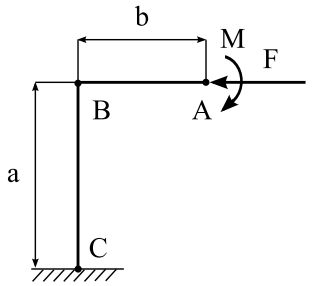
Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

3.3 Řešené příklady

Příklad 1:

Pro lomený prut znázorněný na obr. 1 vyšetřete a zakreslete reakce, vnitřní statické účinky N, T a M_o a stanovte velikosti deformací u, v a φ v bodě A při uvažování vlivu všech vnitřních účinků N, T a M_o na deformaci prutu. Dáno: $F = 15\,\mathrm{kN}$, $M = 5\,\mathrm{kNm}$, $E = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$, $\nu = 0.3$, $J = 2.5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^4$, $\beta = \frac{32}{27}$, $a = 1.5\,\mathrm{m}$, $b = 1\,\mathrm{m}$.



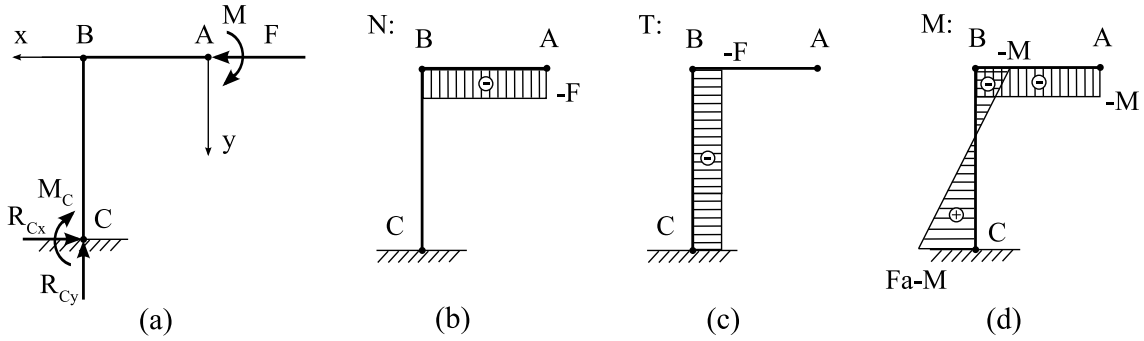
Obr. 1

Řešení:
Jako první krok řešení určíme velikosti reakcí vznikajících ve vetknutí prutu. Vzhledem k tomu, že je zadaná úloha staticky určitá, je možné reakce vypočítat přímo z podmínek statické rovnováhy. V souladu s obr. 2(a) lze uvedené podmínky zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \sum_i F_{ix} = 0: &\quad R_{Cx} - F = 0, \\ \sum_i F_{iy} = 0: &\quad R_{Cy} = 0, \\ \sum_i M_{iC} = 0: &\quad M_C - Fa + M = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Po dosazení zadaných hodnot do rovnic (1) je zřejmé, že

$$R_{Cx} = F = 15\,\mathrm{kN}, \quad R_{Cy} = 0, \quad M_C = Fa - M = 17.5\,\mathrm{kNm}. \tag{2}$$



Obr. 2

V dalším kroku vyšetříme rozložení vnitřních statických účinků N, T a M_o podél částí AB a BC při uvažování souřadnicového systému zakresleného na obr. 2(a). V souladu s kladnou orientací vnitřních účinků, uvedenou v části týkající se shrnutí základních poznatků, lze pro N, T a M_o postupně psát:

$$N = \begin{cases} -F \\ 0 \end{cases}, \qquad T = \begin{cases} 0 \\ -F \end{cases}, \qquad M_o = \begin{cases} -M & \text{pro úsek AB} \\ -M + Fy & \text{pro úsek BC} \end{cases}. \tag{3}$$

Výsledné průběhy jednotlivých vnitřních účinků jsou znázorněny na obr. 2(b)-(d).

Pomocí výše uvedených výsledků lze určit požadované deformace v bodě A, např. použitím Castiglianovy věty. Při uvažování vlivu všech vnitřních účinků na deformaci prutu lze pro posuv u_A ve směru osy x potom psát

$$\begin{aligned} u_A &= \frac{1}{EJ}\int_{(l)} M_o \frac{\partial M_o}{\partial F}\,ds + \frac{1}{EA}\int_{(l)} N \frac{\partial N}{\partial F}\,ds + \frac{\beta}{GA}\int_{(l)} T \frac{\partial T}{\partial F}\,ds = \\ &= \frac{1}{EJ}\left(\int_A^B M_o \frac{\partial M_o}{\partial F}\,ds + \int_B^C M_o \frac{\partial M_o}{\partial F}\,ds\right) + \frac{1}{EA}\left(\int_A^B N \frac{\partial N}{\partial F}\,ds + \int_B^C N \frac{\partial N}{\partial F}\,ds\right) + \\ &\quad + \frac{\beta}{GA}\left(\int_A^B T \frac{\partial T}{\partial F}\,ds + \int_B^C T \frac{\partial T}{\partial F}\,ds\right), \end{aligned} \tag{4}$$

kde pro příslušné derivace funkcí N, T a M_o, které jsou v jednotlivých úsecích popsány vztahy (3), platí

$$\frac{\partial N}{\partial F} = \begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases}, \qquad \frac{\partial T}{\partial F} = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}, \qquad \frac{\partial M_o}{\partial F} = \begin{cases} 0 & \text{pro úsek AB} \\ y & \text{pro úsek BC} \end{cases}. \tag{5}$$

Po dosazení vztahů (3) a (5) do (4) dostáváme pro hledanou deformaci vztah

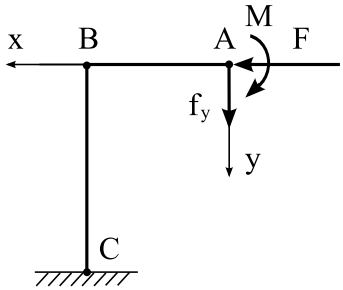
$$\begin{aligned} u_A &= \frac{1}{EJ}\left(0 + \int_0^a (-M + Fy) y\,dy\right) + \frac{1}{EA}\left(\int_0^b (-F)(-1)\,dx + 0\right) + \\ &\quad + \frac{\beta}{GA}\left(0 + \int_0^a (-F)(-1)\,dy\right) = \frac{1}{EJ}\left[\frac{Fy^3}{3} - \frac{My^2}{2}\right]_0^a + \frac{1}{EA}\left[Fx\right]_0^b + \frac{\beta}{GA}\left[Fy\right]_0^a = \\ &= \underbrace{\frac{1}{EJ}\left(\frac{Fa^3}{3} - \frac{Ma^2}{2}\right)}_{I} + \underbrace{\frac{Fb}{EA}}_{II} + \underbrace{\frac{\beta F a}{GA}}_{III}. \end{aligned} \tag{6}$$

Členy I, II a III představují postupně příspěvky ohybového momentu M_o, osové síly N a posouvající síly T do celkové deformace u_A. Využitím vztahů $E/G = 2(1+\nu)$ a $A = \pi d^2/4$ a dosazením konkrétních hodnot ze zadání obdržíme

$$u_A \doteq 21.3 \cdot 10^{-3} + 14.1 \cdot 10^{-6} + 65,4 \cdot 10^{-6} \doteq 21.4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = 21.4\,\mathrm{mm}. \tag{7}$$

Z uvedených hodnot posuvů odpovídajících jednotlivým účinkům je zřejmé, že vliv N a T na deformaci prutu je vůči vlivu M_o zanedbatelný.

Jako další krok řešení provedeme výpočet deformace v_A. Vzhledem k tomu, že v bodě A nepůsobí žádný vnější účinek v podobě osamělé síly ve směru vyšetřované deformace, tj. ve směru osy y, je nutné s ohledem na Castiglianovu větu do tohoto místa přidat fiktivní osamělou sílu $f_y \to 0$, viz obr. 3.



