (34)$$

Po dosazení do druhé z podmínek (32) dostáváme s přihlédnutím k (34) rovnici

$$D_1^{hv} - (3 + \nu_h) D_\omega^h r_1^2 = 0, \quad (35)$$

jejímž řešením je integrační konstanta

$$D_1^{hv} = (3 + \nu_h) D_\omega^h r_1^2. \quad (36)$$

Při výpočtu změny poloměru $\Delta r_{1\omega}^{hv}$ nám postačuje znalost stavu napjatosti pouze na poloměru r_1 . Radiální napětí splňuje podmínku (32)₂ a je tedy nulové stejně jako napětí osové. Zbývá určit velikost obvodového napětí, pro které platí:

$$\begin{aligned} \sigma_t^{hv}(r_1) &= D_1^{hv} - (1 + 3\nu_h) D_\omega^h r_1^2 = 2D_\omega^h (1 - \nu_h) r_1^2 = 2 \cdot 323.435 \cdot 10^6 (1 - 0.3) 0.045^2 \doteq \\ &\doteq 0.92 \cdot 10^6 \text{ Pa}. \end{aligned} \quad (37)$$

Potom můžeme psát

$$\Delta r_{1\omega}^{hv} = \frac{r_1}{E_h} (\sigma_t^{hv} - \nu_h \sigma_r^{hv}) = \frac{r_1 \sigma_t^{hv}}{E_h} = \frac{0.045 \cdot 0.92 \cdot 10^6}{2.1 \cdot 10^{11}} \doteq 0.020 \cdot 10^{-5} \text{ m}. \quad (38)$$

Při výpočtu $\Delta r_{1\omega}^{k\sigma}$ uvažujeme rotující kotouč s nezatíženým vnitřním okrajem na poloměru r_1 a se zatíženým vnějším okrajem, kde na poloměru r_2 působí tahové napětí σ . Integrační konstanty $D_1^{k\sigma}$ a $D_2^{k\sigma}$ určíme pomocí okrajových podmínek

$$\sigma_r^{k\sigma}(r_1) = 0 \quad \text{a} \quad \sigma_r^{k\sigma}(r_2) = \sigma. \quad (39)$$

Po dosazení na levých stranách získáme soustavu dvou algebraických rovnic

$$D_1^{k\sigma} - \frac{D_2^{k\sigma}}{r_1^2} - (3 + \nu_k) D_\omega^k r_1^2 = 0 \quad \text{a} \quad D_1^{k\sigma} - \frac{D_2^{k\sigma}}{r_2^2} - (3 + \nu_k) D_\omega^k r_2^2 = \sigma, \quad (40)$$

PLNOSTĚNNÉ ROTUJÍCÍ KOTOUČE

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

jejímž řešením obdržíme integrační konstanty určené vztahy

$$D_1^{k\sigma} = (3 + \nu_k)D_\omega^k (r_1^2 + r_2^2) + \frac{\sigma r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{a} \quad D_2^{k\sigma} = (3 + \nu_k)D_\omega^k r_1^2 r_2^2 + \frac{\sigma r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (41)$$

Pro výpočet změny poloměru kotouče $\Delta r_{1\omega}^{k\sigma}$ nám opět postačuje znalost stavu napjatosti pouze na poloměru r_1 . Radiální napětí splňuje podmínku (39)₁, osové považujeme za nulové a pro obvodové napětí můžeme psát

$$\begin{aligned} \sigma_t^{k\sigma}(r_1) &= D_1^{k\sigma} + \frac{D_2^{k\sigma}}{r_1^2} - (1 + 3\nu_k)D_\omega^k r_1^2 = 2D_\omega^k [(1 - \nu_k)r_1^2 + (3 + \nu_k)r_2^2] + \\ &+ \frac{2\sigma r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = 2 \cdot 325.508 \cdot 10^6 [(1 - 0.29) 0.045^2 + (3 + 0.29) 0.225^2] + \\ &+ \frac{2 \cdot 50 \cdot 10^6 \cdot 0.225^2}{0.225^2 - 0.045^2} \doteq 213.53 \cdot 10^6 \text{ Pa}. \end{aligned} \quad (42)$$

