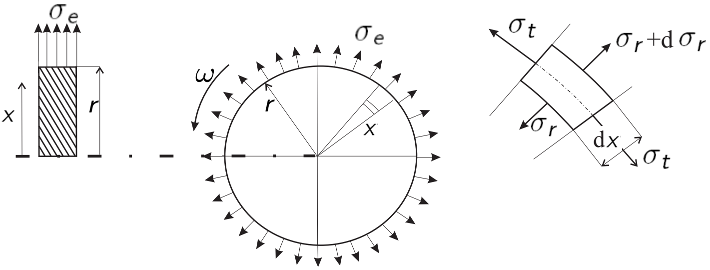
Rotující kotouče

Drahomír Rychecký

Nabídka

- Rotující kotouče
  - Kotouče bez otvoru
    - Obecná úloha zde
    - Volný kotouč zde
    - Kotouč zatížený tahovým napětím na vnějším poloměru zde
  - Kotouče s otvorem
    - Obecná úloha zde
    - Volný kotouč zde
    - Kotouč zatížený tahovým napětím na vnějším poloměru zde
    - Kotouč zatížený tlakovým napětím na vnitřním poloměru zde
    - Kotouč zatížený napětími na poloměrech r_1 a r_2 zde

Kotouče bez otvoru - Obecné zadání



Obrázek: Kotouč s uvolněným elementem

Obecné rovnice popisující napjatost v kotouči v tečném, radiálním a osovém směru jsou dány vztahy:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= D_1 - D_\omega(1+3\nu)x^2 + \frac{D_2}{x^2}, \\ \sigma_r &= D_1 - D_\omega(3+\nu)x^2 - \frac{D_2}{x^2}, \\ \sigma_o &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Kotouče bez otvoru - Určení integračních konstant D_1 a D_2

Pro kotouče bez otvoru, které mohou být zatěžovány na válcovém povrchu tahovým napětím σ_e, můžeme psát následující okrajové podmínky:

- pro $x = 0$ obdržíme $\sigma_r(0) = \sigma_t(0)$, tj.

$$\lim_{x\to 0} D_1 - D_\omega(3+\nu)x^2 - \frac{D_2}{x^2} = \lim_{x\to 0} D_1 - D_\omega(1+3\nu)x^2 + \frac{D_2}{x^2}. \quad (2)$$

Kotouče bez otvoru - Určení integračních konstant D_1 a D_2

Pro kotouče bez otvoru, které mohou být zatěžovány na válcovém povrchu tahovým napětím σ_e, můžeme psát následující okrajové podmínky:

- pro $x = 0$ obdržíme $\sigma_r(0) = \sigma_t(0)$, tj.

$$\lim_{x \to 0} D_1 - D_\omega(3+\nu)x^2 - \frac{D_2}{x^2} = \lim_{x \to 0} D_1 - D_\omega(1+3\nu)x^2 + \frac{D_2}{x^2}. \quad (2)$$

- pro $x = r$ obdržíme $\sigma_r(x) = \sigma_e$, tj.

$$\sigma_e = D_1 - D_\omega(3+\nu)r^2 - \frac{D_2}{r^2}. \quad (3)$$

Z okrajových podmínek vyplývá následující:

- konstanta D_2 musí splnit podle (2)

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{D_2}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{D_2}{x^2}\right), \tag{4}$$

což je možné jen pro

$$D_2 = 0. \tag{5}$$

Kotouče bez otvoru - Určení integračních konstant D_1 a D_2

Z okrajových podmínek vyplývá následující:

- konstanta D_2 musí splnit podle (2)

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{D_2}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{D_2}{x^2}\right), \tag{4}$$

  což je možné jen pro

$$D_2 = 0. \tag{5}$$

- konstantu D_1 vypočítáme dle (3) a (5) jako

$$D_1 = \sigma_e + D_\omega (3 + \nu) r^2. \tag{6}$$

Kotouče bez otvoru - Výsledné vztahy

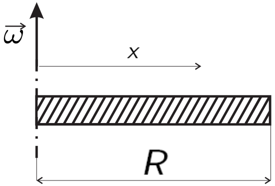
Vztahy (1) popisují napjatost v rotujícím kotouči bez otvoru nabývají po dosazení okrajových podmínek tvaru:

$$
\begin{aligned}
\sigma_t(x) &= \sigma_e + D_\omega(3+\nu)\left(r^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu}x^2\right), \\
\sigma_r(x) &= \sigma_e + D_\omega(3+\nu)(r^2 - x^2), \\
\sigma_o(x) &= 0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Kotouče bez otvoru - Závěr

Pro návrat na začátek výběru klikněte zde.