Obr. 3

Díky tomu však dojde ke změně funkcí popisujících rozložení N, T a M_o v jednotlivých částech prutu. Pro tyto účinky lze potom psát:

$$N = \begin{cases} -F & \text{pro úsek AB,} \\ -f_y & \text{pro úsek BC,} \end{cases}$$

$$T = \begin{cases} f_y & \text{pro úsek AB,} \\ -F & \text{pro úsek BC,} \end{cases} \tag{8}$$

$$M_o = \begin{cases} -M - f_y\, x & \text{pro úsek AB,} \\ -M + Fy - f_y\, b & \text{pro úsek BC.} \end{cases}$$

Podle Castiglianovy věty pro posuv v_A v tomto případě platí

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{1}{EJ}\int_{(l)} M_o \frac{\partial M_o}{\partial f_y}\,ds + \frac{1}{EA}\int_{(l)} N \frac{\partial N}{\partial f_y}\,ds + \frac{\beta}{GA}\int_{(l)} T \frac{\partial T}{\partial f_y}\,ds = \\ &= \frac{1}{EJ}\left(\int_A^B M_o \frac{\partial M_o}{\partial f_y}\,ds + \int_B^C M_o \frac{\partial M_o}{\partial f_y}\,ds\right) + \frac{1}{EA}\left(\int_A^B N \frac{\partial N}{\partial f_y}\,ds + \int_B^C N \frac{\partial N}{\partial f_y}\,ds\right) + \\ &\quad + \frac{\beta}{GA}\left(\int_A^B T \frac{\partial T}{\partial f_y}\,ds + \int_B^C T \frac{\partial T}{\partial f_y}\,ds\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Příslušné derivace funkcí N, T a M_o pro jednotlivé úseky lze snadno vyjádřit pomocí vztahů (8). Potom dostáváme

$$\frac{\partial N}{\partial f_y} = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}, \qquad \frac{\partial T}{\partial f_y} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \qquad \frac{\partial M_o}{\partial f_y} = \begin{cases} -x & \text{pro úsek AB} \\ -b & \text{pro úsek BC} \end{cases}. \tag{10}$$

Po dosazení (8) a (10) do vztahu (9) lze pro hledaný posuv psát

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{1}{EJ}\left(\int_0^b (-M - f_y\, x)(-x)dx + \int_0^a (-M + Fy - f_y\, b)(-b)dy\right) + \\ &\quad + \frac{1}{EA}\left(0 + \int_0^a (-f_y)(-1)dy\right) + \frac{\beta}{GA}\left(\int_0^b f_y 1 dx + 0\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Vzhledem k tomu, že pro velikost fiktivní síly platí $f_y \to 0$, vztah (11) se zjednoduší na tvar

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{1}{EJ}\left(\int_0^b Mx\,dx + \int_0^a (M - Fy)b\,dy\right) + 0 + 0 = \\ &= \underbrace{\frac{1}{EJ}\left(\frac{Mb^2}{2} + Mab - \frac{Fa^2b}{2}\right)}_{I} + \underbrace{0}_{II} + \underbrace{0}_{III}. \end{aligned} \tag{12}$$

Členy I, II a III opět postupně představují příspěvky jednotlivých vnitřních účinků M_o, N a T do celkové deformace v_A. Z uvedeného je zřejmé, že příspěvek N a T je nulový. Po dosazení konkrétních hodnot ze zadání získáme výslednou velikost hledaného posuvu

$$v_A \doteq -13.0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = -13\,\mathrm{mm}. \tag{13}$$

Na závěr vyšetřování deformací v bodě A určíme velikost úhlu natočení φ_A. Vzhledem k tomu, že v bodě A působí ve směru hledané deformace φ_A osamělý vnější účinek, konkrétně ohybový moment M (viz obr. 3), není již nutné při určování této deformace přidávat do bodu A fiktivní vnější účinek jako při výpočtu v_A, ale můžeme postupovat analogicky, jako v případě určování u_A s využitím vztahů (3). Pro velikost φ_A potom podle Castiglianovy věty platí

$$\varphi_A = \frac{1}{EJ}\int_{(l)} M_o \frac{\partial M_o}{\partial M}\,ds + \frac{1}{EA}\int_{(l)} N \frac{\partial N}{\partial M}\,ds + \frac{\beta}{GA}\int_{(l)} T \frac{\partial T}{\partial M}\,ds. \tag{14}$$

Je však zřejmé, že vnější ohybový moment M má nulový příspěvek jak do osové síly N, tak i do posouvající síly T v obou úsecích, tj. příslušné derivace $\frac{\partial N}{\partial M}$ a $\frac{\partial T}{\partial M}$ jsou tedy nulové, a proto lze poslední dva členy vztahu (14), které představují příspěvek N a T do celkové deformace φ_A, položit rovné 0. Vztah (14) se potom redukuje na tvar

$$\varphi_A = \frac{1}{EJ}\int_{(l)} M_o \frac{\partial M_o}{\partial M}\,ds = \frac{1}{EJ}\left(\int_A^B M_o \frac{\partial M_o}{\partial M}\,ds + \int_B^C M_o \frac{\partial M_o}{\partial M}\,ds\right), \tag{15}$$

což po provedení příslušných derivací funkce M_o, popsané v jednotlivých částech prutu vztahy (3), vede na

$$\varphi_A = \frac{1}{EJ}\left(\int_0^b (-M)(-1)dx + \int_0^a (Fy - M)(-1)dy\right) = \frac{1}{EJ}\left[M(a+b) - \frac{Fa^2}{2}\right]. \tag{16}$$

Po dosazení konkrétních hodnot potom dostáváme

$$\varphi_A \doteq -8.3 \cdot 10^{-3}\mathrm{rad} \doteq -0.48^\circ, \tag{17}$$

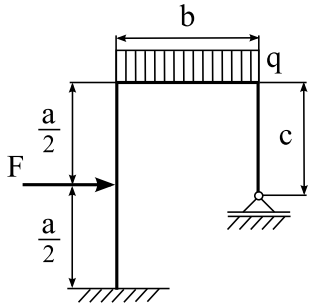
což znamená, že prut se v místě A natočí o úhel 0.48° proti směru působení momentu M.

KŘIVÉ A LOMENÉ PRUTY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Příklad 2:

Proveďte dimenzování lomeného prutu čtvercového průřezu o straně h zatíženého silou F a spojitým zatížením q dle obr. 1. Při řešení uvažujte pouze vliv ohybového momentu M_o na deformaci prutu. Dáno: $F = 8\,\mathrm{kN}$, $q = 10\,\mathrm{kN/m}$, $Re = 200\,\mathrm{MPa}$, $k = 1.5$, $a = 2\,\mathrm{m}$, $b = 1.5\,\mathrm{m}$, $c = 1.2\,\mathrm{m}$.



Obr. 1

Řešení:

Jako první krok řešení je nutné stanovit velikosti reakcí ve vazbách. Volme orientaci reakcí podle obr. 2(a) a sestavme příslušné statické podmínky rovnováhy:

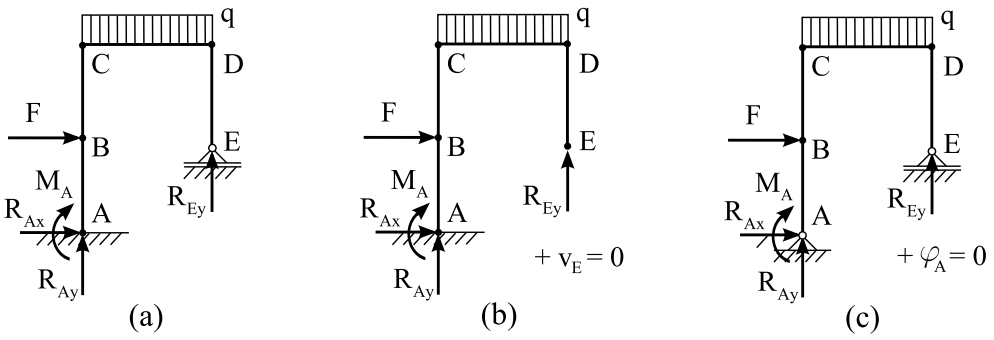
$$\begin{aligned}
\sum_i F_{ix} = 0: &\quad R_{Ax} + F = 0,\\
\sum_i F_{iy} = 0: &\quad R_{Ay} - qb + R_{Ey} = 0,\\
\sum_i M_{iA} = 0: &\quad M_A + F\,\frac{a}{2} + qb\,\frac{b}{2} - R_{Ey}\,b = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Rovnice (1) představují soustavu 3 rovnic pro 4 neznámé reakce R_{Ax}, R_{Ay}, M_A a R_{Ey}, tj. úloha je 1× staticky neurčitá. K tomu, abychom mohli tento problém vyřešit, je nutné provést změnu uložení prutu tak, aby se úloha stala staticky určitou, a formulovat příslušnou deformační podmínku, tzn. sestavit k zadané úloze tzv. výpočtový model. V následujícím textu provedeme řešení pro výpočtové modely znázorněné na obr. 2(b)-(c). Označme tyto modely postupně I a II.

