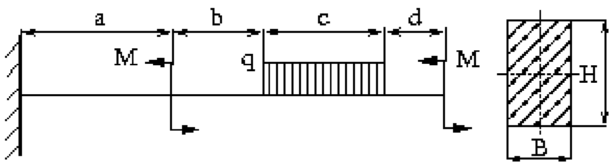
Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

3.3 Řešené příklady

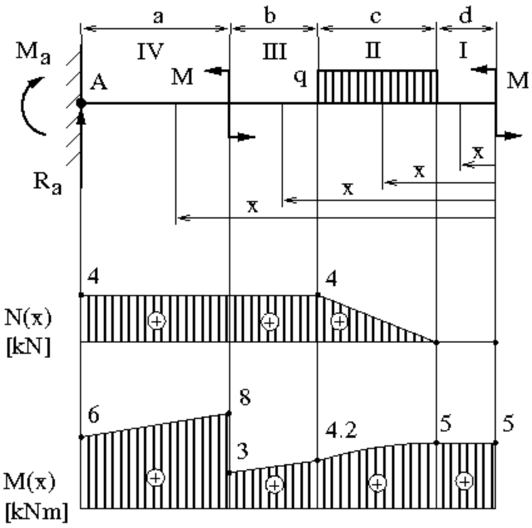
Příklad 1:

Pro nosník na obrázku vyšetřete a zakreslete reakce, $T(x)$ a $M(x)$. Dále určete M_{max} a proveďte dimenzování pro zadaný průřez.
Dáno: $a = 0.5\,\mathrm{m}$, $b = 0.3\,\mathrm{m}$, $c = 0.4\,\mathrm{m}$, $d = 0.2\,\mathrm{m}$, $q = 10\,\mathrm{kN/m}$, $M = 5\,\mathrm{kNm}$, $H/B = 1.5$, $\sigma_k = 300\,\mathrm{MPa}$, $k = 1.5$.



Obrázek 1

Řešení:



Obrázek 2

Podle zadání úlohy nejprve vyšetříme reakce vznikající ve vetknutí nosníku. Vzhledem k charakteru vnějšího zatížení je zřejmé, že ve vetknutí vzniknou pouze dvě nenulové reakce. Označme je R_A, M_A a zvolme jejich orientaci např. podle obr. 2. Pak podle silové podmínky rovnováhy ve svislém směru platí

$$R_A - qc = 0 \Rightarrow R_A = qc = 4000\,\mathrm{N}. \qquad (1)$$

Reakci M_A určíme např. z momentové podmínky rovnováhy např. k bodu A (viz obr. 2)

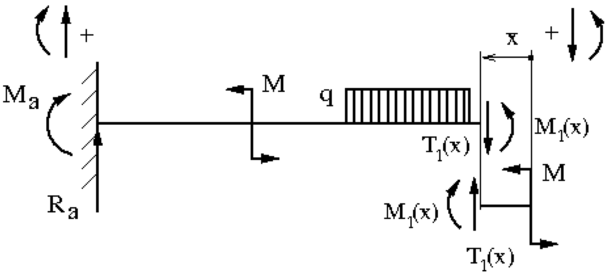
$$M_A - M + qc\left(a + b + \frac{c}{2}\right) - M = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_A = 2M - qc\left(a + b + \frac{c}{2}\right) = 6000\,\mathrm{Nm}. \qquad (2)$$

Nyní přistoupíme k vyšetřování vnitřních silových účinků $T(x)$ a $M(x)$. Podle typu uložení a charakteru vnějších zatěžujících účinků rozdělíme nosník na pole, ve kterých popíšeme $T(x)$ a $M(x)$ jedinými funkcemi. Proveďme tedy rozdělení podle obr. 2 na pole I - IV. Vzhledem k tomu, že se jedná o nosník vetknutý, je vhodné volit nezávisle proměnnou x ve všech polích od volného konce - viz obr. 2.

