OHYB (Napjatost)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

3.1 Shrnutí základních poznatků

Uvažujme nosníky, tj. pruty, jejichž délka převládá nad charakteristickými rozměry průřezu. Při tvorbě výpočtového modelu nosník ztotožňujeme s jeho podélnou osou a uvažujeme skutečný průřez.

Průběhy normálových a posouvajících sil a ohybových momentů u přímých nosníků

Uvažujme nosník zatížený silovými účinky v rovině procházející jeho osou. Účinek těchto vnějších sil a momentů lze obecně v každém přímém průřezu nahradit (viz obr. 1):

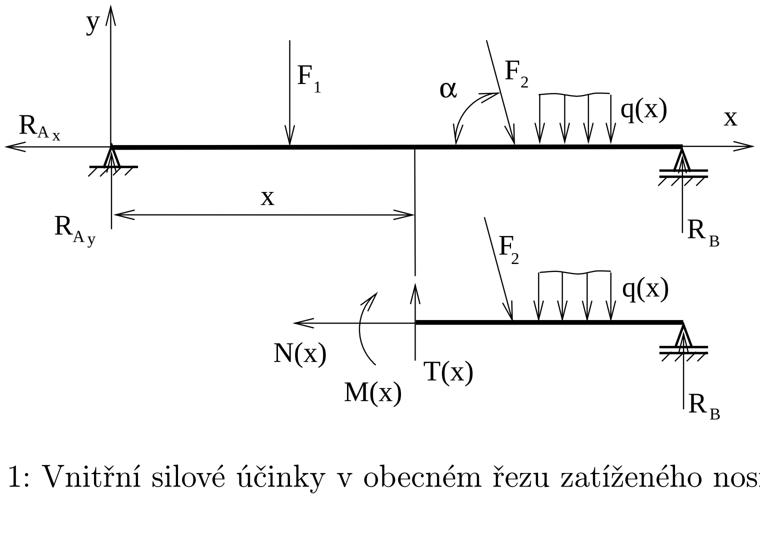
1. Normálovou silou $N(x)$, která je rovna součtu všech sil a složek všech sil ve směru osy nosníku po jedné straně řezu.

2. Posouvající (smykovou) silou $T(x)$, která je rovna součtu všech sil a složek sil kolmých na osu nosníku po jedné straně řezu.

3. Ohybovým momentem $M(x)$, který je roven součtu momentů všech sil a momentů působících po jedné straně řezu.

Uvedené definice umožňují vyšetřování zmíněných účinků tzv. metodou řezu. Pro vyjádření těchto účinků je ale potřeba také znát všechny vnější silové účinky (akční i reakční). Proto je nutné nejprve vyšetřit reakční silové účinky ve vazbách pomocí příslušných podmínek rovnováhy (silových a momentových).

Při vyšetřování uvedených vnitřních účinků $N(x)$, $T(x)$ a $M(x)$ je účelné dodržovat znaménkovou úmluvu znázorněnou na obr. 2.



Obr. 1: Vnitřní silové účinky v obecném řezu zatíženého nosníku.

OHYB (Napjatost)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

Obr. 2: Znaménková úmluva pro vnitřní silové účinky.

Závislosti mezi spojitým zatížením $q(x)$, posouvající silou $T(x)$ a ohybovým momentem $M(x)$ vyjadřují tzv. Schwedlerovu větu. V případě volby nezávisle proměnné x zleva (viz obr. 3) platí

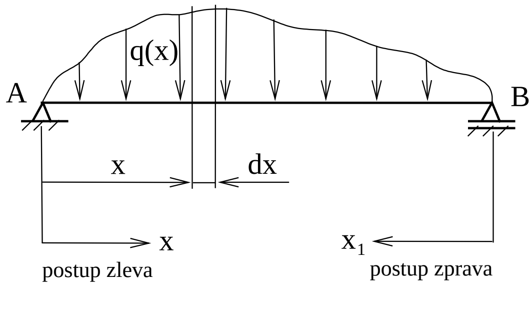
$$\frac{dT(x)}{dx} = -q(x), \qquad \frac{dM(x)}{dx} = T(x), \qquad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x). \tag{1}$$