Řešení úlohy pomocí modelu I:

V tomto případě jsme úlohu převedli na problém staticky určitého vetknutého lomeného prutu, na jehož konci působí neznámý staticky neurčitý účinek R_{Ey}. Deformační podmínku lze potom formulovat ve tvaru

$$v_E = 0. \tag{2}$$



Obr. 2

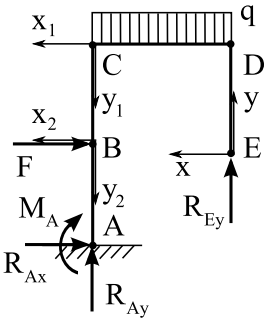
Rovnice (2) společně s rovnicemi (1) pak představují 4 rovnice pro stanovení 4 neznámých reakcí R_{Ax}, R_{Ay}, M_A a R_{Ey}. Prvním krokem řešení této soustavy rovnic je vyjádření (2) pomocí těchto neznámých. Za tímto účelem využijeme např. Castiglianovu větu. Při uvažování pouze vlivu ohybového momentu na deformaci prutu lze podle této věty určit posuv v_E obecně jako

$$v_E = \frac{1}{EJ} \int_{(l)} M_o \, \frac{\partial M_o}{\partial R_{Ey}} \, ds, \tag{3}$$

což lze pro řešenou úlohu rozepsat do tvaru

$$v_E = \frac{1}{EJ} \left(\int_E^D M_o \, \frac{\partial M_o}{\partial R_{Ey}} \, ds + \int_D^C M_o \, \frac{\partial M_o}{\partial R_{Ey}} \, ds + \int_C^B M_o \, \frac{\partial M_o}{\partial R_{Ey}} \, ds + \int_B^A M_o \, \frac{\partial M_o}{\partial R_{Ey}} \, ds \right). \tag{4}$$

Pro funkci ohybového momentu M_o a pro její derivaci $\frac{\partial M_o}{\partial R_{Ey}}$ podle obr. 3 platí



Obr. 3

$$M_o = \begin{cases} 0 & \text{pro úsek ED,} \\ R_{Ey}\, x - \frac{qx^2}{2} & \text{pro úsek DC,} \\ R_{Ey}\, b - \frac{qb^2}{2} & \text{pro úsek CB,} \\ R_{Ey}\, b - \frac{qb^2}{2} - F y_2 & \text{pro úsek BA,} \end{cases} \tag{5}$$

$$\frac{\partial M_o}{\partial R_{Ey}} = \begin{cases} 0 & \text{pro úsek ED,} \\ x & \text{pro úsek DC,} \\ b & \text{pro úsek CB,} \\ b & \text{pro úsek BA,} \end{cases} \tag{6}$$

Po dosazení (5) a (6) do (4) dostáváme

$$v_E = \frac{1}{EJ} \left[\int_0^b \left(R_{Ey}\, x - \frac{qx^2}{2} \right) x dx + \int_0^{a/2} \left(R_{Ey}\, b - \frac{qb^2}{2} \right) b dy_1 + \int_0^{a/2} \left(R_{Ey}\, b - \frac{qb^2}{2} - F y_2 \right) b dy_2 \right]. \tag{7}$$

Po provedení integrace lze (7) přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} v_E &= \frac{1}{EJ} \left(\frac{R_{Ey}\, b^3}{3} - \frac{qb^4}{8} + \frac{R_{Ey}\, ab^2}{2} - \frac{qab^3}{4} + \frac{R_{Ey}\, ab^2}{2} - \frac{qab^3}{4} - \frac{Fa^2 b}{8} \right) = \\ &= \frac{1}{EJ} \left[\frac{R_{Ey}\, b^2}{3} (3a + b) - \frac{qb^3}{8} (4a + b) - \frac{Fa^2 b}{8} \right]. \end{aligned} \tag{8}$$

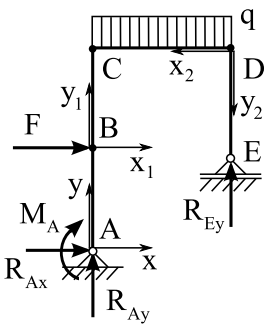
Podle deformační podmínky (2) má být ale tato deformace nulová, tj. musí platit

$$\left[\frac{R_{Ey}\, b^2}{3} (3a + b) - \frac{qb^3}{8} (4a + b) - \frac{Fa^2 b}{8} \right] = 0. \tag{9}$$

Rovnice (9) společně s rovnicemi (1) představují soustavu 4 algebraických rovnic pro 4 neznámé, kterou lze již snadno řešit.

Nyní budeme opakovat celý postup hledání 4. rovnice k rovnicím (1), ale s pomocí výpočtového modelu II, viz obr. 2(c).

Řešení úlohy pomocí modelu II:
V tomto případě byla původní úloha převedena na problém staticky určitého lomeného prutu na dvou podporách, z nichž jedna je posuvná. Prut je v tomto případě zatížen známými účinky F a q a neznámým staticky neurčitým momentem M_A, viz obr. 4.



Obr. 4

Deformační podmínku lze potom formulovat ve tvaru

$$\varphi_A = 0, \tag{10}$$

přičemž k vyjádření velikosti úhlu φ_A pomocí zatím neznámých reakčních účinků opět využijeme Castiglianovu větu. Pro tuto deformaci lze psát

$$\varphi_A = \frac{1}{EJ} \int\limits_{(l)} M_o \frac{\partial M_o}{\partial M_A}\, ds, \tag{11}$$

což lze rozepsat do tvaru

$$\varphi_A = \frac{1}{EJ} \left(\int\limits_A^B M_o \frac{\partial M_o}{\partial M_A}\, ds + \int\limits_B^C M_o \frac{\partial M_o}{\partial M_A}\, ds + \int\limits_C^D M_o \frac{\partial M_o}{\partial M_A}\, ds + \int\limits_D^E M_o \frac{\partial M_o}{\partial M_A}\, ds \right), \tag{12}$$

kde funkci ohybového momentu M_o v jednotlivých úsecích prutu můžeme podle obr. 4 vyjádřit jako

$$M_o = \begin{cases} M_A - R_{Ax}\, y & \text{pro úsek AB,} \\ M_A - R_{Ax} \left(\frac{a}{2} + y_1\right) - F y_1 & \text{pro úsek BC,} \\ M_A - R_{Ax}\, a - F\, \frac{a}{2} + R_{Ay}\, x_1 - \frac{q {x_1}^2}{2} & \text{pro úsek CD,} \\ M_A - R_{Ax}\, (a - y_2) - F \left(\frac{a}{2} - y_2\right) + R_{Ay}\, b - \frac{q b^2}{2} & \text{pro úsek DE.} \end{cases} \tag{13}$$

Vyjádřením ohybového momentu M_o v poli DE jako součtu všech vnějších momentů působících od myšleného řezu v úseku DE ve směru od bodu E lze snadno ukázat, že poslední funkce v (13) je rovna nule[1]. Dále je nutné si uvědomit, že velikost reakce R_{Ay} je funkcí hledaného momentu M_A. Tuto závislost lze odvodit pomocí druhé a třetí rovnice v (1) ve tvaru

$$R_{Ay} = \frac{qb}{2} - \frac{M_A}{b} - \frac{Fa}{2b}\,. \tag{14}$$

[1]K tomuto závěru lze také dojít pomocí momentové podmínky rovnováhy všech vnějších účinků k bodu ležícímu v obecné vzdálenosti y_2 od bodu D.

Dosazením (14) do vztahů (13) a po úpravě dostáváme výsledné funkce popisující rozložení M_o v jednotlivých částech prutu ve tvaru

$$M_o = \begin{cases} M_A - R_{Ax}\, y & \text{pro úsek AB,} \\ M_A - R_{Ax}\left(\frac{a}{2} + y_1\right) - F y_1 & \text{pro úsek BC,} \\ M_A\left(1 - \frac{x_1}{b}\right) - R_{Ax}\, a - \frac{Fa}{2}\left(1 + \frac{x_1}{b}\right) - \frac{q{x_1}^2}{2}\left(1 - \frac{b}{x_1}\right) & \text{pro úsek CD,} \\ 0 & \text{pro úsek DE.} \end{cases} \tag{15}$$

Potom můžeme příslušné derivace funkce M_o vyskytující se v (12) vyjádřit jako

$$\frac{\partial M_o}{\partial M_A} = \begin{cases} 1 & \text{pro úsek AB,} \\ 1 & \text{pro úsek BC,} \\ \left(1 - \frac{x_1}{b}\right) & \text{pro úsek CD,} \\ 0 & \text{pro úsek DE.} \end{cases} \tag{16}$$

Dosazením vztahů (15) a (16) do výrazu (12) dostáváme

$$\begin{aligned} \varphi_A \;=\; & \frac{1}{EJ}\Bigg\{ \int_0^{a/2} (M_A - R_{Ax}\, y)dy + \int_0^{a/2} \Big[M_A - R_{Ax}\left(\frac{a}{2} + y_1\right) - F y_1\Big] dy_1 + \\ & + \int_0^{b} \left[M_A\Big(1 - \frac{x_1}{b}\Big) - R_{Ax}a - \frac{Fa}{2}\Big(1 + \frac{x_1}{b}\Big) - \frac{q{x_1}^2}{2}\left(1 - \frac{b}{x_1}\right)\right]\Big(1 - \frac{x_1}{b}\Big) dx_1 \Bigg\}, \end{aligned} \tag{17}$$

což po provedení integrace a úpravě vede na

$$\varphi_A \;=\; \frac{1}{EJ}\left[\frac{M_A}{3}(3a + b) - \frac{R_{Ax}a}{2}(a + b) - \frac{Fab}{24}(8 + 3a) + \frac{qb^3}{24}\right]. \tag{18}$$

Z deformační podmínky (10) ale plyne

$$\frac{M_A}{3}(3a + b) - \frac{R_{Ax}a}{2}(a + b) - \frac{Fab}{24}(8 + 3a) + \frac{qb^3}{24} = 0. \tag{19}$$

Rovnice (19) společně se třemi rovnicemi (1) představují systém 4 algebraických rovnic, jehož řešením je již možné stanovit velikosti neznámých reakcí.