Pole I: $x \in \langle 0, d \rangle$

Vnitřní účinky určíme pomocí podmínek rovnováhy mezi vnitřními a vnějšími účinky. Proveďme řez v místě x v poli I (viz obr. 3). Vzhledem k tomu, že nosník byl před provedením řezu ve stavu statické rovnováhy, musí být i každá z jeho oddělených částí také v rovnováze, tj. v řezu vzniknou příslušné vnitřní účinky $T_1(x)$ a $M_1(x)$ (viz obr. 3), které uvedou oddělené části nosníku opět do stavu rovnováhy.



Obrázek 3

Ze silové podmínky rovnováhy ve svislém směru na části nosníku vpravo od řezu plyne

$$T_1(x) = 0. \tag{3}$$

Podle momentové podmínky k řezu v místě x platí

$$M_1(x) - M = 0 \Rightarrow M_1(x) = M = 5\,\text{kNm}. \tag{4}$$

K určení $T_1(x)$ a $M_1(x)$ samozřejmě můžeme využít také podmínky rovnováhy pro část nosníku vlevo od řezu, které mají tvar

$$\begin{aligned} T_1(x) + qc - R_A &= 0\,, \\ M_1(x) + qc\left(d + \frac{c}{2} - x\right) + M - M_A - R_A(a+b+c+d-x) &= 0\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Pro hledané vnitřní silové účinky potom můžeme psát

$$\begin{aligned} T_1(x) &= R_A - qc = qc - qc = 0\,, \\ M_1(x) &= M_A + R_A(a+b+c+d-x) - M - q\left(d + \frac{c}{2} - x\right) = \\ &= 2M - qc\left(a + b + \frac{c}{2}\right) + qc(a+b+c+d-x) - M - qc\left(d + \frac{c}{2} - x\right) = \\ &= M = 5\,\text{kNm}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

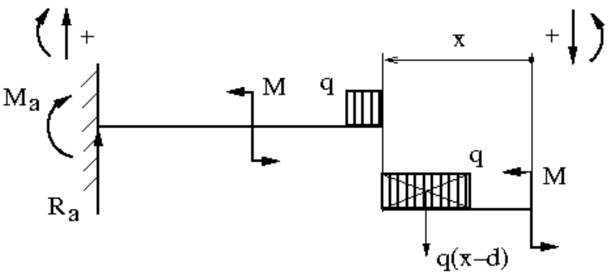
Výsledky získané z podmínek rovnováhy levé a pravé části nosníku se samozřejmě musí shodovat. Průběhy nalezených funkcí $T_1(x)$ a $M_1(x)$ v prvním poli jsou znázorněné na obr. 2.

Hledané funkce $T_1(x)$ a $M_1(x)$ lze také určit přímo pomocí metody řezu. Stačí pouze zavést znaménkovou úmluvu uvedenou v kap. 3.1, a potom $T_1(x)$ a $M_1(x)$ můžeme určit jako součet příslušných vnějších účinků po levé či pravé straně řezu při respektování odpovídající části znaménkové úmluvy[1]. Při vyšetřování $T(x)$ a $M(x)$ v dalších polích již nebudeme využívat podmínek rovnováhy, ale tvar těchto funkcí určíme přímo metodou řezu.

Pole II: $x \in \langle d, c+d \rangle$

Z obr. 4 je zřejmé, že $T_2(x)$ a $M_2(x)$ v tomto poli snáze určíme pomocí sčítání příslušných vnějších účinků vpravo od řezu v místě x, tj. s využitím pravé části znaménkové konvence (viz obr. 4). Potom

[1]Povšimněte si, že levá, resp. pravá, část znaménkové úmluvy je totožná s orientací vnitřních účinků při využití podmínek rovnováhy na části nosníku vpravo, resp. vlevo, od řezu.