V některých případech je výhodné při vyšetřování uvedených účinků zavést systém souřadnic opačně, takže osa x_1 směřuje zprava doleva (viz obr. 3). Schwedlerova věta má potom tvar

$$\frac{dT(x_1)}{dx_1} = q(x_1), \qquad \frac{dM(x_1)}{dx_1} = -T(x_1), \qquad \frac{d^2M(x_1)}{dx_1^2} = -q(x_1). \tag{2}$$

Vztahy (1) a (2) lze použit pro vyšetřování průběhu posouvajících sil a ohybových momentů, ale také poslouží pro kontrolu správnosti vyšetření jejich průběhů, neboť z těchto vztahů vyplývá:

- je-li $q(x) = 0$, je posouvající síla konstantní a ohybový moment se mění lineárně
- je-li $q(x) = konst$, mění se posouvající síla lineárně a ohybový moment má parabolický průběh
- jestliže se v nějakém řezu mění $q(x)$ skokem, je u průběhu posouvající síly v tomto místě zlom
- v intervalu, kde je $T(x) > 0$, ohybový moment roste, při $T(x) < 0$ ohybový moment klesá



Obr. 3: Nosník zatížený obecným spojitým zatížením $q(x)$.

- v průřezu, kde je $T(x) = 0$, dosahuje ohybový moment lokální extrémní hodnoty.

Normálové napětí při ohybu

Předpoklady:

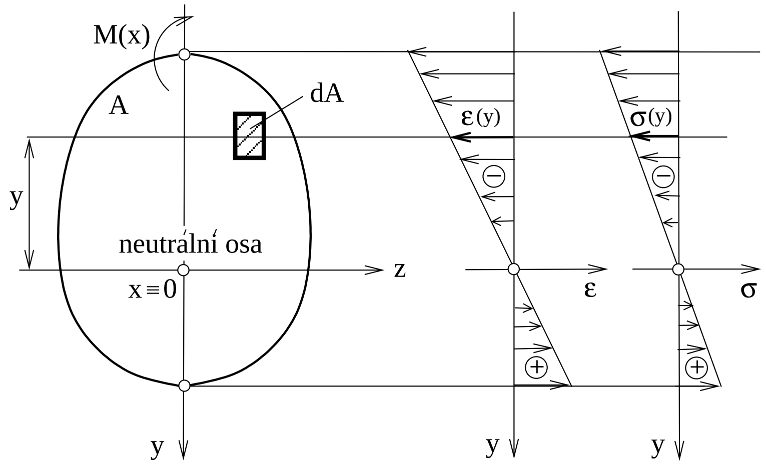
- Nosník je namáhán prostým ohybem nebo je dostatečně dlouhý, takže lze zanedbat vliv posouvající síly.
- Řezy kolmé na osu zůstávají při deformaci ohybem rovinné a pouze se natáčejí kolem tzv. neutrální osy. Tyto osy v jednotlivých průřezech vyplní tzv. neutrální rovinu.
- Platí Hookeův zákon.
- Materiál je homogenní a izotropní.

Uvažujme obecný řez s ohybovým momentem $M(x)$ (viz obr. 4). Z podmínky rovinnosti řezů vyplývá závislost poměrného prodloužení

$$\varepsilon_x(y) = \frac{y}{\rho}\,, \tag{3}$$

kde ρ je poloměr křivosti osy prutu. Je zřejmé, že vlivem natočení řezu při ohybu vzniká v každém řezu pouze normálová složka napětí $\sigma_x(y)$(smykové napětí je nulové, neboť jsme zanedbali vliv posouvající síly $T(x)$, viz výše uvedené předpoklady), takže se jedná o jednoosou napjatost (viz prostý tah-tlak). Potom pro normálové napětí $\sigma_x(y)$ platí (v souladu s úmluvou o znaménku ohybového momentu)

$$\sigma_x(y) = E\,\varepsilon_x(y) = \frac{E}{\rho}\,y = c\,y\,. \tag{4}$$



Obr. 4: Obecný řez nosníku.