Změna poloměru $\Delta r_{1\omega}^{k\sigma}$ kotouče s předepsanými okrajovými podmínkami (39) je rovna

$$\Delta r_{1\omega}^{k\sigma} = \frac{r_1}{E_k} (\sigma_t^{k\sigma} - \nu_k \sigma_r^{k\sigma}) = \frac{r_1 \sigma_t^{k\sigma}}{E_k} = \frac{0.045 \cdot 213.53 \cdot 10^6}{1.8 \cdot 10^{11}} \doteq 5.338 \cdot 10^{-5} \text{ m}. \quad (43)$$

Hodnota celkového přesahu za klidu Δr_1 je potom podle (2) rovna

$$\Delta r_1 = \Delta r_{1\omega} + \Delta r_{1\omega}^{k\sigma} - \Delta r_{1\omega}^{hv} = 6.552 \cdot 10^{-5} + 5.338 \cdot 10^{-5} - 0.020 \cdot 10^{-5} = 11.87 \cdot 10^{-5} \text{ m}. \quad (44)$$

Numerické hodnoty byly do rovnice (44) dosazeny ze vztahů (31), (38) a (43).

S ohledem na pravou část obr. 2 je zřejmé, že pro vyšetření stavu napjatosti v hřídeli a kotouči za klidu, tj. pro $\omega = 0$, je rozhodující nalezení závislosti p_n a Δr_1 . Výpočet je možné provést obdobně jako v případě dvouplášťové otevřené nádoby při působení pouze nalisovacího tlaku p_n za klidu. Nejprve stanovíme integrační konstanty, které se vyskytují ve vztazích pro hlavní napětí. Funkci, popisující obecně velikost radiálního napětí při nulové rotaci, můžeme zapsat ve tvaru

$$\sigma_{r,n}(r) = \begin{cases} D_1^{0,1} - \frac{D_2^{0,1}}{r^2} & \text{pro } r \in \langle 0, r_1 \rangle, \\ D_1^{1,2} - \frac{D_2^{1,2}}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \end{cases} \quad (45)$$

a obdobně můžeme psát i funkci, která popisuje průběh obvodového napětí, ve tvaru

$$\sigma_{t,n}(r) = \begin{cases} D_1^{0,1} + \frac{D_2^{0,1}}{r^2} & \text{pro } r \in \langle 0, r_1 \rangle, \\ D_1^{1,2} + \frac{D_2^{1,2}}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle. \end{cases} \quad (46)$$

Pro osové napětí předpokládáme stále platnost vztahu (21). Integrační konstanty $D_1^{0,1}$ a $D_2^{0,1}$ pro hřídel určíme z okrajových podmínek

$$\sigma_{r,n}(0) = \sigma_{t,n}(0) \quad \text{a} \quad \sigma_{r,n}(r_1) = -p_n. \quad (47)$$

PLNOSTĚNNÉ ROTUJÍCÍ KOTOUČE

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Po dosazení do (47)₁ ze (45) a (46) obdržíme vztah

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[D_1^{0,1} - \frac{D_2^{0,1}}{r^2} \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \left[D_1^{0,1} + \frac{D_2^{0,1}}{r^2} \right], \quad (48)$$

který lze splnit pouze pro případ

$$D_2^{0,1} = 0. \quad (49)$$

Po dosazení do okrajové podmínky (47)₂ snadno zjistíme, že

$$D_1^{0,1} = -p_n. \quad (50)$$

Analogicky stanovíme i integrační konstanty $D_1^{1,2}$ a $D_2^{1,2}$. V tomto případě vycházíme z okrajových podmínek

$$\sigma_{r,n}(r_1) = -p_n \quad \text{a} \quad \sigma_{r,n}(r_2) = 0, \quad (51)$$

které platí pro kotouč bez rotace, viz pravá část obr. 2. Řešením soustavy rovnic

$$D_1^{1,2} - \frac{D_2^{1,2}}{r_1^2} = -p_n \quad \text{a} \quad D_1^{1,2} - \frac{D_2^{1,2}}{r_2^2} = 0 \quad (52)$$

vyplývajících z (51) a (45) obdržíme hledané integrační konstanty ve tvaru

$$D_1^{1,2} = \frac{p_n r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{a} \quad D_2^{1,2} = \frac{p_n r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (53)$$