Kotouče bez otvoru - Volný kotouč



Obrázek: Volný kotouč bez otvoru.

Obecné rovnice popisující napjatost v kotouči v tečném a radiálním směru jsou dány vztahy:

$$\sigma_t = D_1 - D_\omega(1+3\nu)x^2 + \frac{D_2}{x^2}, \tag{8}$$

$$\sigma_r = D_1 - D_\omega(3+\nu)x^2 - \frac{D_2}{x^2}. \tag{9}$$

Kotouče bez otvoru - Určení integračních konstant D_1 a D_2

Na volný kotouč nepůsobí žádná vnější povrchová síla, a proto napětí, která jej deformují, jsou způsobena pouze setrvačnými účinky. Okrajové podmínky pišme v následujícím tvaru:

- pro $x = 0$ obdržíme $\sigma_r(0) = \sigma_t(0)$, tj.

$$\sigma_{r_0} = \sigma_{t_0}. \tag{10}$$

Kotouče bez otvoru - Určení integračních konstant D_1 a D_2

Na volný kotouč nepůsobí žádná vnější povrchová síla, a proto napětí, která jej deformují, jsou způsobena pouze setrvačnými účinky. Okrajové podmínky pišme v následujícím tvaru:

- pro $x = 0$ obdržíme $\sigma_r(0) = \sigma_t(0)$, tj.

$$\sigma_{r_0} = \sigma_{t_0}. \tag{10}$$

- pro $x = R$ obdržíme $\sigma_r(R) = 0$, tj.

$$0 = D_1 - D_\omega(3+\nu)R^2. \tag{11}$$

Kotouče bez otvoru - Určení integračních konstant D_1 a D_2

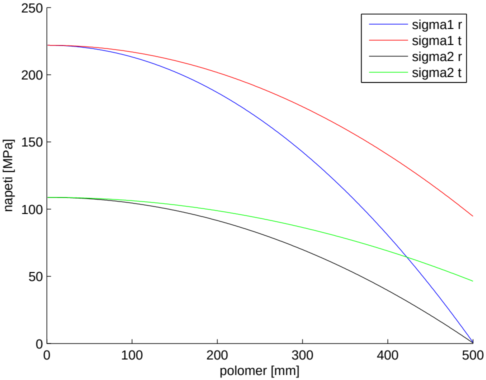
V analogii s podmínkami pro obecný kotouč (5) a (6), získáme z podmínek (10) a (11) tvar integračních konstant pro volný plný kotouč:

$$D_1 = D_\omega (3 + \nu) R^2, \qquad D_2 = 0. \tag{12}$$

Kotouče bez otvoru - Příklady výpočtu

Dáno: $R = 0,5$ m, $\rho = 7800$ kg.m^{-3} a otáčky pro variantu

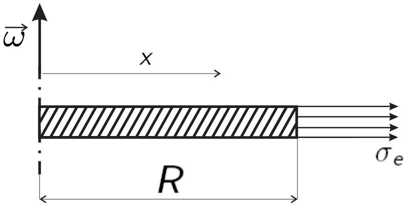
1. $n = 5000$ min^{-1},
2. $n = 3600$ min^{-1}.



Kotouče bez otvoru - Závěr

Pro návrat na začátek výběru klikněte zde.

Kotouče bez otvoru - Kotouč zatížený napětím na vnějším poloměru



Obrázek: Plný kotouč zatížený na poloměru R napětím σ_e.