Porovnáním tvaru rovnice (19) s tvarem rovnice (9) je zřejmé, že hledat řešení soustavy rovnic (1) s (9), která je výsledkem použití výpočtového modelu I, bude snažší, než řešit soustavu (1) s (19) vyplývající z modelu II. Lze však snadno ukázat, že řešení obou těchto soustav jsou shodná.

Provedeme-li řešení soustavy (1) s (9), získáme pro hledané reakce obecné vztahy

$$\begin{aligned} & R_{Ax} = -F, \quad R_{Ay} = \frac{qb^2(12a + 5b) - 3Fa^2}{8b(3a + b)}, \quad M_A = -\frac{qb^3 + Fa(9a + 4b)}{8(3a + b)}, \\ & R_{Ey} = \frac{3\left[qb^2(4a + b) + Fa^2\right]}{8b(3a + b)}. \end{aligned} \tag{20}$$

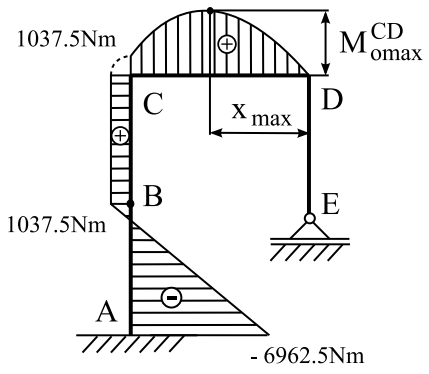
Po dosazení zadaných hodnot dostáváme konkrétní velikosti hledaných reakcí

$$R_{Ax} = -8000\,\mathrm{N}, \quad R_{Ay} \doteq 6808.3\,\mathrm{N}, \quad M_A = -6962.5\,\mathrm{Nm} \quad \text{a} \quad R_{Ey} \doteq 8191.7\,\mathrm{N}. \tag{21}$$

Nyní již známe velikosti všech reakcí a můžeme tak přistoupit k dimenzování lomeného prutu. Nejprve je nutné vyšetřit velikost maximálního vnitřního ohybového momentu $M_{o\,max}$ vznikajícího v prutu, tj. musíme vyšetřit konkrétní podobu funkce M_o v jednotlivých částech prutu. To provedeme prostým dosazením hodnot (21) do (5) (nebo do (15)). Po dosazení a s ohledem na zadané hodnoty lze (5) vyjádřit jako

$$M_o = \begin{cases} 0 & \text{pro úsek ED,} \\ 8191.7x - 5000x^2 & \text{pro úsek DC } (M_o(0) = 0, M_o(b) = 1037.5\,\mathrm{Nm}), \\ 1037.5 & \text{pro úsek CB,} \\ 1037.5 - 8000y_2 & \text{pro úsek BA } (M_o(0) = 1037.5\,\mathrm{Nm}, M_o(\frac{a}{2}) = -6962.5\,\mathrm{Nm}), \end{cases} \tag{22}$$

kde souřadnice x a y_2 jsou zavedeny v obr. 3.



Obr. 5

Výsledné rozložení momentu M_o v jednotlivých částech prutu je znázorněno na obr. 5. Z uvedeného obrázku je patrné, že pro nalezení hodnoty $M_{o\,max}$ je nejprve nutné ještě vyšetřit velikost maximálního ohybového momentu $M_{o\,max}^{CD}$ na intervalu CD, kde je funkce M_o popsána kvadratickou závislostí (jedná se o konkávní parabolu, neboť 2. derivace této funkce je záporná). Z podmínky nulovosti 1. derivace však snadno určíme, že maxima $M_{o\,max}^{CD}$ tato funkce nabývá ve vzdálenosti $x_{max} \doteq 0.8192\,\mathrm{m}$ od bodu D (viz obr. 5). Po dosazení této vzdálenosti do předpisu příslušné funkce obdržíme hodnotu $M_{o\,max}^{CD} \doteq 3355.2\,\mathrm{Nm}$. Z výše uvedeného je tedy zřejmé, že dimenzování prutu musíme provést pro hodnotu $M_{o\,max} = 6962.5\,\mathrm{Nm}$.

Vlastní dimenzování provedeme pomocí pevnostní podmínky ve tvaru

$$\sigma_{max} \le \sigma_D, \quad \text{kde} \quad \sigma_{max} = \frac{M_{o\,max}}{W_o}, \;\; W_o = \frac{h^3}{6}, \;\; \sigma_D = \frac{Re}{k}, \tag{23}$$

což po úpravě a dosazení zadaných hodnot vede na

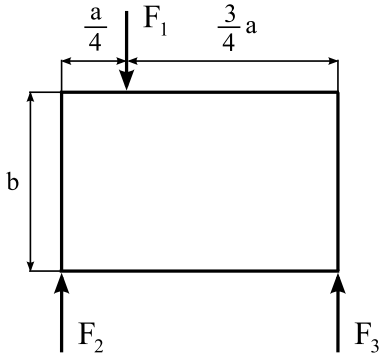
$$\frac{6M_{o\,max}}{h^3} \le \frac{Re}{k} \quad \Rightarrow \quad h \ge \sqrt[3]{\frac{6kM_{o\,max}}{Re}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1.5 \cdot 6962.5}{200 \cdot 10^6}} \doteq 67.9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = 67.9\,\mathrm{mm}. \tag{24}$$

Tím jsme stanovili minimální rozměr čtvercového průřezu staticky neurčitého lomeného prutu tak, aby byla splněna pevnostní podmínka při zadané bezpečnosti.

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Příklad 3:

Dimenzujte rovinný uzavřený rám znázorněný na obr. 1. Při řešení uvažujte pouze vliv ohybového momentu M_o na deformaci rámu. Dáno: $F_1 = 10\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 7.5\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 2.5\,\mathrm{kN}$, $Re = 250\,\mathrm{MPa}$, $k = 1.5$, $a = 2\,\mathrm{m}$, $b = 1.5\,\mathrm{m}$.



Obr. 1

Řešení:

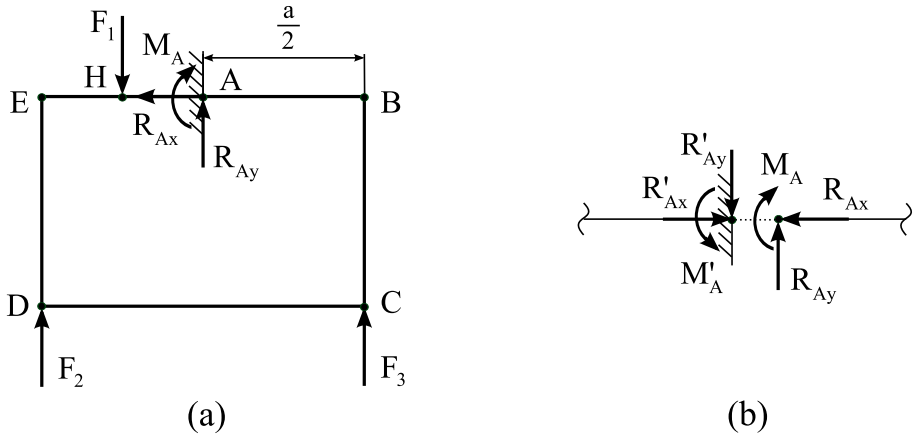
Zadaná úloha je 3× staticky neurčitá (vnitřně) a s ohledem na rozložení působících sil není symetrická. Proto při jejím řešení budeme postupovat stejně, jako při řešení obecných uzavřených rovinných rámů.

V libovolném místě A vedeme myšlený řez, čímž se z uzavřeného rámu stane lomený otevřený prut, jehož jeden konec vetkneme. Druhý konec pak zatížíme třemi neznámými silovými účinky R_{Ax}, R_{Ay} a M_A (viz obr. 2(a)). Je zřejmé, že tyto přidané silové účinky, které jsou rovny vnitřním silovým účinkům vznikajícím v bodě A, vyvolají v myšleném vetknutí reakce R'_{Ax}, R'_{Ay} a M'_A (viz detail řezu v bodě A na obr. 2(b)). Z podmínek rovnováhy vnějších účinků plyne, že tyto reakce mají stejnou velikost jako účinky R_{Ax}, R_{Ay} a M_A, pouze jsou opačně orientovány (proto byly voleny tak, jak je znázorněno na obr. 2(b)).

