

# Křivé pruty

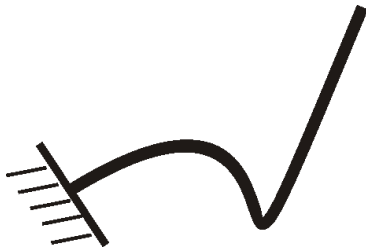
Martin Fišer



- ▶ Dimenzování křivého tenkého prutu [zde](#)
- ▶ Deformace v daném místě prutu [zde](#)
  - ▶ Castiglianova věta [zde](#)

# Dimenzování křivého tenkého prutu

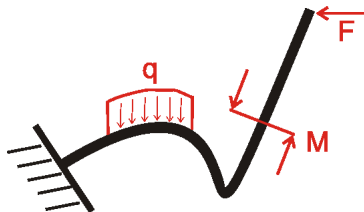
Mějme obecný křivý prut z homogenního izotropního materiálu.



Obrázek: Křivý prut

# Dimenzování křivého tenkého prutu

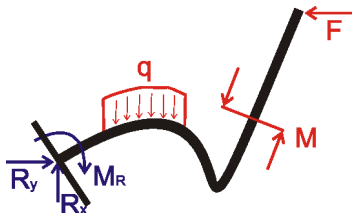
Na tento prut působí obecné zátěžné účinky.



Obrázek: Zatížený křivý prut

Pro dimenzování musíme vyšetřit průběh ohybového momentu podél střednice prutu.

# Dimenzování křivého tenkého prutu



Obrázek: Zatížený křivý prut

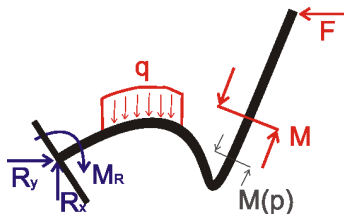
Z momentové podmínky rovnováhy k libovolnému bodu a složkových podmínek rovnováhy sil,

$$\begin{aligned}\sum F_x i &= 0, \\ \sum F_y i &= 0, \\ \sum M_i &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

určíme reakce v uložení.

# Dimenzování křivého tenkého prutu

Například, provedeme-li vyšetření ohybového momentu  $M(p)$  k obecnému místu  $p$  pomocí metody řezu, bude moment ovlivněn silou  $F$  a momentem  $M$ , viz obrázek.



Obrázek: Zatížený křivý prut

# Dimenzování křivého tenkého prutu

Je-li vyšetřen vnitřní ohybový moment, určíme jeho hodnotu  $M_{max}$ , která je rozhodující pro dimenzování.

# Dimenzování křivého tenkého prutu

Je-li vyšetřen vnitřní ohybový moment, určíme jeho hodnotu  $M_{max}$ , která je rozhodující pro dimenzování.

Napětí  $\sigma_{max}$  v daném místě musí být menší nebo rovno dovolenému napětí

$$\sigma_D \geq \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_o} \Rightarrow W_o \geq \frac{M_{max}}{\sigma_D}, \quad (2)$$



# Dimenzování křivého tenkého prutu

Je-li vyšetřen vnitřní ohybový moment, určíme jeho hodnotu  $M_{max}$ , která je rozhodující pro dimenzování.

Napětí  $\sigma_{max}$  v daném místě musí být menší nebo rovno dovolenému napětí

$$\sigma_D \geq \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_o} \Rightarrow W_o \geq \frac{M_{max}}{\sigma_D}, \quad (2)$$

kde  $W_o$  je modul průřezu v ohybu.

# Dimenzování křivého tenkého prutu

Například pro kruhový průřez průměru  $d$  je kvadratický moment  $J = \frac{\pi d^4}{64}$ . Modul průřezu v ohybu je

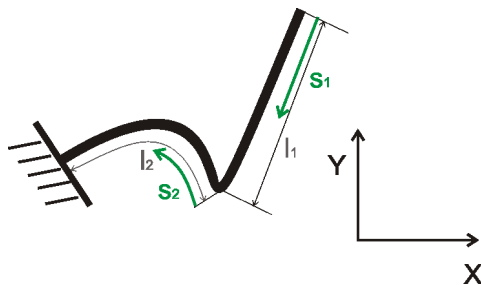
$$W_o = \frac{J}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (3)$$

S využitím vztahů (2) a (3) po úpravě dostáváme

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{max}}{\pi\sigma_D}}. \quad (4)$$

# Výpočet deformace křivého tenkého prutu

Uvažujme obecný křivý prut z homogenního izotropního materiálu.