Obrázek 4

$$T_2(x) = q(x-d)\,,$$
$$M_2(x) = M - q(x-d)\,\frac{x-d}{2} =$$
$$= M - q\,\frac{(x-d)^2}{2}\,. \qquad (7)$$

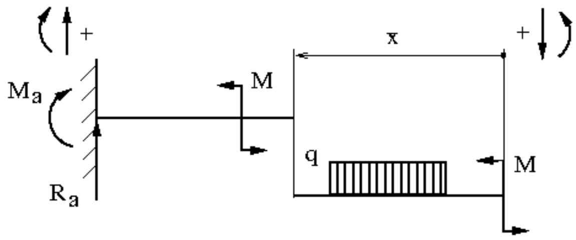
Ze vztahů (7) vyplývá, že $T(x)$ je v poli II popsána lineární funkcí, zatímco $M(x)$ je popsán funkcí kvadratickou. Z druhé derivace funkce $M(x)$ dále vyplývá, že se jedná o funkci konkávní ($\frac{d^2M(x)}{dx^2} < 0$). Tato funkce však nenabývá své extrémní hodnoty ve vnitřním bodě intervalu $\langle d, c{+}d\rangle$ (viz Schwedlerova věta), ale v jednom z krajních bodů.

K vykreslení těchto funkcí je vhodné provést jejich vyčíslení v krajních bodech pole II, tj. pro $x = d$ a $x = c + d$. Platí

$$T_2(d) = q(d-d) = 0, \qquad T_2(c+d) = qc = 4000\,\mathrm{N}\,,$$
$$M_2(d) = M - q(d-d) = M = 5000\,\mathrm{Nm}, \quad M_2(c+d) = M - \tfrac{qc^2}{2} = 4200\,\mathrm{Nm}\,.$$

Výsledné grafy funkcí (7) v poli II jsou znázorněny na obr. 2.

Pole III: $x \in \langle c+d, b+c+d\rangle$



Obrázek 5

Vzhledem k tomu, že máme již určené reakce R_A a M_A, je výhodné určit $T(x)$ a $M(x)$ v poli III jako součet vnějších účinků působících vlevo od řezu v místě x s využitím levé části znaménkové úmluvy (viz obr. 5).

Potom lze funkce $T_3(x)$ a $M_3(x)$ vyjádřit ve tvaru

$$T_3(x) = R_A = qc = 4000\,\mathrm{N}\,, \qquad (8)$$
$$M_3(x) = M_A - M + R_A(a+b+c+d-x) =$$
$$= 2M - qc\left(a+b+\frac{c}{2}\right) - M + qc(a+b+c+d-x) = M + \frac{qc^2}{2} + qc(d-x). \quad (9)$$

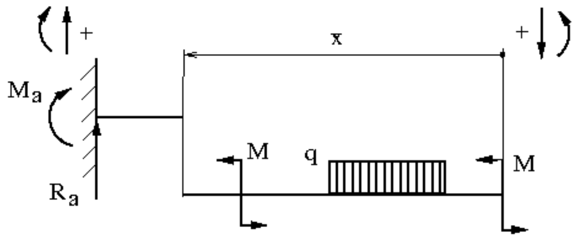
Po vyčíslení funkce momentu $M_3(x)$ v krajních bodech intervalu dostáváme

$$M_3(c+d) = M - \frac{qc^2}{2} = 4200\,\mathrm{Nm}\,, \quad M_3(b+c+d) = M + \frac{qc^2}{2} - qc(b+c) = 3000\,\mathrm{Nm}\,.$$

Výsledné průběhy funkcí $T(x)$ a $M(x)$ v poli III jsou znázorněny na obr. 2.

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

Pole IV: $x \in \langle b+c+d, a+b+c+d \rangle$



Obrázek 6

V tomto poli opět s výhodou využijeme znalosti reakcí R_A a M_A a vyjádříme $T_4(x)$ a $M_4(x)$ jako sumu příslušných účinků vlevo od řezu.

Potom podle obr. 6 bude platit

$$T_4(x) = R_A = qc = 4000\,\mathrm{N}\,, \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} M_4(x) &= R_A(a+b+c+d-x) + M_A = \\ &= qc(a+b+c+d-x) + 2M - qc\left(a+b+\frac{c}{2}\right) = 2M + q\frac{c^2}{2} + qc(d-x) \end{aligned} \qquad (11)$$

a po vyčíslení

$$M_4(b+c+d) = R_A a + M_A = 8000\,\mathrm{Nm}, \quad M_4(a+b+c+d) = M_A = 6000\,\mathrm{Nm}.$$

Výsledné rozložení $T(x)$ a $M(x)$ v poli IV je opět vykresleno do obr. 2.

