KŘIVÉ A LOMENÉ PRUTY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

3.1 Shrnutí základních poznatků

V technické praxi se nezřídka setkáváme s případy, kdy lze konstrukce, nebo jejich části, nahradit při výpočtu pevnosti a tuhosti křivými nebo lomenými pruty. Běžně se s těmito úlohami setkáváme ve stavitelství při výpočtech mostních konstrukcí nebo při návrzích budov. Ve strojírenství je to potom například při tuhostních návrzích rámů obráběcích a tvářecích strojů.

Při výpočtech křivých prutů je nutné rozlišovat tenké a silně zakřivené pruty. Jak lze ukázat, není u silně zakřivených prutů průběh napětí lineární, jak je tomu u prutů přímých, ale je hyperbolický. V prutu vzniká také radiální napětí, které je obvykle zanedbatelné. Kromě toho neprochází neutrální osa těžištěm průřezu, ale je posunuta blíže ke středu křivosti prutu. Jako typické příklady silně zakřivených prutů uveďme jeřábový hák nebo článek řetězu. V dalším se však budeme zabývat pouze tenkými rovinnými křivými nebo lomenými pruty, pro které budeme předpokládat:

- Střednici prutu[1], zatížení prutu a vzniklé reakce leží v jedné rovině. V této rovině leží i jedna z hlavních centrálních os setrvačnosti všech příčných průřezů prutu.
- Splnění podmínky $r/h \geq 5$ pro celý prut, kde r je poloměr křivosti prutu a h je výška příčného průřezu. Potom uvažujeme v příčném průřezu lineární průběh normálového napětí od ohybu, přičemž neutrální osa prochází těžištěm. Případné radiální napětí neuvažujeme.
- Splnění podmínky $l/h_{max} \geq 10$, kde l je celková délka střednice prutu a h_{max} je charakteristický rozměr příčného průřezu prutu.
- Materiál prutu lineárně elastický (zatěžování probíhá v oblasti platnosti Hookeova zákona), homogenní a izotropní.
- Malé poměrné deformace, tj. $\varepsilon \ll 1$.
- Platnost Saint-Venantova principu, při kterém se charakter zatížení projevuje jen v jeho blízkém okolí. Princip lokálnosti platí obdobně i v místech náhlé změny průřezu prutu.
- Podmínky rovnováhy sil sestavené na nepřetvořené střednici prutu.

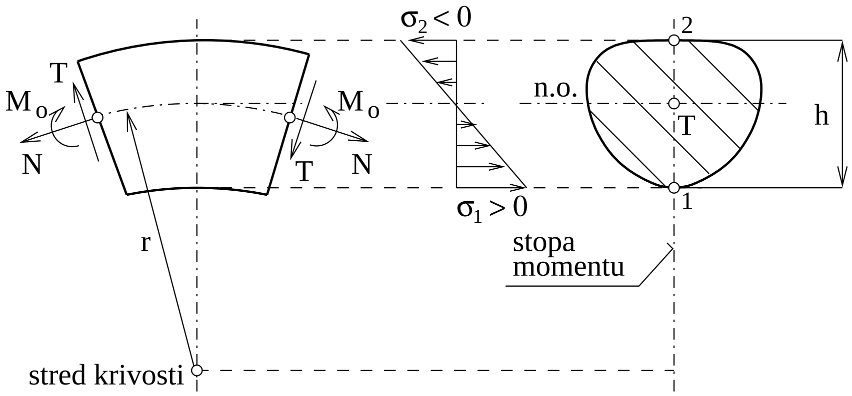
Pevnostní výpočet křivého nebo lomeného prutu, který vyhovuje uvedeným předpokladům, se provádí pouze pro jednoosý stav napjatosti. Vliv případné posouvající síly je v těchto úlohách zanedbatelný. Pevnostní podmínka má potom tvar

$$-\sigma_{Dd} \leq \sigma_{max} \leq \sigma_{Dt}\,, \tag{1}$$

[1] Střednice je křivka spojující těžiště jednotlivých příčných průřezů prutu. Udává tvar křivého prutu.