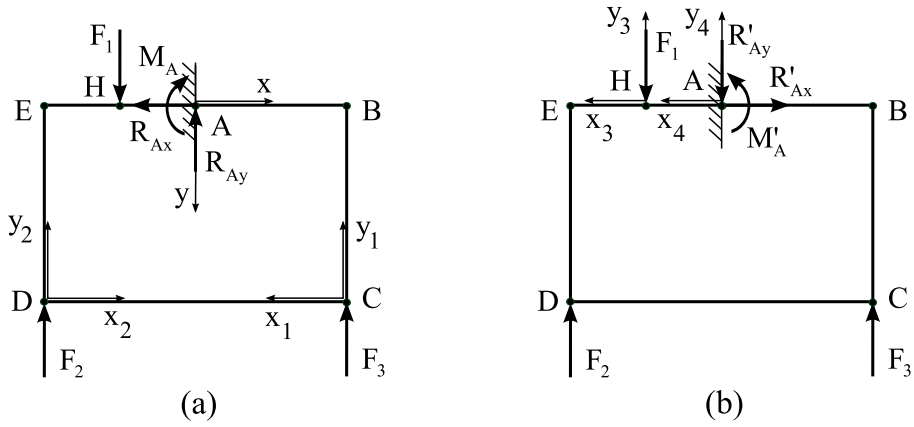
Tímto krokem jsme převedli zadanou úlohu na problém staticky určitého lomeného prutu, který je zatížen zatím neznámými staticky neurčitými účinky R_{Ax}, R_{Ay} a M_A. Jejich velikost určíme ze tří deformačních podmínek formulovaných v bodě A ve tvaru

$$u_A = 0, \quad v_A = 0, \quad \varphi_A = 0. \tag{1}$$

Rovnice (1) společně s obr. 2 tvoří výpočtový model zadané staticky neurčité úlohy.



Obr. 2



Obr. 3

Jak bylo uvedeno, velikosti účinků R_{Ax}, R_{Ay} a M_A určíme z rovnic (1), přičemž příslušné deformace stanovíme pomocí Castiglianovy věty při uvažování pouze vlivu ohybového momentu na deformaci rámu. Po zavedení lokálních souřadnicových systémů, jak je znázorněno na obr. 3(a)-(b), můžeme pro funkci M_o v jednotlivých částech prutu psát

$$M_o = \begin{cases} M_A + R_{Ay}\,x & \text{pro úsek AB,} \\ M_A + R_{Ay}\,\frac{a}{2} - R_{Ax}\,y & \text{pro úsek BC,} \\ M_A + R_{Ay}\left(\frac{a}{2} - x_1\right) - R_{Ax}\,b - F_3 x_1 & \text{pro úsek CD,} \\ M_A - R_{Ay}\,\frac{a}{2} - R_{Ax}\,(b - y_2) - F_3 a & \text{pro úsek DE,} \\ M_A - R_{Ay}\left(\frac{a}{4} + x_3\right) - F_1 x_3 & \text{pro úsek EH,} \\ M_A - R_{Ay}\,x_4 & \text{pro úsek HA,} \end{cases} \tag{2}$$

kde funkce popisující rozložení M_o v posledních dvou úsecích, tj. EH a HA, jsme vyjádřili jako součet příslušných vnějších účinků po pravé straně řezu, tj. od vetknutí. Přitom jsme zároveň využili rovností $R'_{Ax} = R_{Ax}$, $R'_{Ay} = R_{Ay}$ a $M'_A = M_A$ plynoucích ze statických podmínek rovnováhy vnějších sil.

K určení deformací u_A, v_A a φ_A pomocí Castiglianovy věty je nutné kromě funkce M_o znát ještě její derivace, a to konkrétně $\frac{\partial M_o}{\partial R_{Ax}}$, $\frac{\partial M_o}{\partial R_{Ay}}$ a $\frac{\partial M_o}{\partial M_A}$. S ohledem na vztahy (2) lze pro tyto derivace psát

$$\frac{\partial M_o}{\partial R_{Ax}} = \begin{cases} 0 \\ -y \\ -b \\ y_2 - b \\ 0 \\ 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial M_o}{\partial R_{Ay}} = \begin{cases} x \\ \frac{a}{2} \\ \left(\frac{a}{2} - x_1\right) \\ -\frac{a}{2} \\ -\left(\frac{a}{4} + x_3\right) \\ -x_4 \end{cases}, \quad \frac{\partial M_o}{\partial M_A} = \begin{cases} 1 & \text{pro úsek AB} \\ 1 & \text{pro úsek BC} \\ 1 & \text{pro úsek CD} \\ 1 & \text{pro úsek DE} \\ 1 & \text{pro úsek EH} \\ 1 & \text{pro úsek HA} \end{cases}. \tag{3}$$

Nyní již můžeme určit příslušné deformace. Nejprve vypočteme velikost posuvu u_A.

Podle Castiglianovy věty platí

$$u_A = \frac{1}{EJ}\left(\int_A^B M_o\frac{\partial M_o}{\partial R_{Ax}}\,ds+\int_B^C M_o\frac{\partial M_o}{\partial R_{Ax}}\,ds+\int_C^D M_o\frac{\partial M_o}{\partial R_{Ax}}\,ds+\int_D^E M_o\frac{\partial M_o}{\partial R_{Ax}}\,ds+\right.$$
$$\left.+\int_E^H M_o\frac{\partial M_o}{\partial R_{Ax}}\,ds+\int_H^A M_o\frac{\partial M_o}{\partial R_{Ax}}\,ds\right). \tag{4}$$

Po dosazení (2) a příslušných derivací z (3) do vztahu (4) dostáváme

$$u_A = \frac{1}{EJ}\left\{-\int_0^b\Big(M_A+R_{Ay}\frac{a}{2}-R_{Ax}y\Big)y\,dy-\int_0^a\Big[M_A+R_{Ay}\Big(\frac{a}{2}-x_1\Big)-R_{Ax}b-F_3x_1\Big]b\,dx_1+\right.$$
$$\left.+\int_0^b\Big[M_A-R_{Ay}\,\frac{a}{2}-R_{Ax}\,(b-y_2)-F_3a\Big](y_2-b)dy_2\right\}, \tag{5}$$

což po integraci a úpravě vede na výsledné vyjádření posuvu u_A ve tvaru

$$u_A = \frac{b}{EJ}\left[R_{Ax}b\left(a+\frac{2}{3}\,b\right)+\left(\frac{1}{2}\,F_3a-M_A\right)(a+b)\right]. \tag{6}$$

Zcela analogickým postupem určíme deformaci v_A. Podle Castiglianovy věty lze tento posuv vyjádřit vztahem

$$v_A = \frac{1}{EJ}\left(\int_A^B M_o\frac{\partial M_o}{\partial R_{Ay}}\,ds+\int_B^C M_o\frac{\partial M_o}{\partial R_{Ay}}\,ds+\int_C^D M_o\frac{\partial M_o}{\partial R_{Ay}}\,ds+\int_D^E M_o\frac{\partial M_o}{\partial R_{Ay}}\,ds+\right.$$
$$\left.+\int_E^H M_o\frac{\partial M_o}{\partial R_{Ay}}\,ds+\int_H^A M_o\frac{\partial M_o}{\partial R_{Ay}}\,ds\right), \tag{7}$$

který po dosazení (2) a příslušných derivací z (3) přejde na

$$v_A = \frac{1}{EJ}\left\{\int_0^{a/2}(M_A+R_{Ay}x)x\,dx+\int_0^a\Big[M_A+R_{Ay}\Big(\frac{a}{2}-x_1\Big)-R_{Ax}b-F_3x_1\Big]\Big(\frac{a}{2}-x_1\Big)dx_1+\right.$$
$$+\int_0^b\Big(M_A+R_{Ay}\frac{a}{2}-R_{Ax}y\Big)\frac{a}{2}\,dy-\int_0^b\Big[M_A-R_{Ay}\frac{a}{2}-R_{Ax}(b-y_2)-F_3a\Big]\frac{a}{2}\,dy_2-$$
$$\left.-\int_0^{a/4}\Big[M_A-R_{Ay}\Big(\frac{a}{4}+x_3\Big)-F_1x_3\Big]\Big(\frac{a}{4}+x_3\Big)dx_3-\int_0^{a/4}(M_A-R_{Ay}x_4)x_4dx_4\right\}. \tag{8}$$

Po provedení integrace a po úpravách dostáváme pro v_A vztah

$$v_A = \frac{a^2}{6EJ}\left[R_{Ay}(a+3b) + \frac{1}{2}\,F_3(a+6b) + \frac{5}{64}\,F_1 a\right]. \tag{9}$$

Jako poslední určíme velikost úhlu natočení φ_A. Jeho vyjádření pomocí Castiglianovy věty je formálně stejné jako vztah (4), resp. (7), pro stanovení velikosti u_A, resp. v_A, pouze parciální derivace funkce M_o podle R_{Ax}, rexp. R_{Ay}, jsou nahrazeny derivacemi podle M_A. Z (3) je patrné, že tyto derivace jsou ve všech částech prutu rovny 1, a proto můžeme psát

$$\begin{aligned}\varphi_A = \frac{1}{EJ}\Bigg\{&\int_0^{a/2}(M_A+R_{Ay}x)dx + \int_0^{a}\Big[M_A+R_{Ay}\Big(\frac{a}{2}-x_1\Big)-R_{Ax}b-F_3x_1\Big]dx_1 + \\ &+\int_0^{b}\Big(M_A+R_{Ay}\frac{a}{2}-R_{Ax}y\Big)dy + \int_0^{b}\Big[M_A-R_{Ay}\frac{a}{2}-R_{Ax}(b-y_2)-F_3a\Big]dy_2 + \\ &+\int_0^{a/4}\Big[M_A-R_{Ay}\Big(\frac{a}{4}+x_3\Big)-F_1x_3\Big]dx_3 + \int_0^{a/4}(M_A-R_{Ay}x_4)dx_4\Bigg\},\end{aligned} \tag{10}$$

což po provedení integrace a úpravách lze přepsat do tvaru

$$\varphi_A = \frac{1}{EJ}\left\{(2M_A - R_{Ax}\,b)\,(a+b) - \frac{a}{32}\,[F_1\,a + 16F_3\,a(a+2b)]\right\}. \tag{11}$$