V dalším kroku řešení úlohy provedeme dimenzování pro zadaný obdélníkový průřez. Pevnostní podmínka má v případě ohybu tvar

$$\sigma_{max} \leq \sigma_D = \frac{\sigma_k}{k}, \qquad (12)$$

kde maximální hodnotu napětí σ_{max} v krajních vláknech nosníku určíme ze vztahu $\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_o}$, kde

$$W_o = \frac{1}{6}BH^2 = \frac{1}{6}B\left(\frac{3}{2}B\right)^2 = \frac{3}{8}B^3. \qquad (13)$$

Hodnotu M_{max} určíme snadno z průběhu $M(x)$ na obr. 2. Z uvedeného obrázku je zřejmé, že $M_{max} = M_4(b+c+d) = 8000\,\mathrm{Nm}$. Pomocí vztahu (13) lze (12) přepsat do tvaru

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{\frac{3}{8}B^3} \leq \frac{\sigma_k}{k} \Rightarrow B \geq \sqrt[3]{\frac{8kM_{max}}{3\sigma_k}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 8000 \cdot 1.5}{3 \cdot 300 \cdot 10^6}} \doteq 0.047\,\mathrm{m} = 47\,\mathrm{mm}. \qquad (14)$$

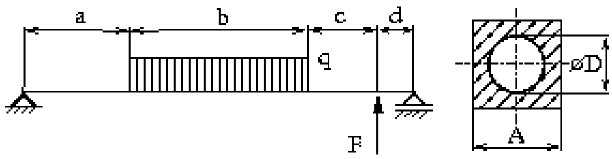
Ze znalosti rozměru B a zadaného poměru $\frac{H}{B}$ velmi snadno dopočítáme $H = 70.5$ mm.

OHYB (Napjatost)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

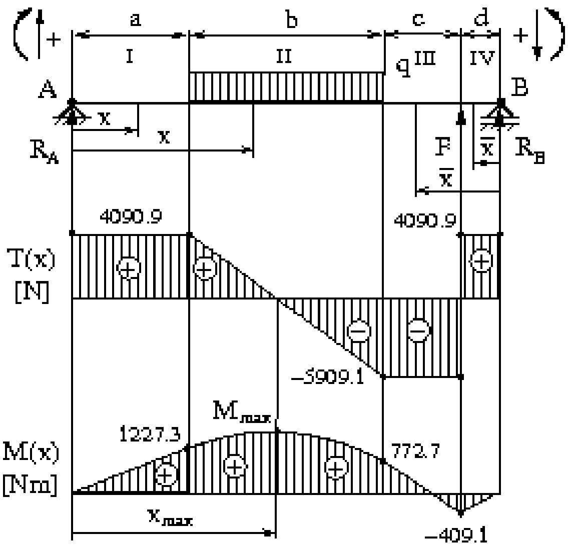
Příklad 2:

Pro nosník na obrázku vyšetřete a zakreslete reakce, $T(x)$ a $M(x)$. Dále proveďte dimenzování pro zadaný průřez.
Dáno: $a = 0.3\,\mathrm{m}$, $b = 0.5\,\mathrm{m}$, $c = 0.2\,\mathrm{m}$, $d = 0.1\,\mathrm{m}$, $A/D = 2$, $F = 10\,\mathrm{kN}$, $q = 20\,\mathrm{kN/m}$, $\sigma_D = 90\,\mathrm{MPa}$.