Obecné rovnice popisující napjatost v kotouči v tečném a radiálním směru jsou dány vztahy:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= D_1 - D_\omega(1+3\nu)x^2 + \frac{D_2}{x^2}, \\ \sigma_r &= D_1 - D_\omega(3+\nu)x^2 - \frac{D_2}{x^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Kotouče bez otvoru - Určení integračních konstant D_1 a D_2

Na kotouč působí povrchová síla, která se také podílí na deformaci kotouče. Integrační konstanty určíme z následujících okrajových podmínek:

- pro $x = 0$ obdržíme $\sigma_r(0) = \sigma_t(0)$, tj.

$$\sigma_{r_0} = \sigma_{t_0}. \tag{14}$$

Na kotouč působí povrchová síla, která se také podílí na deformaci kotouče. Integrační konstanty určíme z následujících okrajových podmínek:

- pro $x = 0$ obdržíme $\sigma_r(0) = \sigma_t(0)$, tj.

$$\sigma_{r_0} = \sigma_{t_0}. \tag{14}$$

- pro $x = R$ obdržíme $\sigma_r(R) = \sigma_e$, tj.

$$\sigma_e = D_1 - D_\omega(3 + \nu)R^2. \tag{15}$$

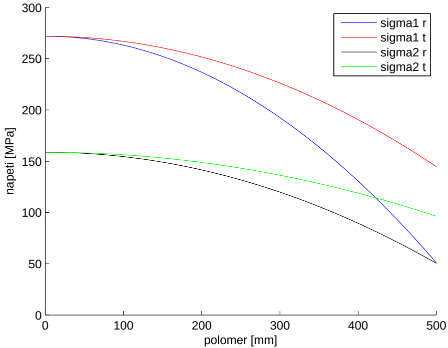
Z podmínek (14) a (15) získáme tvar integračních konstant pro kotouč namáhaný napětím na vnějším poloměru:

$$D_1 = \sigma_e + D_\omega (3 + \nu) R^2, \qquad D_2 = 0. \tag{16}$$

Kotouče bez otvoru - Příklady výpočtu

Dáno: $R = 0,5$ m, $\rho = 7800$ kg.m^{-3}, $\sigma_e = 50$ MPa a otáčky pro variantu

1. $n = 5000$ min^{-1},
2. $n = 3600$ min^{-1}.

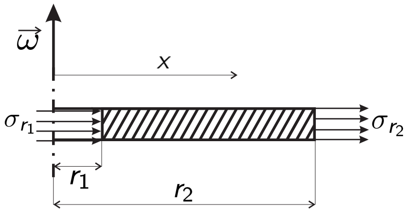


Obrázek: Rozložení radiálního a tečného napětí v kotouči.

Kotouče bez otvoru - Závěr

Pro návrat na začátek výběru klikněte zde.

Kotouče s otvorem - Obecné zadání



Obrázek: Obecně zatížený kotouč s otvorem.

Obecné rovnice popisující napjatost v kotouči v tečném, radiálním a osovém směru jsou dány vztahy:

$$
\begin{aligned}
\sigma_t &= D_1 - D_\omega(1+3\nu)x^2 + \frac{D_2}{x^2}, \\
\sigma_r &= D_1 - D_\omega(3+\nu)x^2 - \frac{D_2}{x^2}, \qquad (17) \\
\sigma_o &= 0.
\end{aligned}
$$

Kotouče s otvorem - Určení integračních konstant D_1 a D_2

Konstanty určíme pomocí okrajových podmínek (na r_1 jde o tlakové napětí a na r_2 se jedná o tahové napětí). Okrajové podmínky tedy nabývají tvaru:

- pro $x = r_1$ obdržíme $\sigma_r(r_1) = \sigma_{r_1}$, tj.

$$-\sigma_{r_1} = D_1 - D_\omega(3+\nu)r_1^2 - \frac{D_2}{r_1^2}. \tag{18}$$

Konstanty určíme pomocí okrajových podmínek (na r_1 jde o tlakové napětí a na r_2 se jedná o tahové napětí). Okrajové podmínky tedy nabývají tvaru:

- pro $x = r_1$ obdržíme $\sigma_r(r_1) = \sigma_{r_1}$, tj.

$$-\sigma_{r_1} = D_1 - D_\omega(3+\nu)r_1^2 - \frac{D_2}{r_1^2}. \qquad (18)$$

- pro $x = r_2$ obdržíme $\sigma_r(r_2) = \sigma_{r_2}$, tj.