KŘIVÉ A LOMENÉ PRUTY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek



Obr. 1: Elementární část rovinného křivého prutu.

kde $\sigma_{Dt} > 0$, resp. $\sigma_{Dd} > 0$, je dovolené napětí v tahu, resp. v tlaku. U tvárných materiálů navíc obvykle uvažujeme $\sigma_{Dt} = \sigma_{Dd} = \sigma_D$. Je-li prut namáhaný ohybovým momentem, lze napětí σ_{max} vypočítat obvykle s dostatečnou přesností pomocí vztahů

$$\sigma_1(s) = \frac{M_o(s)}{W_{o1}(s)}\,, \quad \text{nebo} \quad \sigma_2(s) = -\frac{M_o(s)}{W_{o2}(s)} \qquad \text{pro} \qquad s \in \langle 0, l \rangle\,, \tag{2}$$

kde M_o je ohybový moment působící v příčném průřezu prutu a kde W_{o1} a W_{o2} jsou moduly průřezu v ohybu, viz obr. 1. Jestliže vliv osových sil na napjatost není možné zanedbat, přecházejí vztahy (2) do tvarů

$$\sigma_1(s) = \frac{N(s)}{A(s)} + \frac{M_o(s)}{W_{o1}(s)} \quad \text{a} \quad \sigma_2(s) = \frac{N(s)}{A(s)} - \frac{M_o(s)}{W_{o2}(s)} \qquad \text{pro} \qquad s \in \langle 0, l \rangle\,, \tag{3}$$

kde A je velikost plochy příčného průřezu prutu. Neutrální osa (n.o.) v tom případě již neprochází těžištěm průřezu, které je na obr. 1 označeno bodem T. Na obrázku je dále patrná konvence o kladných směrech vnitřních účinků.

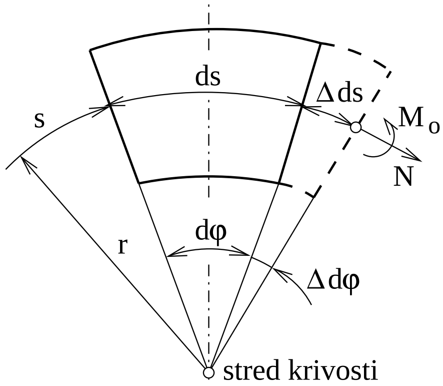
Při výpočtu deformace střednice prutu budeme používat Castiglianovu větu, podle níž je posuv libovolného bodu v obecném směru i, resp. úhel natočení řezu v libovolném bodě ve směru j, dán vztahem

$$u_i = \frac{\partial U}{\partial f_i}\,, \qquad \text{resp.} \qquad \varphi_j = \frac{\partial U}{\partial m_j}\,, \tag{4}$$

kde f_i, resp. m_j, je síla, resp. moment, působící v daném bodě a směru. Ve většině případů tenkých prutů postačuje uvažovat potenciální energii napjatosti prutu U od ohybového momentu, tj.

$$U = \frac{1}{2}\int\limits_{(l)} \frac{M_o^2(s)\mathrm{d}s}{E(s)J(s)}, \tag{5}$$

kde E je modul pružnosti v tahu a J je kvadratický moment vypočítaný k hlavní centrální ose setrvačnosti průřezu. Uvedený výraz je však pouze přibližným vyjádřením celkové potenciální energie napjatosti prutu. Jestliže vyjádříme celkové U lomeného prutu od všech



Obr. 2: Vliv osové síly působící na elementární část rovinného křivého prutu.

silových účinků, tj. od vlivu ohybového momentu, normálové síly a posouvajicí síly, můžeme psát

$$U = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{(l)} \frac{M_o^2(s)\mathrm{d}s}{E(s)J(s)} + \int\limits_{(l)} \frac{N^2(s)\mathrm{d}s}{E(s)A(s)} + \beta\int\limits_{(l)} \frac{T^2(s)\mathrm{d}s}{G(s)A(s)}\right), \tag{6}$$

kde G je modul pružnosti ve smyku a β je koeficient vyjadřující vliv nerovnoměrného rozložení smykového napětí po výšce průřezu. Při vyjádření celkové potenciální energie napjatosti křivého prutu musíme dále vzít v úvahu, že vlivem osové síly se prut nejen protáhne, ale změní též úhel, který svírají soumezné řezy, viz obr. 2. Potom

$$\Delta\mathrm{d}\varphi(s) = \frac{\Delta\mathrm{d}s(s)}{r(s)} = \frac{N(s)\mathrm{d}s}{r(s)E(s)A(s)} \tag{7}$$

a potenciální energie elementární části křivého prutu se změní o hodnotu

$$-M_o(s)\Delta\mathrm{d}\varphi(s) = -\frac{M_o(s)N(s)\mathrm{d}s}{r(s)E(s)A(s)}\,. \tag{8}$$