Změnu poloměru $|\Delta r_1^h|$ hřídele a změnu poloměru Δr_1^k kotouče, které jsou nutné pro výpočet Δr_1 , jak je patrné z rovnice (2), můžeme s přihlédnutím ke vztahům (45), (46), kam dosadíme ze (49), (50) a (53), vyjádřit jako

$$|\Delta r_1^h| = \frac{r_1}{E_h} (\sigma_t(r_1 - 0) - \nu_h \sigma_r(r_1))(-1) = \frac{r_1 p_n}{E_h} (1 - \nu_h), \quad (54)$$

$$\Delta r_1^k = \frac{r_1}{E_k} (\sigma_t(r_1 + 0) - \nu_k \sigma_r(r_1)) = \frac{r_1 p_n}{E_k} \left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \nu_k \right). \quad (55)$$

V souladu s rovnicí (2) pak pro celkový přesah za klidu píšme

$$\begin{aligned} \Delta r_1 &= |\Delta r_1^h| + \Delta r_1^k = \frac{0.045 p_n}{2.1 \cdot 10^{11}} (1 - 0.3) + \frac{0.045 p_n}{1.8 \cdot 10^{11}} \left(\frac{0.045^2 + 0.225^2}{0.225^2 - 0.045^2} + 0.29 \right) = \\ &= 4.9\bar{3} \cdot 10^{-13} p_n. \end{aligned} \quad (56)$$

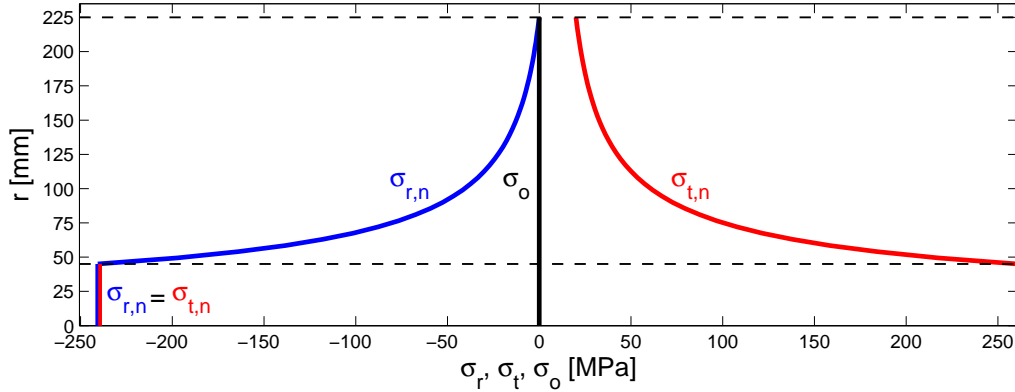
Porovnáním (44) a (56) obdržíme velikost nalisovací tlaku

$$p_n = \frac{11.87 \cdot 10^{-5}}{4.9\bar{3} \cdot 10^{-13}} \doteq 240.61 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \quad (57)$$

který vznikne ve spoji hřídele a kotouče po montáži.

PLNOSTĚNNÉ ROTUJÍCÍ KOTOUČE

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek



Obr. 4

Nyní jsme schopni numericky vyšetřit stav napjatosti ve spojení hřídele a kotouče. Integrační konstanty (53) nabývají hodnot

$$D_1^{1,2} = \frac{240.61 \cdot 10^6 \cdot 0.045^2}{0.225^2 - 0.045^2} \doteq 10.03 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 10.03 \text{ MPa}, \quad (58)$$

$$D_2^{1,2} = \frac{240.61 \cdot 10^6 \cdot 0.045^2 \cdot 0.225^2}{0.225^2 - 0.045^2} \doteq 0.5075 \cdot 10^6 \text{ N} = 0.5075 \text{ MN}. \quad (59)$$

Funkce popisující průběh radiálního a obvodového napětí, viz vztahy (45) a (46), mají po dosazení hodnot dle (57) až (59) tvar

$$\sigma_{r,n}(r) = \begin{cases} -240.61 \cdot 10^6 & \text{pro } r \in \langle 0, r_1 \rangle, \\ 10.03 \cdot 10^6 - \frac{0.5075 \cdot 10^6}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \end{cases} \quad (60)$$

$$\sigma_{t,n}(r) = \begin{cases} -240.61 \cdot 10^6 & \text{pro } r \in \langle 0, r_1 \rangle, \\ 10.03 \cdot 10^6 + \frac{0.5075 \cdot 10^6}{r^2} & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle. \end{cases} \quad (61)$$