$$\sigma_{r_2} = D_1 - D_\omega(3+\nu)r_2^2 - \frac{D_2}{r_2^2}. \qquad (19)$$

Kotouče s otvorem - Určení integračních konstant D_1 a D_2

Úpravou (18) a (19) získáme integrační konstanty ve tvaru:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \frac{\sigma_{r_1} r_1^2 + \sigma_{r_2} r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + D_\omega (3+\nu)(r_2^2 + r_1^2), \\
D_2 &= [\sigma_{r_1} + \sigma_{r_2} + D_\omega (3+\nu)(r_2^2 - r_1^2)] \frac{r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.
\end{aligned} \tag{20}
$$

Kotouče s otvorem -Výsledné vztahy

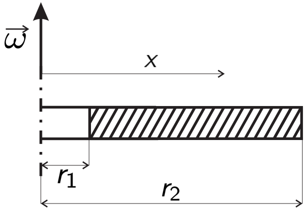
Vztahy (17) popisují napjatost v rotujícím kotouči bez otvoru po dosazení okrajových podmínek a po úpravě nabývají tvaru:

$$
\begin{aligned}
\sigma_r(x) &= (3+\nu)D_\omega(r_1^2 + r_2^2 - r_1^2 r_2^2 x^{-2} - x^2) + \\
&+ [\sigma_{r_1} r_1^2 + \sigma_{r_2} r_2^2 - (\sigma_{r_1} + \sigma_{r_2}) r_1^2 r_1^2 x^{-2}](r_2^2 - r_1^2)^{-1}, \\
\sigma_t(x) &= (3+\nu)D_\omega[r_1^2 + r_2^2 + r_1^2 r_2^2 x^{-2} - (1+3\nu)(3+\nu)^{-1} x^2] + \\
&+ [\sigma_{r_1} r_1^2 + \sigma_{r_2} r_2^2 + (\sigma_{r_1} + \sigma_{r_2}) r_1^2 r_2^2 x^{-2}](r_2^2 - r_1^2)^{-1}, \\
\sigma_o(x) &= 0. \qquad (21)
\end{aligned}
$$

Kotouče s otvorem - Závěr

Pro návrat na začátek výběru klikněte zde.

Kotouče s otvorem - Volný kotouč



Obrázek: Volný kotouč s otvorem.

Obecné rovnice popisující napjatost v kotouči v tečném a v radiálním směru jsou dány vztahy:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= D_1 - D_\omega(1+3\nu)x^2 + \frac{D_2}{x^2}, \\ \sigma_r &= D_1 - D_\omega(3+\nu)x^2 - \frac{D_2}{x^2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Kotouče s otvorem - Určení integračních konstant D_1 a D_2

Konstanty určíme pomocí okrajových podmínek, přičemž na volný kotouč nepůsobí žádné povrchové síly ani na jednom z průměrů r_1 a r_2. Okrajové podmínky nabývají tvaru:

- pro $x = r_1$ obdržíme $\sigma_r(r_1) = 0$, tj.

$$0 = D_1 - D_\omega(3+\nu)r_1^2 - \frac{D_2}{r_1^2}. \tag{23}$$

Kotouče s otvorem - Určení integračních konstant D_1 a D_2

Konstanty určíme pomocí okrajových podmínek, přičemž na volný kotouč nepůsobí žádné povrchové síly ani na jednom z průměrů r_1 a r_2. Okrajové podmínky nabývají tvaru:

- pro $x = r_1$ obdržíme $\sigma_r(r_1) = 0$, tj.

$$0 = D_1 - D_\omega(3+\nu)r_1^2 - \frac{D_2}{r_1^2}. \qquad (23)$$

- pro $x = r_2$ obdržíme $\sigma_r(r_2) = 0$, tj.