Obrázek 1

Řešení:



Obrázek 2

Jako první vyšetříme reakce vznikající ve vazbách. Vzhledem k charakteru zatížení budou v podpěrách vznikat nenulové reakce pouze ve svislém směru. Potom lze jejich velikosti určit např. z momentových podmínek rovnováhy, např. k bodu A a B. Reakci R_B pak určíme z podmínky

$$R_B(a+b+c+d) + F(a+b+c) - qb\left(a+\frac{b}{2}\right) = 0 \qquad (1)$$

a dostáváme

$$R_B = \frac{qb\left(a+\frac{b}{2}\right) - F(a+b+c)}{a+b+c+d} \doteq -4090.9\,\mathrm{N}. \qquad (2)$$

Analogicky z momentové podmínky k bodu B ve tvaru

$$R_A(a+b+c+d) - qb(d+c+\frac{b}{2}) + Fd = 0 \qquad (3)$$

určíme velikost R_A jako

$$R_A = \frac{qb\left(d+c+\frac{b}{2}\right) - Fd}{a+b+c+d} = 4090.9\,\mathrm{N}. \qquad (4)$$

Nyní vyšetříme vnitřní silové účinky $T(x)$ a $M(x)$ v jednotlivých polích nosníku. Vzhledem k charakteru vnějšího zatížení a typu uložení je nutné nosník rozdělit na 4 pole, tj. např. I až IV. Funkce popisující rozložení $T(x)$ a $M(x)$ v jednotlivých polích pak určíme přímo pomocí metody řezu s využitím konvence znázorněné na obr. 2. Při vyšetřování těchto funkcí využijeme orientaci souřadnic x a $\bar{x}$ znázorněnou na témže obrázku.

Pole I: $x \in \langle 0, a \rangle$

Vnitřní účinky v obecném řezu v poli I ve vzdálenosti x od bodu A, určíme jako sumu všech příslušných vnějších účinků po levé straně řezu, tj. využijeme levou část konvence.

Potom platí

$$T_1(x) = R_A = 4090.9\,\mathrm{N}, \quad M_1(x) = R_A x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_1(0) = 0, \\ M_1(a) = R_A a = 1227.3\,\mathrm{Nm}. \end{cases} \tag{5}$$

Pole II: $x \in \langle a, a+b \rangle$

Analogicky jako v předchozím poli vyjádříme $T_2(x)$ a $M_2(x)$ jako sumu všech příslušných účinků vlevo od řezu. Lze tedy psát

$$T_2(x) = R_A - q(x-a) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T_2(a) = R_A = 4090.9\,\mathrm{N}, \\ T_2(a+b) = R_A - qb = -5909.1\,\mathrm{N}, \end{cases} \tag{6}$$

$$M_2(x) = R_A x - q\,\frac{(x-a)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_2(a) = R_A a = 1227.3\,\mathrm{Nm}, \\ M_2(a+b) = R_A(a+b) - \frac{qb^2}{2} = 772.7\,\mathrm{Nm}. \end{cases} \tag{7}$$

Vnitřní silové účinky ve zbývajících polích III a IV vyšetříme pomocí nové proměnné $\bar{x}$ (viz obr. 2). V obou případech budeme přitom sčítat příslušné vnější účinky vpravo od řezu, tj. použijeme pravou část znaménkové konvence na obr. 2.

Pole III: $\bar{x} \in \langle d, c+d \rangle$

$$T_3(\bar{x}) = -R_B - F = -5909.1\,\mathrm{N}, \tag{8}$$

$$M_3(\bar{x}) = R_B\bar{x} + F(\bar{x}-d) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_3(d) = R_B d = -409.1\,\mathrm{Nm}, \\ M_3(c+d) = R_B(c+d) + Fc = 772.7\,\mathrm{Nm}. \end{cases} \tag{9}$$

Pole IV: $\bar{x} \in \langle 0, d \rangle$

$$T_4(\bar{x}) = -R_B = 4090.9\,\mathrm{N}, \tag{10}$$

$$M_4(\bar{x}) = R_B x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_4(0) = 0, \\ M_4(d) = R_B d = -409.1\,\mathrm{Nm}. \end{cases} \tag{11}$$

Výsledné průběhy $T(x)$ a $M(x)$ v polích I - IV jsou vykresleny na obr. 2. Z tvaru funkce $M_2(x)$ je zřejmé, že se jedná o konkávní parabolu (neboť $\frac{d^2M_2(x)}{dx^2} < 0$). Tato parabola má své lokální maximum ve vnitřním bodě intervalu $x \in \langle a, a+b \rangle$, neboť funkce $T_2(x)$ nabývá uvnitř tohoto intervalu nulové hodnoty (viz Schwedlerova věta).