Dosazením vztahů (6), (9) a (11) do deformačních podmínek (1) získáme soustavu 3 algebraických rovnic pro 3 neznámé reakce R_{Ax}, R_{Ay} a M_A ve tvaru

$$\begin{aligned} R_{Ax}b\left(a+\frac{2}{3}\,b\right) + \left(\frac{1}{2}\,F_3a - M_A\right)(a+b) &= 0\,,\\ R_{Ay}(a+3b) + \frac{1}{2}\,F_3(a+6b) + \frac{5}{64}\,F_1a &= 0\,,\\ (2M_A - R_{Ax}\,b)\,(a+b) - \frac{a}{32}\,[F_1\,a + 16F_3\,a(a+2b)] &= 0\,,\end{aligned} \tag{12}$$

kterou lze po dosazení zadaných hodnot přepsat do maticové podoby

$$\begin{bmatrix} 6.75 & 0 & -5.25 \\ 0 & 4.\overline{3} & 0 \\ -5.25 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ M_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13125 \\ -10208.\overline{3} \\ 13750 \end{bmatrix}.$$

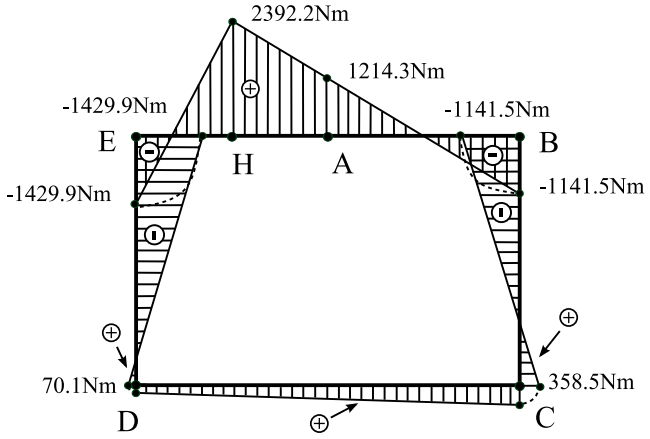
Řešením této soustavy získáme velikosti neznámých reakcí

$$R_{Ax} = -1000\,\mathrm{N}, \quad R_{Ay} \doteq -2355.8\,\mathrm{N} \quad \text{a} \quad M_A \doteq 1214.3\,\mathrm{Nm}. \tag{13}$$

Dosazením zadaných parametrů a vypočtených hodnot (13) do funkcí (2) získáme konkrétní funkce popisující rozložení ohybového momentu v jednotlivých částech rámu:

$$M_o = \begin{cases} 1214.3 - 2355.8\,x & \text{pro úsek AB } (M_o(0) = 1214.3\,\text{Nm}, M_o(\tfrac{a}{2}) = -1141.5\,\text{Nm}), \\ -1141.5 + 1000\,y & \text{pro úsek BC } (M_o(0) = -1141.5\,\text{Nm}, M_o(b) = 358.5\,\text{Nm}), \\ 358.5 - 144.2\,x_1 & \text{pro úsek CD } (M_o(0) = 358.5\,\text{Nm}, M_o(a) = 70.1\,\text{Nm}), \\ 70.1 - 1000\,y_2 & \text{pro úsek DE } (M_o(0) = 70.1\,\text{Nm}, M_o(b) = -1429.9\,\text{Nm}), \\ 2392.2 - 7644.2x_3 & \text{pro úsek EH } (M_o(0) = 2392.2\,\text{Nm}, M_o(\tfrac{a}{4}) = -1429.9\,\text{Nm}), \\ 1214.3 + 2355.8\,x_4 & \text{pro úsek HA } (M_o(0) = 1214.3\,\text{Nm}, M_o(\tfrac{a}{4}) = 2392.2\,\text{Nm}). \end{cases} \tag{14}$$

Schematické znázornění průběhů těchto funkcí je provedeno na obr. 4.



Obr. 4

Ze vztahů (14) a z obr. 4 je zřejmé, že pro maximální hodnotu ohybového momentu, kterou použijeme pro dimenzování, platí $M_{o\,max} = 2392.2\,\text{Nm}$.

Při vlastním dimenzování vyjdeme z pevnostní podmínky ve tvaru

$$\sigma_{max} \le \sigma_D, \quad \text{kde} \quad \sigma_D = \frac{Re}{k} \tag{15}$$

a dále

$$\sigma_{max} = \frac{M_{o\,max}}{W_o}, \;\; W_o = \frac{\pi D^3}{32}. \tag{16}$$

Po úpravě a dosazení zadaných hodnot dostáváme

$$\frac{32 M_{o\,max}}{\pi D^3} \le \frac{Re}{k} \quad \Rightarrow \quad D \ge \sqrt[3]{\frac{32 k M_{o\,max}}{\pi Re}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1.5 \cdot 2392.2}{250 \cdot 10^6}} \doteq 52.7{\cdot}10^{-3}\,\text{m} = 52.7\,\text{mm}. \tag{17}$$

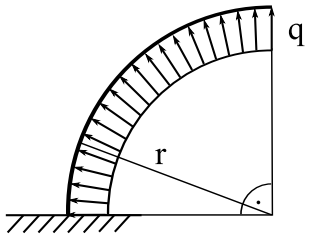
Tímto jsme určili minimální průměr kruhového přůřezu staticky neurčitého rovinného rámu tak, aby byla splněna pevnostní podmínka při zadané bezpečnosti.

KŘIVÉ A LOMENÉ PRUTY

Autoři: M. Zajíček, V. Adámek

Příklad 4:

Pro křivý prut znázorněný na obr. 4 vyšetřete a zakreslete reakce, rozložení N, T a M_o. Dále stanovte deformace u, v a φ v obecném bodě při uvažování vlivu všech účinků na deformaci prutu. Dáno: q, r, E, G, A, J a β.



Obr. 1

Řešení:
Pomocí statických podmínek rovnováhy nejprve stanovíme velikosti reakcí R_{Ax}, R_{Ay} a M_A ve vetknutí prutu. S ohledem na volbu jejich orientace, viz obr. 2(a), lze psát

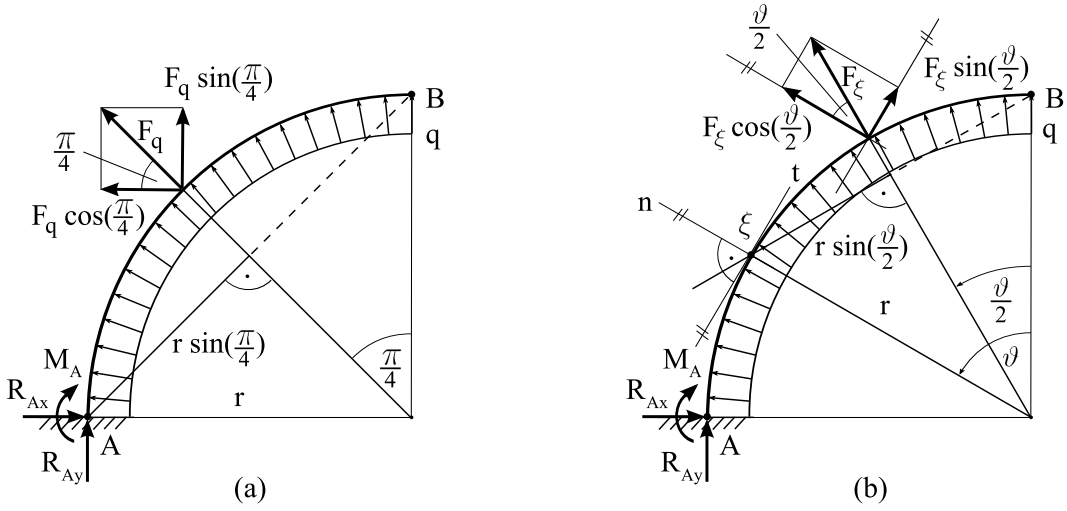
$$\begin{aligned} \sum_i F_{ix} = 0: &\quad R_{Ax} - F_q \sin\frac{\pi}{4} = 0, \\ \sum_i F_{iy} = 0: &\quad R_{Ay} + F_q \cos\frac{\pi}{4} = 0, \\ \sum_i M_{iA} = 0: &\quad M_A - F_q r \sin\frac{\pi}{4} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

kde síla F_q představuje ekvivalentní náhradu spojitého zatížení q působícího na prutu AB. Tato síla působí v radiálním směru v místě určeném úhlem $\frac{\pi}{4}$ (viz obr. 2(a)). Vzhledem k tomu, že spojité zatížení q působí kolmo na střednici prutu, lze velikost F_q vyjádřit jako součin velikosti q a velikosti průmětu oblouku AB do směru nositelky této síly, tj.