$$0 = D_1 - D_\omega(3+\nu)r_2^2 - \frac{D_2}{r_2^2}. \qquad (24)$$

Kotouče s otvorem - Určení integračních konstant D_1 a D_2

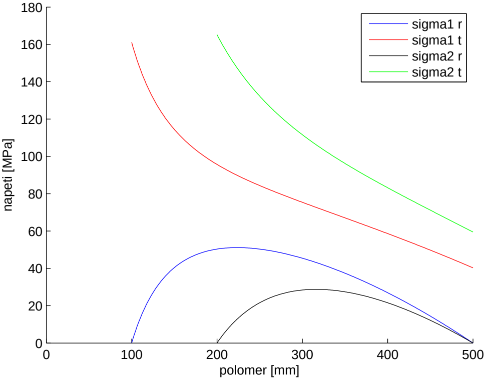
Úpravou (23) a (24) obdržíme následující vztahy:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= D_\omega(3+\nu)(r_2^2 + r_1^2), \\
D_2 &= D_\omega(3+\nu) r_2^2 r_1^2.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Kotouče s otvorem - Příklady výpočtu

Dáno: $n = 3000\ \text{min}^{-1}$, $\rho = 7800\ \text{kg.m}^{-3}$ a poloměry pro variantu

1. $r_1 = 0,1$ m a $r_2 = 0,5$ m,
2. $r_1 = 0,2$ m a $r_2 = 0,5$ m,

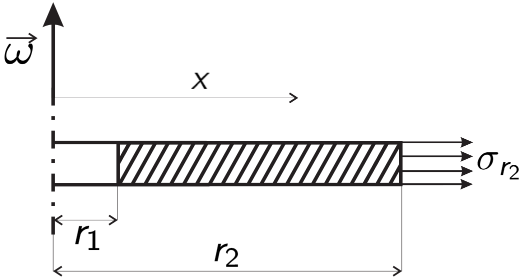


Obrázek: Rozložení radiálního a tečného napětí v kotouči.

Kotouče s otvorem - Závěr

Pro návrat na začátek výběru klikněte zde.

Kotouče s otvorem - Kotouč zatížený tahovým napětím na vnějším poloměru



Obrázek: Kotouč s otvorem zatížený na vnějším poloměru.

Obecné rovnice popisující napjatost v kotouči v tečném a radiálním směru jsou dány vztahy:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= D_1 - D_\omega(1+3\nu)x^2 + \frac{D_2}{x^2}, \\ \sigma_r &= D_1 - D_\omega(3+\nu)x^2 - \frac{D_2}{x^2}. \end{aligned} \tag{26}$$

Určíme konstanty pomoci okrajových podmínek. Při respektování zatížení nabývají okrajové podmínky tvaru:

- pro $x = r_1$ obdržíme $\sigma_r(r_1) = 0$, tj.

$$0 = D_1 - D_\omega(3+\nu)r_1^2 - \frac{D_2}{r_1^2}. \tag{27}$$

Kotouče s otvorem - Určení integračních konstant D_1 a D_2

Určíme konstanty pomoci okrajových podmínek. Při respektování zatížení nabývají okrajové podmínky tvaru:

- pro $x = r_1$ obdržíme $\sigma_r(r_1) = 0$, tj.

$$0 = D_1 - D_\omega(3+\nu)r_1^2 - \frac{D_2}{r_1^2}. \tag{27}$$

- pro $x = r_2$ obdržíme $\sigma_r(r_2) = \sigma_{r_2}$, tj.

$$\sigma_{r_2} = D_1 - D_\omega(3+\nu)r_2^2 - \frac{D_2}{r_2^2}. \tag{28}$$

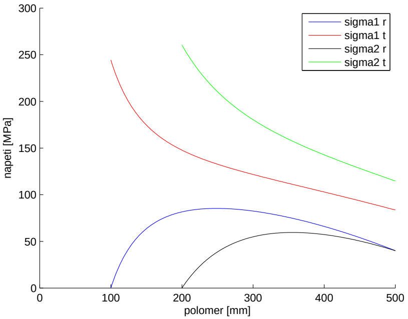
Úpravou (27) a (28) obdržíme následující vztahy:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \frac{\sigma_{r_2} r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + D_\omega (3+\nu)(r_2^2 + r_1^2), \\
D_2 &= [\sigma_{r_2} + D_\omega (3+\nu)(r_2^2 - r_1^2)] \frac{r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.
\end{aligned} \tag{29}
$$

Kotouče s otvorem - Příklady výpočtu

Dáno: $n = 3000\ \text{min}^{-1}$, $\rho = 7800\ \text{kg.m}^{-3}$, povrchové napětí na vnějším poloměru $\sigma_{r_2} = 40$ MPa a poloměry pro variantu

1. $r_1 = 0,1$ m a $r_2 = 0,5$ m,
2. $r_1 = 0,2$ m a $r_2 = 0,5$ m.