Dále je z výše uvedených průběhů momentu zřejmé, že toto maximum funkce $M_2(x)$ představuje zároveň maximální ohybový moment M_{max} podél celého nosníku, který je nutné použít pro dimenzování nosníku. Pro hodnotu tohoto momentu tedy platí

$$M_{max} = M_2(x_{max}), \tag{12}$$

kde x_{max} je souřadnice udávající polohu maxima funkce $M_2(x)$, viz obr. 2. Její velikost snadno určíme z podmínky $T_2(x)_{max} = 0$, tj.

$$T_2(x_{max}) = R_A - q(x_{max} - a) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{max} = \frac{R_A}{q} + a \doteq 0.5045\,\mathrm{m}. \tag{13}$$

Potom

$$M_{max} = M_2(x_{max}) = R_A x_{max} - \frac{q(x_{max} - a)^2}{2} = 1645.7\,\mathrm{Nm}. \tag{14}$$

Při vlastním dimenzování vyjdeme z podmínky pevnosti ve tvaru

$$\sigma_{max} \le \sigma_D, \quad \text{kde} \quad \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_o}\,. \tag{15}$$

Vztah pro výpočet modulu průřezu v ohybu W_o pro zadaný čtvercový průřez s kruhovým otvorem určíme z definice W_o, tj.

$$W_o = \frac{J_z}{e}, \quad \text{kde} \quad J_z = \frac{A^4}{12} - \frac{\pi D^4}{64}, \quad e = \frac{A}{2} \quad \text{a} \quad \frac{A}{D} = 2 \text{ (viz zadání)}. \tag{16}$$

Potom lze W_o vyjádřit jako

$$W_o = \frac{\frac{A^4}{12} - \frac{\pi D^4}{64}}{\frac{A}{2}} = \frac{\frac{(2D)^4}{12} - \frac{\pi D^4}{64}}{D} = \frac{4}{3}D^3 - \frac{\pi D^3}{64} = D^3\left(\frac{4}{3} - \frac{\pi}{64}\right). \tag{17}$$

Pevnostní podmínku potom můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{M_{max}}{D^3\left(\frac{4}{3} - \frac{\pi}{64}\right)} \le \sigma_D, \tag{18}$$

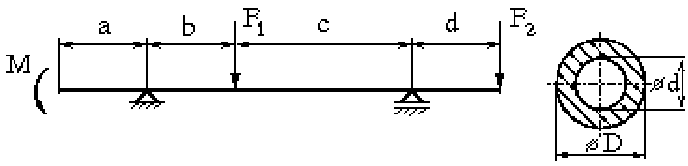
odkud vyplývá

$$D \ge \sqrt[3]{\frac{M_{max}}{\sigma_D\left(\frac{4}{3} - \frac{\pi}{64}\right)}}. \tag{19}$$

po vyčíslení vztahu (19) dostáváme velikost hledaného průměru $D \doteq 24.2$ mm. Zbývající charakteristický rozměr A snadno dopočítáme ze zadaného poměru A/D jako $A = 2D = 48.2$ mm.