Průběh deformace $\varepsilon_x(y)$ a normálového napětí $\sigma_x(y)$ je znázorněn na obr. 4. (Pozn.: Vzhledem k tomu, že se jedná o jednoosou napjatost, budeme místo $\varepsilon_x(y)$ a $\sigma_x(y)$ používat označení pouze ε a σ.)

Z výše uvedého je zřejmé, že deformace i napětí závisí lineárně na vzdálenosti y od neutrální osy. Pro určení skutečného průběhu napětí je potřeba stanovit hodnotu konstanty c v rovnici (4) a dále pak polohu neutrální osy.

Poloha neutrální osy se určí z podmínky prostého ohybu. Vnitřní síla $N(x)$ ve směru osy prutu v případě prostého ohybu musí být

$$N = \int_A dN = \int_A \sigma \, dA = 0 \,. \tag{5}$$

Odtud vyplývá, že neutrální osa musí procházet těžištěm průřezu.

Konstanta c se určí z rovnosti momentu vnitřních sil $M(x)$ a momentu vnějších sil $M'(x)$ v obecném řezu. Z této podmínky dostáváme

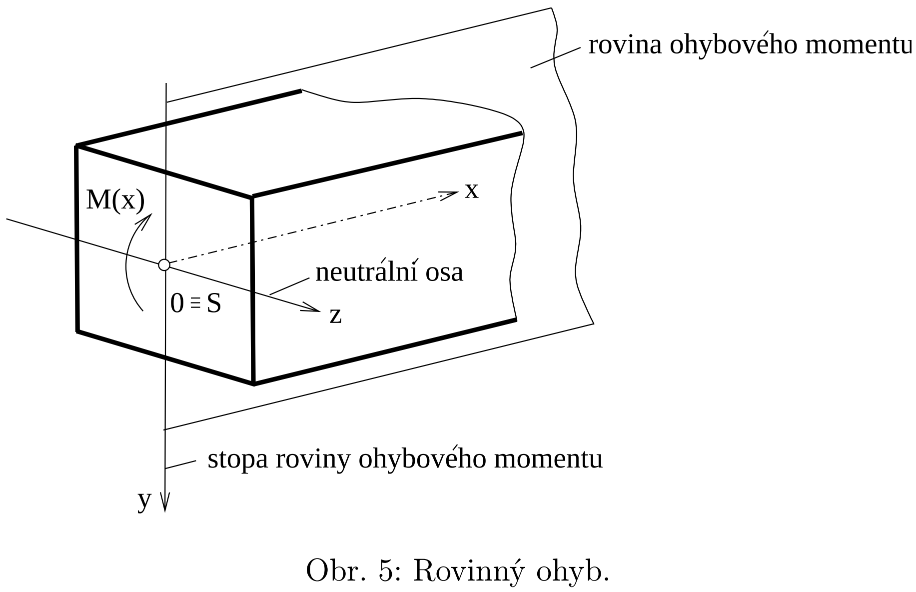
$$M(x) = M'(x) = c\sqrt{J_z^2 + D_{yz}^2}\,, \tag{6}$$

kde D_{yz} je deviační moment k neutrální ose z a k ose y k ní kolmé, J_z je kvadratický moment k neutrální ose, viz obr. 4.