Celková potenciální energie křivého prutu je pak s přihlédnutím k (6) a (8) rovna

$$U = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{(l)} \frac{M_o^2(s)\mathrm{d}s}{E(s)J(s)} + \int\limits_{(l)} \frac{N^2(s)\mathrm{d}s}{E(s)A(s)} + \beta\int\limits_{(l)} \frac{T^2(s)\mathrm{d}s}{G(s)A(s)} - 2\int\limits_{(l)} \frac{M_o(s)N(s)\mathrm{d}s}{r(s)E(s)A(s)}\right). \tag{9}$$

Staticky neurčité rovinné pruty

Při řešení lomených a křivých prutů se setkáváme s úlohami staticky neurčitými. Statická neurčitost může být způsobena vlivem uložení. Pruty však mohou být i vnitřně staticky neurčité. V těchto případech hovoříme spíše o tzv. rámech, které jsou vlastně uzavřenými křivými nebo lomenými pruty.

V případě staticky neurčité úlohy je odebráno tělesu více stupňů volnosti, než kolik jich úloha má. Odtud plyne, že prut je stabilnější, lépe přenese zatížení a pro obdobnou staticky určitou úlohu je prut únosnější. S tím je spojen i požadavek na menší průřezové rozměry prutu.

Naproti tomu přináší řešení staticky neurčitých úloh některé nevýhody. Abychom mohli vypočítat namáhání konstrukce, musíme spolu s podmínkami rovnováhy sestavit i deformační (přetvárné) podmínky. To obvykle není možné bez znalosti průřezových charakteristik prutu. Je tak nutné učinit jejich odhad a po výpočtu provést ještě pevnostní kontrolu, popř. iteračně celý proces opakovat. Rovněž vliv teploty a popuštění podpor může u staticky neurčitých úloh způsobit přídavné namáhání konstrukce. U staticky určitých úloh se tento vliv neprojeví.

Postup řešení staticky neurčitého rovinného prutu nebo rámu lze shrnout do několika následujících kroků:

- Stanovíme stupeň volnosti n. Pro úlohu staticky neurčitou je $n < 0$. Například jednoduchý rovinný rám je vždy vnitřně 3-krát staticky neurčitý, tj. $n = -3$.
- Odebereme vhodně zvolené nadbytečné vazby v počtu $|n|$ a vytvoříme tzv. základní staticky určitou soustavu. V případě jednoduchého rámu postupujeme obecně tak, že jej v libovolném bodě přerušíme a jeden konec takto vzniklého prutu vetkneme.
- Působení odebraných vazeb nahradíme odpovídajícími reakcemi. U přerušeného rámu připojíme na jeho volný konec ohybový moment a dvě síly, např. ve směru tečny a normály ke střednici prutu.
- Zajistíme, aby deformace základní staticky určité soustavy byla shodná s deformací původní úlohy. Proto předepíšeme základní soustavě v místě každé odebrané jednoduché vazby deformační podmínku zaručující shodu. Vytvoříme tak výpočtový model původní úlohy.
- Předepsané deformace vyjádříme v závislosti na zatížení a neznámých složkách reakcí.
- Vzniklou soustavu $|n|$ lineárních algebraických rovnic (deformačních podmínek) řešíme spolu se třemi podmínkami rovnováhy základní staticky určité soustavy.

Poznámka: Je-li úloha co do tvaru a zatížení symetrická, lze řešení problému zjednodušit, takže stačí provést výpočet pouze části zadané úlohy. Existuje-li jedna osa souměrnosti, můžeme navrhnout výpočtový model, kde je statická neurčitost snížena o jeden stupeň. Obdobně dvě a více os souměrnosti snižují statickou neurčitost o dva stupně.