Příklad 3:

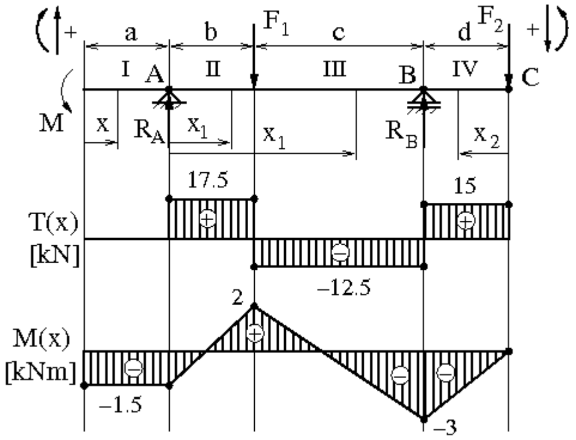
Pro nosník s převislými konci určete reakce, vyšetřete a zakreslete průběh vnitřní posouvající síly T a vnitřního ohybového momentu M a dimenzujte pro mezikruhový průřez.



Obrázek 1

Dáno: $F = 15\,\mathrm{kN}$, $a = 0.2\,\mathrm{m}$, $Re = 300\,\mathrm{MPa}$, $k = 1.5$, $b = a$, $c = 2a$, $d = a$, $M = \frac{1}{2}Fa$, $F_1 = 2F$, $F_2 = F$, $\frac{d}{D} = \frac{4}{5}$.

Řešení:



Obrázek 2

Jako první krok při řešení příkladu provedeme stanovení velikostí jednotlivých reakcí v uložení nosníku (rotační vazba v bodě A a obecná vazba v bodě B, viz obr. 2). Vnější síly F_1, F_2 způsobí v uložení nosníku nenulové reakce pouze ve svislém směru. Označme tyto reakce R_A a R_B a zvolme jejich orientaci např. podle obr. 2. Velikost těchto reakcí určíme z podmínek rovnováhy vnějších účinků na celém nosníku. Podle silové podmínky rovnováhy ve svislém směru a podle momentové podmínky rovnováhy k bodu A platí

$$R_A + R_B - F_1 - F_2 = 0, \quad (1)$$

$$M - F_1 b + R_B(b + c) - F_2(b + c + d) = 0. \quad (2)$$

Z rovnice (2) vyjádříme reakci R_B a po dosazení zadaných hodnot dostáváme

$$R_B = \frac{1}{b+c}\left[F_1 b + F_2(b + c + d) - M\right] = \frac{1}{a+2a}\left[2Fa + F(a + 2a + a) - \frac{1}{2}Fa\right] = \\ = \frac{11}{6}F = 27.5\,\mathrm{kN}. \quad (3)$$

Po dosazení (3) do silové podmínky rovnováhy (1) vyjádříme R_A ve tvaru

$$R_A = F_1 + F_2 - R_B = 2F + F - \frac{11}{6}F = \frac{7}{6}F = 17.5\,\mathrm{kN}. \quad (4)$$

V dalším kroku řešení vyšetříme pomocí metody řezu vnitřní silové účinky. Je zřejmé, že v tomto případě bude vhodné rozdělit nosník na čtyři části. Zvolme souřadnicový systém v jednotlivých částech nosníku v souladu s obr. 2. Potom pro vnitřní silové účinky v první části nosníku, vyjádřené jako součet příslušných vnějších účinků po levé straně řezu a při respektování levé části znaménkové úmluvy, platí

Pole I: $x \in \langle 0, a \rangle$

$$T_1(x) = 0, \quad M_1(x) = -M = -\frac{1}{2}Fa = -1.5\,\mathrm{kNm}. \tag{5}$$

Pro část II je výhodné zvolit novou souřadnici x_1 s počátkem v bodě A, viz obr. 2. Pak podobně jako v poli I můžeme vnitřní účinky v tomto poli vyjádřit jako

Pole II: $x_1 \in \langle 0, b \rangle$

$$T_2(x_1) = R_A = 17.5\,\mathrm{kN}, \tag{6}$$

$$M_2(x_1) = R_A x_1 - M \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_2(0) = -M = -1.5\,\mathrm{kNm}, \\ M_2(b) = \frac{7}{6}Fb - \frac{1}{2}Fa = \frac{2}{3}Fa = 2\,\mathrm{kNm}. \end{cases} \tag{7}$$