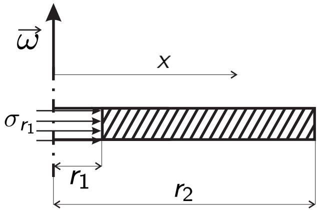


Obrázek: Rozložení radiálního a tečného napětí v kotouči.

Kotouče s otvorem - Závěr

Pro návrat na začátek výběru klikněte zde.

Kotouče s otvorem - Kotouč zatížený tlakovým napětím na vnitřním poloměru



Obrázek: Kotouč s otvorem zatížený na vnitřním poloměru.

Obecné rovnice popisující napjatost v kotoučí v tečném a radiálním směru jsou dány vztahy:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= D_1 - D_\omega(1+3\nu)x^2 + \frac{D_2}{x^2}, \\ \sigma_r &= D_1 - D_\omega(3+\nu)x^2 - \frac{D_2}{x^2}. \end{aligned} \tag{30}$$

Kotouče s otvorem - Určení integračních konstant D_1 a D_2

Určíme konstanty pomocí okrajových podmínek. Povrchové napětí působí na vnitřním poloměru směrem od osy otáčení, čili na r_1 jde o tlakové napětí, tj. musíme tedy psát záporné znaménko.
Při respektování výše uvedeného:

- pro $x = r_1$ obdržíme $\sigma_r(r_1) = -\sigma_{r_1}$, tj.

$$-\sigma_{r_1} = D_1 - D_\omega(3+\nu)r_1^2 - \frac{D_2}{r_1^2}. \tag{31}$$

Kotouče s otvorem - Určení integračních konstant D_1 a D_2

Určíme konstanty pomocí okrajových podmínek. Povrchové napětí působí na vnitřním poloměru směrem od osy otáčení, čili na r_1 jde o tlakové napětí, tj. musíme tedy psát záporné znaménko.
Při respektování výše uvedeného:

- pro $x = r_1$ obdržíme $\sigma_r(r_1) = -\sigma_{r_1}$, tj.

$$-\sigma_{r_1} = D_1 - D_\omega(3+\nu)r_1^2 - \frac{D_2}{r_1^2}. \tag{31}$$

- pro $x = r_2$ obdržíme $\sigma_r(r_2) = 0$, tj.

$$0 = D_1 - D_\omega(3+\nu)r_2^2 - \frac{D_2}{r_2^2}. \tag{32}$$

Kotouče s otvorem - Určení integračních konstant D_1 a D_2

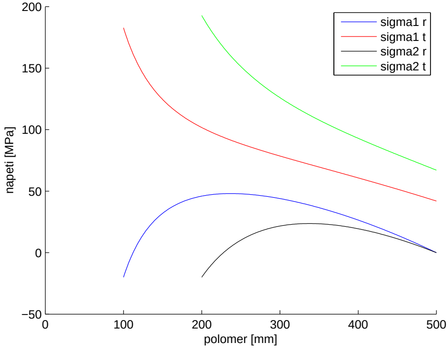
Úpravou (31) a (32) získáme následující vztahy:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\sigma_{r_1} r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + D_\omega (3+\nu)(r_2^2 + r_1^2), \\ D_2 &= [\sigma_{r_1} + D_\omega (3+\nu)(r_2^2 - r_1^2)] \frac{r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}. \end{aligned} \qquad (33)$$

Kotouče s otvorem - Příklady výpočtu

Dáno: $n = 3000$ min^{-1}, $\rho = 7800$ kg.m^{-3}, povrchové napětí na vnitřním poloměru $\sigma_{r_1} = 20$ MPa a poloměry pro variantu

1. $r_1 = 0,1$ m a $r_2 = 0,5$ m,
2. $r_1 = 0,2$ m a $r_2 = 0,5$ m.