Průběhy těchto hlavních napětí, včetně napětí osového, jsou potom vidět na obr. 4. Hodnoty radiálního a obvodového napětí na poloměrech $r = \{0, r_1, r_2\}$ můžeme stanovit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \sigma_{r,n}(0) &= \sigma_{r,n}(r_1) = D_1^{0,1} = -p_n = -240.61 \text{ MPa}, \\ \sigma_{r,n}(r_2) &= D_1^{1,2} - \frac{D_2^{1,2}}{r_2^2} = 0, \\ \sigma_{t,n}(0) &= \sigma_{t,n}(r_1 - 0) = D_1^{0,1} = -p_n = -240.61 \text{ MPa}, \\ \sigma_{t,n}(r_1 + 0) &= D_1^{1,2} + \frac{D_2^{1,2}}{r_1^2} = 2 D_1^{1,2} + p_n = 2 \cdot 10.03 + 240.61 = 260.67 \text{ MPa}, \\ \sigma_{t,n}(r_2) &= D_1^{1,2} + \frac{D_2^{1,2}}{r_2^2} = 2 D_1^{1,2} = 2 \cdot 10.03 = 20.06 \text{ MPa}. \end{aligned} \quad (62)$$

PLNOSTĚNNÉ ROTUJÍCÍ KOTOUČE

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Při výpočtu bezpečnosti po montáži zjišťujeme, že stejně jako za rotace je kotouč nejvíce namáhán na poloměru $r = r_1$. Je však zřejmé, že oproti případu za rotace došlo k výraznému nárůstu hodnot redukovaného napětí a to jak v kotouči, tak i v hřídeli. Proto vypočítáme minimální bezpečnost dle Guestovy hypotézy pevnosti v obou tělesech. Redukované napětí je potom pro hřídel rovno

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_o - \sigma_{r,n} = p_n = 240.61 \text{ MPa} \quad (63)$$

a pro kotouč

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_{t,n} - \sigma_{r,n} = 260.67 - (-240.61) = 501.28 \text{ MPa.} \quad (64)$$

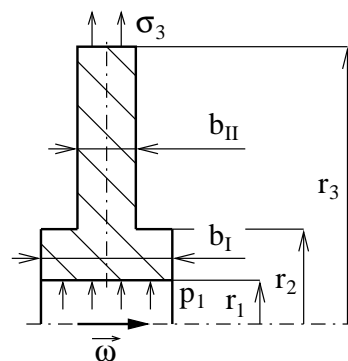
Následně určíme bezpečnost podle Guestovy hypotézy pevnosti vůči mezi kluzu materiálu hřídele, resp. kotouče, jako

$$k = \frac{Re_h}{\sigma_{red}} = \frac{280}{240.61} \doteq 1.16, \quad \text{resp.} \quad k = \frac{Re_k}{\sigma_{red}} = \frac{520}{501.28} \doteq 1.04. \quad (65)$$

S přihlédnutím k vypočteným hodnotám bezpečnosti za rotace a po montáži, viz (28) a (65), můžeme tedy konstatovat, že nejmenší bezpečnost je v kotouči po montáži a její velikost je $k = 1.04$.

Příklad 4:

Je dán rotující kotouč proměnné tloušťky, se dvěma stupni (obr. 1), zatížený na vnitřním okraji o poloměru r_1 tlakem p_1 a na vnějším okraji o poloměru r_3 tahovým napětím σ_3 . Poloměr, na němž dochází ke změně tloušťky kotouče je r_2 . Vyšetřete a v měřítku zakreslete napjatost, je-li dáno: $\rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$, $\nu = 0.3$, $n = 3000 \text{ min}^{-1}$, $p_1 = 15 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = 20 \text{ MPa}$, $r_1 = 40 \text{ mm}$, $r_2 = 70 \text{ mm}$, $r_3 = 110 \text{ mm}$, $b_I = 60 \text{ mm}$, $b_{II} = 30 \text{ mm}$.