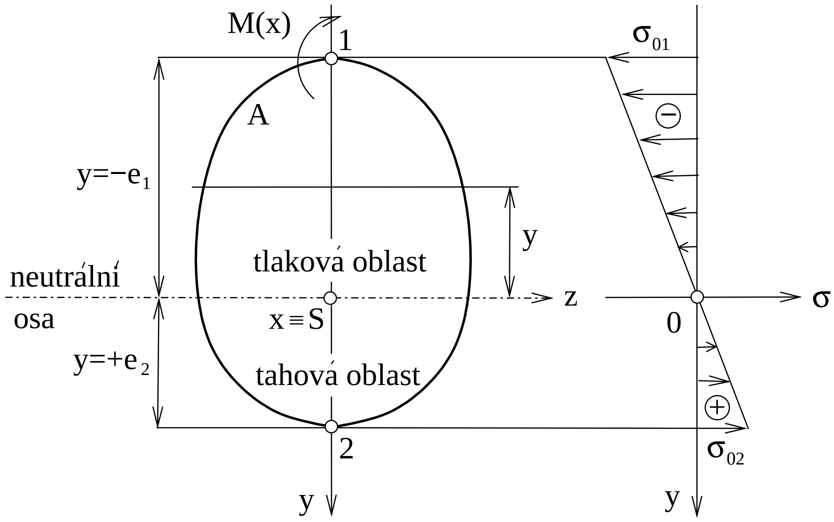
Rovinný ohyb

V dalším bude uvažován tzv. rovinný ohyb. O rovinném ohybu hovoříme tehdy, jestliže stopa roviny ohybového momentu v rovině řezu je totožná s jednou z hlavních os kvadratických momentů, viz obr. 5. V takovém případě je $D_{yz} = 0$ a konstanta $c = \frac{M(x)}{J_z}$. Potom je velikost normálového napětí v bodech ve vzdálenosti y od neutrální osy z dána vztahem

$$\sigma(y) = \frac{M(x)}{J_z}\, y, \tag{7}$$



Obr. 5: Rovinný ohyb.



Obr. 6: Rozložení napětí v obecném řezu nosníku.

kde J_z je kvadratický moment průřezu k neutrální ose z, viz obr. 5 a obr. 6. Neutrální osa rozdělí průřez na část přenášející tahová napětí a na část přenášející napětí tlaková. V případě dodržení úmluvy o znaménku ohybového momentu (viz obr. 2), část průřezu pod neutrální osou přenáší napětí tahová, viz obr. 6. Největší napětí vznikají v nejvzdálenějších bodech od neutrální osy, tj. v bodech 1 a 2 (viz obr. 6). Pro napětí v těchto bodech bude platit

$$\sigma_{01} = -\frac{M(x)}{J_z}\, e_1 \quad \text{a} \quad \sigma_{02} = +\frac{M(x)}{J_z}\, e_2 \,. \tag{8}$$

Vztahy (8) lze zapsat ve tvaru

$$\sigma_{01} = -\frac{M(x)}{W_{01}} \quad \text{a} \quad \sigma_{02} = +\frac{M(x)}{W_{02}} \,, \tag{9}$$

kde

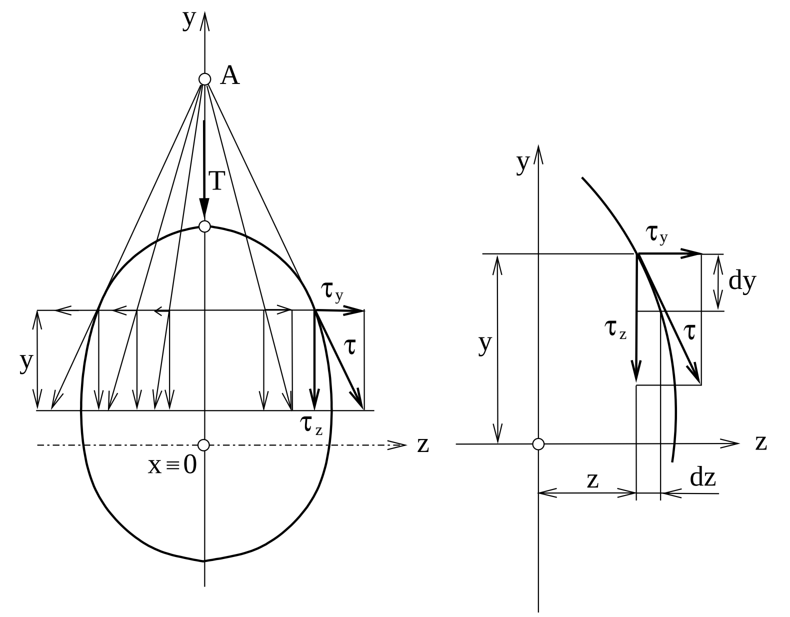
$$W_{01} = \frac{J_z}{e_1} \quad \text{a} \quad W_{02} = \frac{J_z}{e_2} \tag{10}$$

jsou tzv. moduly průřezu v ohybu.

Z definice modulů průřezů v ohybu (10) vyplývá, že narozdíl od kvadratických momentů nelze modul průřezu v ohybu složené plochy vyjádřit jako součet modulů průřezů v ohybu dílčích ploch.