**Obrázek:** Křivý prut se zavedeným systémem souřadnic

Popišme střednici prutu pomocí parametrů  $s_1 \in \langle 0, l_1 \rangle$  a  $s_2 \in \langle 0, l_2 \rangle$ , jak je vidět na obrázku.

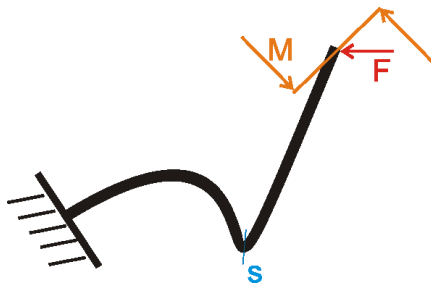
# Výpočet deformace křivého tenkého prutu

Průhyb a úhel natočení v daném místě prutu  $s$  vypočteme pomocí Castiglianovy věty. Průhyb je roven parciální derivaci celkové potenciální energie prutu dle síly  $F_s$  působící v daném místě a v daném směru. Obdobně pro úhel natočení, kde derivujeme dle momentu  $M_s$ .

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{EJ} \int_s M_o \frac{\partial M_o}{\partial F_s} ds \\ \varphi &= \frac{1}{EJ} \int_s M_o \frac{\partial M_o}{\partial M_s} ds\end{aligned}\tag{5}$$

# Výpočet deformace křivého tenkého prutu

Vypočteme průhyb a natočení prutu v daném místě  $s$ .

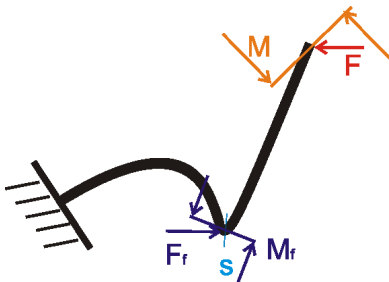


# Výpočet deformace křivého tenkého prutu

Pokud v tomto místě nepůsobí žádný moment, ani síla ve směru, ve kterém počítáme posunutí, pak do tohoto místa připojíme fiktivní sílu  $F_f \rightarrow 0$  a fiktivní moment  $M_f \rightarrow 0$ , tj. velikost síly a momentu se limitně blíží k nule.

# Výpočet deformace křivého tenkého prutu

Pokud v tomto místě nepůsobí žádný moment, ani síla ve směru, ve kterém počítáme posunutí, pak do tohoto místa připojíme fiktivní sílu  $F_f \rightarrow 0$  a fiktivní moment  $M_f \rightarrow 0$ , tj. velikost síly a momentu se limitně blíží k nule.



Obrázek: Zobrazená fiktivní síla a fiktivní moment v místě s

# Výpočet deformace křivého tenkého prutu

Nyní vyšetříme ohybové momenty  $M_1(s_1)$  a  $M_2(s_2)$  z volného konce prutu. V těchto momentech je zahrnuta i fiktivní síla a fiktivní moment.

Výsledný úhel natočení  $\varphi_s$  vypočteme pomocí Castiglianovy věty následujícím způsobem

$$\varphi_s = \frac{1}{EJ} \left( \int_0^{l_1} M_1(s_1) \frac{\partial M_1(s_1)}{\partial M_f} ds_1 + \int_0^{l_2} M_2(s_2) \frac{\partial M(s_2)}{\partial M_f} ds_2 \right). \quad (6)$$

Posunutí  $u_s$  ve směru fiktivní síly  $F_f$  je dle Castiglianovy věty

$$u_s = \frac{1}{EJ} \left( \int_0^{l_1} M_1(s_1) \frac{\partial M_1(s_1)}{\partial F_f} ds_1 + \int_0^{l_2} M_2(s_2) \frac{\partial M(s_2)}{\partial F_f} ds_2 \right). \quad (7)$$



# Výpočet deformace křivého tenkého prutu

Pro daný případ vetknutého nosníku není ohybový moment  $M_1(s_1)$  funkcí ani fiktivní síly  $F_f$ , ani fiktivního momentu  $M_f$ . Proto budou parciální derivace

$$\frac{\partial M_1(s_1)}{\partial F_f} = 0, \quad \frac{\partial M_1(s_1)}{\partial M_f} = 0$$

a vztahy (6) a (7) se zjednoduší na

$$\varphi_s = \frac{1}{EJ} \int_0^{l_2} M_2(s_2) \frac{\partial M(s_2)}{\partial M_f} ds_2,$$

$$u_s = \frac{1}{EJ} \int_0^{l_2} M_2(s_2) \frac{\partial M(s_2)}{\partial F_f} ds_2.$$