Obr. 1

Řešení:

Při vyšetření napjatosti v kotouči se dvěma stupni postupujeme tak, že kotouč rozdělíme myšleným válcovým řezem (na poloměru r_2) na dva - označme je např. I a II . V každém stupni pak předpokládáme platnost obecného řešení jako u rotujícího kotouče konstantní tloušťky, tj. pro radiální a obvodové napětí píšeme

$$\sigma_r^i = D_1^i - \frac{D_2^i}{r^2} - (3 + \nu)D_\omega r^2 \quad \text{a} \quad \sigma_t^i = D_1^i + \frac{D_2^i}{r^2} - (1 + 3\nu)D_\omega r^2 \quad \text{pro} \quad i = I, II \quad (1)$$

a osové napětí všude v tělese zanedbáváme. K určení čtyř integračních konstant D_1^I až D_2^II , jež se vyskytují v (1), je třeba formulovat čtyři okrajové podmínky, které jsou pro řešenou úlohu následující:

$$\sigma_r^I(r_1) = -p_1 \quad \text{a} \quad \varepsilon_t^I(r_2) = \varepsilon_t^{II}(r_2) \quad \text{a} \quad N_r^I(r_2) = N_r^{II}(r_2) \quad \text{a} \quad \sigma_r^{II}(r_3) = \sigma_3. \quad (2)$$

PLNOSTĚNNÉ ROTUJÍCÍ KOTOUČE

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Rovnice (2)₁, resp. (2)₄, vyjadřuje rovnováhu mezi radiálním napětím v kotouči a vnějším zatížením na příslušném poloměru r_1 , resp. r_3 . Podmínka (2)₂ vyjadřuje de facto spojitost kotouče na poloměru r_2 . Platí totiž $\varepsilon_t^I(r_2) = \Delta r^I(r_2)/r_2$ a odtud přejde podmínka $\varepsilon_t^I(r_2) = \varepsilon_t^{II}(r_2)$ na tvar $\Delta r^I(r_2) = \Delta r^{II}(r_2)$. Podmínku (2)₂ lze užitím obecného Hookeova zákona psát také ve tvaru

$$\sigma_t^I(r_2) - \nu\sigma_r^I(r_2) = \sigma_t^{II}(r_2) - \nu\sigma_r^{II}(r_2). \quad (3)$$

Podmínka (2)₃ potom vyjadřuje rovnost radiálních sil kotouče v místě nekonečně blízkém válcovému řezu o poloměru r_2 . Po rozepsání a úpravě pak máme

$$b_I\sigma_r^I(r_2) = b_{II}\sigma_r^{II}(r_2). \quad (4)$$

Dosaďme nyní obecné řešení (1) do okrajových podmínek (2), resp. (3) a (4). Po rozepsání lze uvedené okrajové podmínky vyjádřit rovnicemi

$$\begin{aligned} D_1^I - \frac{1}{r_1^2}D_2^I &= (3 + \nu)D_\omega r_1^2 - p_1, \\ (1 - \nu)D_1^I + \frac{(1 + \nu)}{r_2^2}D_2^I - (1 - \nu)D_1^{II} - \frac{(1 + \nu)}{r_2^2}D_2^{II} &= 0, \\ b_I D_1^I - \frac{b_I}{r_2^2}D_2^I - b_{II}D_1^{II} + \frac{b_{II}}{r_2^2}D_2^{II} &= (b_I - b_{II})(3 + \nu)D_\omega r_2^2, \\ D_1^{II} - \frac{1}{r_3^2}D_2^{II} &= (3 + \nu)D_\omega r_3^2 + \sigma_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Dosažením číselných hodnot nejprve vypočteme

$$D_\omega = \frac{\rho\omega^2}{8} = \frac{\pi^2 \rho n^2}{2} = \frac{\pi^2 \cdot 7.8 \cdot 10^3 \cdot 3000^2}{60^2} \doteq 96.2286 \cdot 10^6 \text{ Pa m}^{-2}. \quad (6)$$

Poté dosadíme do rovnic (5) číselné hodnoty za všechny známé parametry. Takto vzniklou soustavu čtyř lineárních algebraických rovnic pro neznámé D_1^I až D_2^{II} je výhodné zapsat v maticové formě

$$\begin{bmatrix} 1 & -625 & 0 & 0 \\ 0.7 & 265.31 & -0.7 & -265.31 \\ 0.06 & -12.245 & -0.03 & 6.1224 \\ 0 & 0 & 1 & -82.64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^I \\ D_2^I \\ D_1^{II} \\ D_2^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.492 \cdot 10^6 \\ 0 \\ 46681 \\ 23.842 \cdot 10^6 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