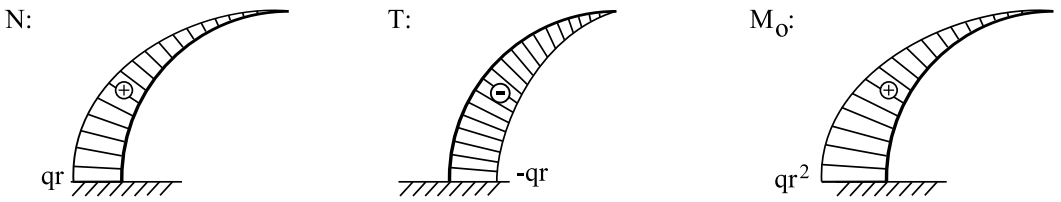
$$F_q = 2qr \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}qr. \tag{2}$$

Po dosazení (2) do rovnic (1) a po úpravách můžeme hledané reakce vyjádřit ve tvaru

$$R_{Ax} = qr, \quad R_{Ay} = -qr \quad \text{a} \quad M_A = qr^2. \tag{3}$$



Obr. 2



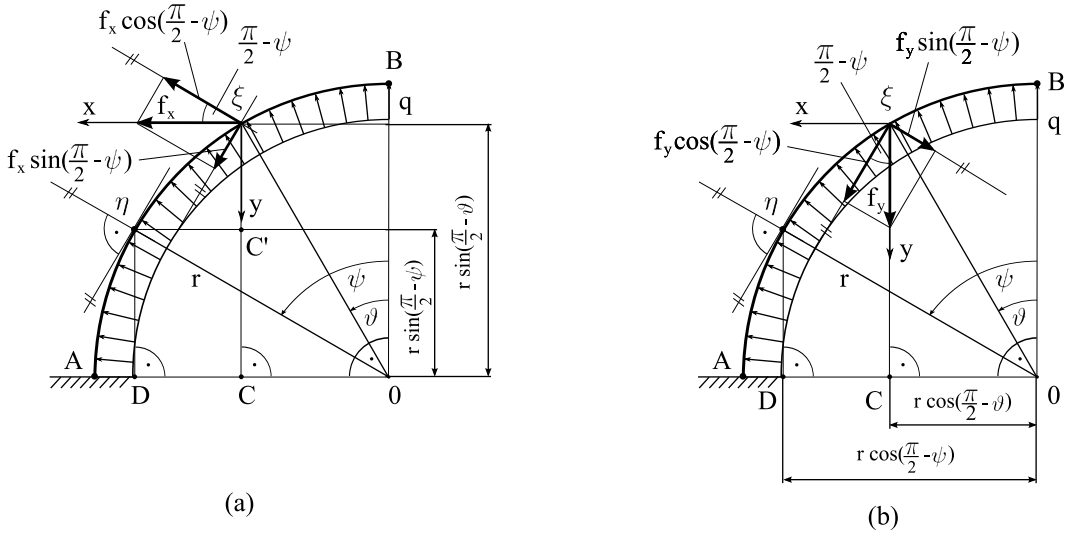
Obr. 3

V dalším kroku řešení stanovíme velikost vnitřních statických účinků N, T a M_o v obecném místě ξ jako funkce polárních souřadnic r a ϑ, viz obr. 2(b). Za tímto účelem ekvivalentně nahradíme účinek spojitého zatížení na oblouku Bξ silou F_ξ působící v bodě daném úhlem $\frac{\vartheta}{2}$, pro jejíž velikost, analogicky jako pro velikost síly F_q, můžeme psát $F_\xi = 2qr\sin\frac{\vartheta}{2}$. Rozložíme-li tuto sílu do směru tečny t a normály n prutu v místě ξ tak, jak je patrné z obr. 2(b), lze vnitřní účinky v obecném bodě ξ vyjádřit v závislosti na úhlu $\vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ jako

$$
\begin{aligned}
N(\vartheta) &= F_\xi \sin\frac{\vartheta}{2} = 2qr\sin^2\frac{\vartheta}{2} \quad \Big(N(0)=0,\ N\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = qr = -R_{Ay}\Big),\\
T(\vartheta) &= -F_\xi \cos\frac{\vartheta}{2} = -2qr\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} \quad \Big(T(0)=0,\ T\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = -qr = -R_{Ax}\Big),\\
M_o(\vartheta) &= F_\xi r\sin\frac{\vartheta}{2} = 2qr^2\sin^2\frac{\vartheta}{2} \quad \Big(M_o(0)=0,\ M_o\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = qr^2 = M_A\Big).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Průběhy vyšetřených funkcí (4) jsou schematicky znázorněny na obr. 3.

V následující části odvodíme pomocí Castiglianovy věty vztahy pro velikosti deformací u_ξ, v_ξ a φ_ξ v obecném místě ξ, jehož poloha je určena úhlem ϑ (viz obr. 4(a)). Nejprve stanovíme např. deformaci u_ξ, tj. posuv ve směru souřadnicové osy x, která je vyznačena



Obr. 4

na obr. 4(a). Vzhledem k tomu, že v bodě ξ nepůsobí v tomto směru žádná osamělá síla, je nutné do tohoto místa přidat fiktivní sílu $f_x \to 0$ (viz obr. 4(a)). Tím ale dojde ke změně funkcí popisujících rozložení vnitřních účinků v prutu. Je zřejmé, že na oblouku Bξ, tj. $\psi \in \langle 0, \vartheta\rangle$, bude rozložení vnitřních účinků popsáno funkcemi (4)[2], zatímco na oblouku ξA, tj. $\psi \in \langle \vartheta, \frac{\pi}{2}\rangle$, se ve funkcích N, T a M_o projeví i přidaná fiktivní síla f_x. Podle obr. 4(a) a vztahů (4) potom můžeme psát

$$
\begin{aligned}
N &= \begin{cases} 2qr\psi \sin^2\frac{\psi}{2} & \text{pro } \psi \in \langle 0, \vartheta\rangle, \\ 2qr\psi \sin^2\frac{\psi}{2} - f_x \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = & \\ \quad = 2qr\psi \sin^2\frac{\psi}{2} - f_x \cos\psi & \text{pro } \psi \in \langle \vartheta, \frac{\pi}{2}\rangle, \end{cases} \\
T &= \begin{cases} -2qr\psi \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2} & \text{pro } \psi \in \langle 0, \vartheta\rangle, \\ -2qr\psi \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2} - f_x \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = & \\ \quad = -2qr\psi \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2} - f_x \sin\psi & \text{pro } \psi \in \langle \vartheta, \frac{\pi}{2}\rangle, \end{cases} \\
M_o &= \begin{cases} 2qr^2\psi \sin^2\frac{\psi}{2} & \text{pro } \psi \in \langle 0, \vartheta\rangle, \\ 2qr^2\psi \sin^2\frac{\psi}{2} - f_x r\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)\right] = & \\ \quad = 2qr^2\psi \sin^2\frac{\psi}{2} - f_x r\left(\cos\psi - \cos\vartheta\right) & \text{pro } \psi \in \langle \vartheta, \frac{\pi}{2}\rangle, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Pro výpočet posuvu u_ξ budeme dále potřebovat derivace funkcí (5) podle fiktivní síly f_x. Pro tyto derivace v jednotlivých částech prutu platí

$$
\frac{\partial N}{\partial f_x} = \begin{cases} 0 \\ -\cos\psi \end{cases}, \quad \frac{\partial T}{\partial f_x} = \begin{cases} 0 \\ -\sin\psi \end{cases}, \quad \frac{\partial M_o}{\partial f_x} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \psi \in \langle 0, \vartheta\rangle \\ r\left(\cos\vartheta - \cos\psi\right) & \text{pro } \psi \in \langle \vartheta, \frac{\pi}{2}\rangle \end{cases}. \tag{6}
$$

Dosazením (5) a (6) do vztahu pro deformaci u_ξ plynocího z Castiglianovy věty, tj.

$$
\begin{aligned}
u_\xi(\vartheta) \;=\; & \frac{1}{EJ}\int_{(l)} M_o \frac{\partial M_o}{\partial f_x}\,ds + \frac{1}{EA}\int_{(l)} N\frac{\partial N}{\partial f_x}\,ds + \frac{\beta}{GA}\int_{(l)} T\frac{\partial T}{\partial f_x}\,ds - \\
& - \frac{1}{EAr}\int_{(l)}\left(M_o\frac{\partial N}{\partial f_x} + N\frac{\partial M_o}{\partial f_x}\right)ds,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

kde $ds = rd\psi$, a po zohlednění $f_x \to 0$ dostáváme po úpravě

$$
\begin{aligned}
u_\xi(\vartheta) \;=\; & \frac{2qr^4}{EJ}\int_{\vartheta}^{\pi/2}\left(\cos\vartheta - \cos\psi\right)\sin^2\frac{\psi}{2}\,d\psi - \frac{2qr^2}{EA}\int_{\vartheta}^{\pi/2}\cos\psi\sin^2\frac{\psi}{2}\,d\psi + \\
& + \frac{2qr^2\beta}{GA}\int_{\vartheta}^{\pi/2}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\sin\psi\,d\psi + \frac{2qr^2}{EA}\int_{\vartheta}^{\pi/2}\left(2\cos\psi - \cos\vartheta\right)\sin^2\frac{\psi}{2}\,d\psi.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

[2]Pouze provedeme formální záměnu ψ za ϑ.