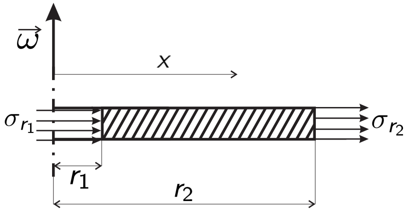


Obrázek: Rozložení radiálního a tečného napětí v kotouči.

Kotouče s otvorem - Závěr

Pro návrat na začátek výběru klikněte zde.

Kotouče s otvorem - Tlak na r_1 a tah na r_2



Obrázek: Kotouč s otvorem zatížený na vnitřním i vnějším poloměru povrchovým napětím.

Obecné rovnice popisující napjatost v kotouči v tečném a radiálním směru jsou dány vztahy:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= D_1 - D_\omega(1+3\nu)x^2 + \frac{D_2}{x^2}, \\ \sigma_r &= D_1 - D_\omega(3+\nu)x^2 - \frac{D_2}{x^2}. \end{aligned} \tag{34}$$

Kotouče s otvorem - Určení integračních konstant D_1 a D_2

Určíme konstanty pomocí okrajových podmínek. Obě napětí působí směrem od osy otáčení. To znamená, že na r_1 jde o tlakové napětí a na r_2 se jedná o tah. S tím korespondují i znaménka v okrajových podmínkách. Potom

- pro $x = r_1$ obdržíme $\sigma_r(r_1) = -\sigma_{r_1}$, tj.

$$-\sigma_{r_1} = D_1 - D_\omega(3+\nu)r_1^2 - \frac{D_2}{r_1^2}. \qquad (35)$$

Kotouče s otvorem - Určení integračních konstant D_1 a D_2

Určíme konstanty pomocí okrajových podmínek. Obě napětí působí směrem od osy otáčení. To znamená, že na r_1 jde o tlakové napětí a na r_2 se jedná o tah. S tím korespondují i znaménka v okrajových podmínkách. Potom

- pro $x = r_1$ obdržíme $\sigma_r(r_1) = -\sigma_{r_1}$, tj.

$$-\sigma_{r_1} = D_1 - D_\omega(3+\nu)r_1^2 - \frac{D_2}{r_1^2}. \tag{35}$$

- pro $x = r_2$ obdržíme $\sigma_r(r_2) = \sigma_{r_2}$, tj.

$$\sigma_{r_2} = D_1 - D_\omega(3+\nu)r_2^2 - \frac{D_2}{r_2^2}. \tag{36}$$

Kotouče s otvorem - Určení integrálních konstant D_1 a D_2

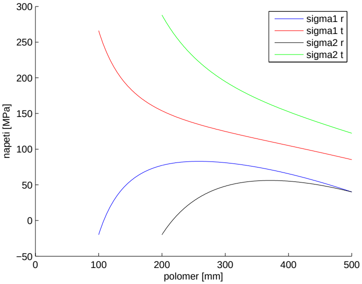
Úpravou (35) a (36) obdržíme následující vztahy:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \frac{\sigma_{r_1} r_1^2 + \sigma_{r_2} r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + D_\omega (3+\nu)(r_2^2 + r_1^2), \\
D_2 &= [\sigma_{r_1} + \sigma_{r_2} + D_\omega (3+\nu)(r_2^2 - r_1^2)] \frac{r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.
\end{aligned} \tag{37}
$$

Kotouče s otvorem - Příklady výpočtu

Dáno: $n = 3000\ \mathrm{min}^{-1}$, $\rho = 7800\ \mathrm{kg.m}^{-3}$, povrchové napětí na vnitřním poloměru $\sigma_{r_1} = 20$ MPa, povrchové napětí na vnějším poloměru $\sigma_{r_2} = 40$ MPa a poloměry pro variantu

1. $r_1 = 0,1$ m a $r_2 = 0,5$ m,
2. $r_1 = 0,2$ m a $r_2 = 0,5$ m.



Obrázek: Rozložení radiálního a tečného napětí v kotouči.

Kotouče s otvorem - Závěr

Pro návrat na začátek výběru klikněte zde.