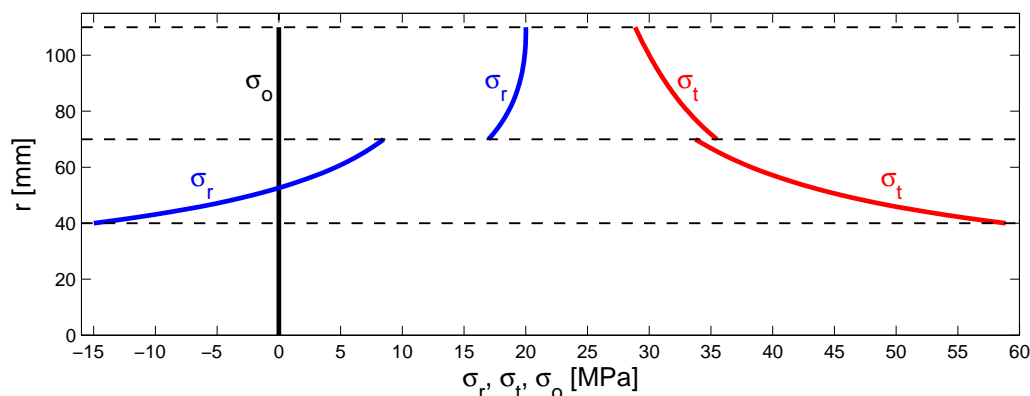
Řešení soustavy (7) provedeme např. pomocí Gaussovy eliminace. Hodnoty neznámých integračních konstant jsou po vyčíslení rovny

$$\begin{aligned} D_1^I &\doteq 21.94 \cdot 10^6 \text{ Pa}, & D_2^I &\doteq 58290.7 \text{ N}, \\ D_1^{II} &\doteq 27.46 \cdot 10^6 \text{ Pa}, & D_2^{II} &\doteq 43734.3 \text{ N}. \end{aligned} \quad (8)$$

Poté, co byly nalezeny hodnoty integračních konstant, lze sestavit rovnice průběhu radiálního a obvodového napětí rotujícího kotouče proměnné tloušťky se dvěma stupni, viz

PLNOSTĚNNÉ ROTUJÍCÍ KOTOUČE

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek



Obr. 2

rovnice (1). Tyto rovnice s využitím (6), (8) a (8) mají tvar

$$\sigma_r(r) = \begin{cases} 21.94 \cdot 10^6 - \frac{58290.7}{r^2} - 317.555 \cdot 10^6 r^2 & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \\ 27.46 \cdot 10^6 - \frac{43734.3}{r^2} - 317.555 \cdot 10^6 r^2 & \text{pro } r \in (r_2, r_3), \end{cases} \quad (9)$$

$$\sigma_t(r) = \begin{cases} 21.94 \cdot 10^6 + \frac{58290.7}{r^2} - 182.834 \cdot 10^6 r^2 & \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle, \\ 27.46 \cdot 10^6 + \frac{43734.3}{r^2} - 182.834 \cdot 10^6 r^2 & \text{pro } r \in (r_2, r_3) \end{cases} \quad (10)$$

a jsou graficky znázorněny na obr. 2. V případě skutečného kotouče musí být průběh radiálního a obvodového napětí spojitý pro všechna $r \in \langle r_1, r_3 \rangle$, protože i obrys profilu kotouče je spojitý. Podmínka spojitosti napětí je však porušena v blízkém okolí poloměru r_2 , kde nastává náhlá změna tloušťky kotouče a kde tedy musíme respektovat Saint-Venantův princip lokálnosti.

Poznámka: U kotoučů proměnného profilu, kde obrys osového řezu není možné výjádřit jednoduchou funkcí, se dá vyšetřit napjatost přibližně tzv. metodou malých rozdílů. Základem metody je řešení pro kotouč konstantní tloušťky. Skutečný profil tělesa se nahrazuje vhodně odstupňovaným kotoučem. V místech náhlé změny tloušťky profilu se volí hustší dělení na stupně, přičemž pro každý stupeň je volena střední tloušťka z daného intervalu poloměru. Úlohu pak řešíme při dodržení silových a deformačních podmínek na poloměrech, v nichž se jednotlivé dílčí kotouče stýkají, viz okrajové podmínky $(2)_2$ a $(2)_3$. Pro kotouč rozdělený na n stupňů je pak třeba formulovat celkem $2n$ okrajových podmínek, které vedou na řešení soustavy $2n$ lineárních algebraických rovnic pro neznámé integrační konstanty D_1^i až D_2^i , kde $i = 1, 2, \dots, n$. Tímto postupem jsme schopni vyšetřit přibližný průběh radiálního a obvodového napětí v kotouči proměnného profilu.