Po provedení příslušných integrací v (8) a po úpravách lze vztah pro velikost posuvu u_ξ v obecném místě ξ psát ve tvaru

$$\begin{aligned} u_\xi(\vartheta) &= \frac{qr^4}{4EJ}\left\{\pi-2\vartheta-4\left(1-\sin\vartheta\right)+\sin 2\vartheta+2\cos\vartheta\left[\pi-2\left(1+\vartheta\right)\right]\right\}+ \\ &+\frac{qr^2}{4EA}\left(\pi-2\vartheta-4\left(1-\sin\vartheta\right)-\sin 2\vartheta\right)+\frac{qr^2\beta}{4GA}\left(\pi-2\vartheta+\sin 2\vartheta\right)- \\ &-\frac{qr^2}{2EA}\left\{\pi-2\vartheta-4\left(1-\sin\vartheta\right)+\cos\vartheta\left[\pi-2\left(1+\vartheta\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Zcela analogickým způsobem odvodíme v obecném místě vztah pro posuv v_ξ. Vzhledem k tomu, že v bodě ξ nepůsobí ve směru této deformace žádná osamělá síla, musíme opět do tohoto místa přidat fiktivní účinek $f_y \to 0$, viz obr. 4(b). Zavedení tohoto účinku samozřejmě způsobí změnu funkcí popisujících rozložení vnitřních účinků v prutu, konkrétně v části ξA. Podle obr. 4(b) a s přihlédnutím ke vztahům (4) můžeme funkce popisující rozložení vnitřních účinků v prutu zapsat ve tvaru

$$N=\begin{cases} 2qr\psi\sin^2\frac{\psi}{2} & \text{pro } \psi\in\langle 0,\vartheta\rangle, \\ 2qr\psi\sin^2\frac{\psi}{2}-f_y\cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)= & \\ \quad =2qr\psi\sin^2\frac{\psi}{2}-f_y\sin\psi & \text{pro } \psi\in\langle\vartheta,\frac{\pi}{2}\rangle, \end{cases}$$

$$T=\begin{cases} -2qr\psi\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2} & \text{pro } \psi\in\langle 0,\vartheta\rangle, \\ -2qr\psi\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}+f_y\sin\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)= & \\ \quad =-2qr\psi\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}+f_y\cos\psi & \text{pro } \psi\in\langle\vartheta,\frac{\pi}{2}\rangle, \end{cases}$$

$$M_o=\begin{cases} 2qr^2\psi\sin^2\frac{\psi}{2} & \text{pro } \psi\in\langle 0,\vartheta\rangle, \\ 2qr^2\psi\sin^2\frac{\psi}{2}-f_y r\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right)\right]= & \\ \quad =2qr^2\psi\sin^2\frac{\psi}{2}-f_y r\left(\sin\psi-\sin\vartheta\right) & \text{pro } \psi\in\langle\vartheta,\frac{\pi}{2}\rangle, \end{cases} \tag{10}$$

Pro výpočet posuvu v_ξ je dále nutné znát derivace funkcí (10) podle fiktivní síly f_y. Pro tyto derivace v jednotlivých částech prutu platí

$$\frac{\partial N}{\partial f_x}=\begin{cases}0\\-\sin\psi\end{cases},\quad \frac{\partial T}{\partial f_x}=\begin{cases}0\\\cos\psi\end{cases},\quad \frac{\partial M_o}{\partial f_x}=\begin{cases}0 & \text{pro } \psi\in\langle 0,\vartheta\rangle\\ -r\left(\sin\psi-\sin\vartheta\right) & \text{pro } \psi\in\langle\vartheta,\frac{\pi}{2}\rangle\end{cases}. \tag{11}$$

Podle Castiglianovy věty můžeme pro posuv v_ξ psát

$$\begin{aligned} v_\xi(\vartheta) &= \frac{1}{EJ}\int\limits_{(l)} M_o\frac{\partial M_o}{\partial f_y}\,ds+\frac{1}{EA}\int\limits_{(l)} N\frac{\partial N}{\partial f_y}\,ds+\frac{\beta}{GA}\int\limits_{(l)} T\frac{\partial T}{\partial f_y}\,ds- \\ &-\frac{1}{EAr}\int\limits_{(l)}\left(M_o\frac{\partial N}{\partial f_y}+N\frac{\partial M_o}{\partial f_y}\right)ds, \end{aligned} \tag{12}$$

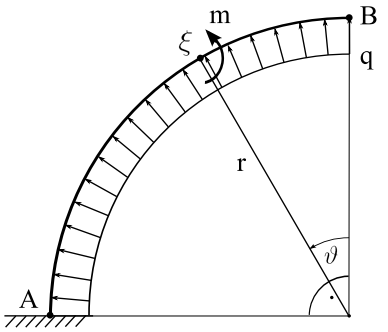
Po dosazení vztahů (10) - (11) do (12), po zohlednění $f_y \to 0$ a po úpravě dostáváme

$$v_\xi(\vartheta) = \frac{2qr^4}{EJ}\int_\vartheta^{\pi/2}(\sin\vartheta-\sin\psi)\sin^2\frac{\psi}{2}\,d\psi-\frac{2qr^2}{EA}\int_\vartheta^{\pi/2}\sin\psi\sin^2\frac{\psi}{2}\,d\psi-$$
$$-\frac{2qr^2\beta}{GA}\int_\vartheta^{\pi/2}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\cos\psi\,d\psi+\frac{2qr^2}{EA}\int_\vartheta^{\pi/2}(2\sin\psi-\sin\vartheta)\sin^2\frac{\psi}{2}\,d\psi, \quad (13)$$

což po integraci a úpravách vede na výsledný vztah

$$v_\xi(\vartheta) = \frac{qr^4}{4EJ}\left\{3+2\sin\vartheta\left[\pi-2\left(1+\vartheta\right)\right]-4\cos\vartheta-\cos2\vartheta\right\}+\frac{qr^2}{4EA}\left(1-4\cos\vartheta+\cos2\vartheta\right)-$$
$$-\frac{qr^2\beta}{4GA}\left(1+\cos2\vartheta\right)-\frac{qr^2}{2EA}\left\{2+\sin\vartheta\left[\pi-2\left(1+\vartheta\right)\right]-4\cos\vartheta\right\}. \quad (14)$$

Na závěr vyšetřování deformací v bodě ξ stanovíme velikost úhlu natočení φ_ξ. Do bodu ξ nyní připojíme vnější fiktivní moment $m \to 0$, např. proti směru otáčení hodin, jak je znázorněno na obr. 5. Vzhledem k tomu, že příspěvek tohoto momentu do vnitřních sil N a T je nulový, budou tyto účinky na celém oblouku AB popsány funkcemi (4) při záměně ψ za ϑ. To ale znamená, že jejich parciální derivace podle m budou nulové, a proto i jejich příspěvek do celkového úhlu natočení v bodě ξ je roven 0.



Obr. 5

Z výše uvedeného vyplývá, že pro stanovení hledaného úhlu natočení postačuje určit funkci M_o a její parciální derivaci podle m a využít již odvozené vztahy (4). S ohledem na obr. 5 lze pro funkci momentu a její derivaci psát

$$M_o = \begin{cases} 2qr^2\psi\sin^2\frac{\psi}{2} & \text{pro } \psi\in\langle 0,\vartheta\rangle, \\ 2qr^2\psi\sin^2\frac{\psi}{2}+m & \text{pro } \psi\in\langle\vartheta,\frac{\pi}{2}\rangle, \end{cases} \quad (15)$$

$$\frac{\partial M_o}{\partial m} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \psi\in\langle 0,\vartheta\rangle, \\ 1 & \text{pro } \psi\in\langle\vartheta,\frac{\pi}{2}\rangle, \end{cases} \quad (16)$$

Potom vyjádříme deformaci φ_ξ pomocí Castiglianovy věty jako

$$\varphi_\xi(\vartheta) = \frac{1}{EJ}\int_{(l)} M_o\frac{\partial M_o}{\partial m}\,ds-\frac{1}{EAr}\int_{(l)} N\frac{\partial M_o}{\partial m}\,ds, \quad (17)$$

což po dosazení (4), (15) a (16) vede na vztah

$$\varphi_\xi(\vartheta) = \frac{2qr^3}{EJ}\int_\vartheta^{\pi/2}\sin^2\frac{\psi}{2}d\psi-\frac{2qr}{EA}\int_\vartheta^{\pi/2}\sin^2\frac{\psi}{2}d\psi. \quad (18)$$

Provedeme-li integraci vztahu (18) dostáváme vyjádření poslední hledané deformace ve tvaru

$$\varphi_\xi(\vartheta) \;=\; \frac{qr^3}{2EJ}\left[\pi - 2\left(1 + \vartheta - \sin\vartheta\right)\right] - \frac{qr}{2EA}\left[\pi - 2\left(1 + \vartheta - \sin\vartheta\right)\right]. \tag{19}$$