Z rovnice (9) vyplývá, že v případě prizmatických nosníků (tj. $A(x) = A = konst$) působí maximální napětí v řezu, kde působí maximální ohybový moment $M(x) = M_{0max}$. Pro tento řez tedy provádíme případné dimenzování nosníku. Vzhledem k tomu, že při ohybu nosníku vzniká jednoosá napjatost (viz výše), můžeme pevnostní podmínku zapsat ve tvaru

$$|\sigma_{01}| \leq \sigma_{D_d} \quad \text{a} \quad \sigma_{02} \leq \sigma_{D_t} \,, \tag{11}$$



Obr. 7: Smykové napětí v řezu nosníku.

kde σ_{D_d} je dovolené napětí v tlaku a σ_{D_t} je dovolené napětí v tahu. Pro tvárné materiály platí $\sigma_{D_d} = \sigma_{D_t} = \sigma_D$. V tomto případě rozhoduje o pevnosti větší z obou napětí σ_{01} nebo σ_{02}.

Smykové napětí při ohybu

V případě, že v obecném řezu nosníku působí posouvající síla $T(x)$, vzniká zde od této síly smykové napětí.

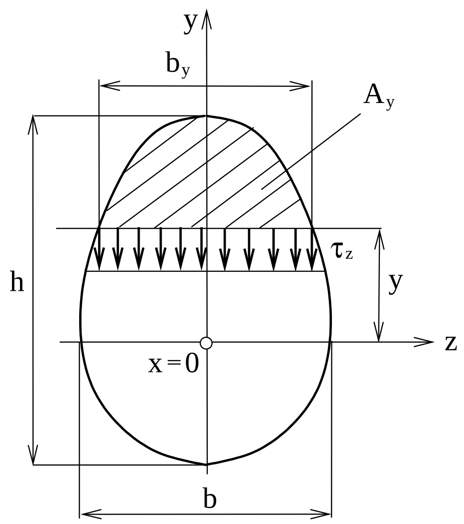
Uvažujme průřez symetrický vůči ose y. Nechť hranice (obrys) průřezu je vyjádřena rovnicí $y = f(z)$. Ze zákona sdružených smykových napětí vyplývá, že smykové napětí τ na obrysu musí být tečné k obrysové čáře (viz obr. 7). Potom za předpokladu $\vec{\tau} = \vec{\tau}_y + \vec{\tau}_z$ platí

$$\frac{\tau_y}{\tau_z} = -\frac{dz}{dy}\,. \tag{12}$$

Diferenciální rovnice (12) platí i pro křivky uvnitř obrysu, které splňují podmínku, že smyková napětí leží na jejich tečnách. Tyto křivky jsou afinní k obrysu a nazývají se smykové čáry. Tečny k nim podél $y = konst$ se protínají v jednom bodě A na ose y (viz obr. 7).

Poznámka: Jestliže se nejedná o průřez, který má osu symetrie, vyvolají vnitřní síly nejen posunutí průřezu (lze jej určit např. pomocí Castiglianovy věty), ale ještě natočení průřezu. Nemá-li toto natočení nastat, musí posouvající síla působit v tzv. středisku smyku, což je bod, kterým prochází výslednice vnitřních smykových sil.

Jedná-li se o dostatečně štíhlé průřezy nosníků, tj. platí alespoň $h/b > 2$, lze předpo-



Obr. 8: Řez štíhlým nosníkem.

kládat, že podél šířky b_y je $\tau_z = konst$, viz obr. 8. V tomto případě lze složku τ_z smykového napětí s dostatečnou přesností určit pomocí tzv. Žuravského vztahu ve tvaru

$$\tau_z = \frac{T(x)\, U_y}{b_y\, J_z}\,, \tag{13}$$

kde $T(x)$ je posouvající síla v uvažovaném řezu (viz obr. 7), U_y lineární (statický) moment plochy A_y vymezené rovnoběžkou s osou z ve vzdálenosti y vzhledem k neutrální ose z, b_y je šířka průřezu v místě, kde napětí τ_z počítáme, J_z je kvadratický moment celého průřezu k neutrální ose z.