Pro vyšetření vnitřních účinků v části III využijeme opět proměnné x_1. Potom

Pole III: $x_1 \in \langle b, b+c \rangle$

$$T_3(x_1) = R_A - F_1 = \frac{7}{6}F - 2F = -\frac{5}{6}F = -12.5\,\mathrm{kN}, \tag{8}$$

$$M_3(x_1) = -M + R_A x_1 - F_1(x_1 - b) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_3(b) = -\frac{1}{2}Fa + \frac{7}{6}Fb = \frac{2}{3}Fa = 2\,\mathrm{kNm}, \\ M_3(b+c) = -\frac{1}{2}Fa + \frac{7}{6}F(b+c) - F_1 c = \\ \qquad = -Fa = -3\,\mathrm{kNm}. \end{cases} \tag{9}$$

Při vyšetřování vnitřních účinků v poli IV se jeví jako nevhodné sčítat vnější účinky po levé straně řezu. Vyskytuje se zde totiž řada vnějších účinků a výsledné funkce T_4 a M_4 by tak měly zbytečně komplikovaný tvar. Proto při hledání vnitřních účinků budeme sčítat vnější účinky na pravé části nosníku od místa řezu s respektováním pravé části znaménkové úmluvy pro vnitřní účinky a dále zavedeme novou souřadnici x_2 s počátkem v bodě C (viz obr. 2). Potom můžeme psát

Pole IV: $x_2 \in \langle 0, d \rangle$

$$T_4(x_2) = F_2 = F = 15\,\mathrm{kN}, \tag{10}$$

$$M_4(x_2) = -F_2 x_2 = -F x_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_4(0) = 0, \\ M_4(d) = -Fd = -Fa = -3\,\mathrm{kNm}. \end{cases} \tag{11}$$

Pomocí vztahů (5) až (11) lze vykreslit průběh vnitřní posouvající síly a vnitřního ohybového momentu na nosníku. Průběhy jsou zobrazeny na obr. 2.

V dalším kroku řešení přistoupíme k dimenzování nosníku. Vzhledem k tomu, že je zadaná hodnota součinitele bezpečnosti k vyjádřena k mezi kluzu Re, jedná se o materiál houževnatý. To ale znamená, že velikosti dovoleného napětí v tahu i v tlaku jsou stejné a lze je vyjádřit ve tvaru

$$\sigma_D = \frac{Re}{k} = 200\,\mathrm{MPa}. \tag{12}$$

Dále lze říci, že díky symetrii průřezu vůči neutrální ose budou velikosti maximálních napětí v tahu a v tlaku v daném řezu stejné. Největší napětí σ_{max} bude proto působit v řezu, ve kterém je velikost vnitřního ohybového momentu největší. Velikost tohoto momentu M_{max} snadno určíme z obr. 2 jako

$$M_{max} = |M_3(b+c)| = |M_4(d)| = 3\,\mathrm{kNm}. \tag{13}$$

Potom lze maximální ohybové napětí vyjádřit pomocí vztahu

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_o}, \tag{14}$$

kde pro modul průřezu v ohybu W_o pro mezikruhový průřez platí

$$W_o = \frac{J_z}{\frac{D}{2}} = \frac{2}{D}\left(\frac{\pi}{64}D^4 - \frac{\pi}{64}d^4\right) = \frac{\pi}{32}D^3\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right] = \frac{\pi}{32}D^3\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^4\right] = \frac{369\pi}{2\cdot 10^4}D^3. \tag{15}$$

Má-li být v nejvíce namáhaném místě napětí σ_D, musí platit

$$\sigma_{max} = \sigma_D. \tag{16}$$

Dosazením (12) až (15) do (16), úpravou a vyjádřením vnějšího průřezu D dostáváme

$$D = \sqrt[3]{\frac{20\cdot 10^3 M_{max}}{369\pi\sigma_D}} = \sqrt[3]{\frac{20\cdot 10^3\cdot 3\cdot 10^3}{369\pi\cdot 200\cdot 10^6}} \doteq 0.064\,\mathrm{m} = 64\,\mathrm{mm}. \tag{17}$$

Vnitřní průměr je potom $d = \frac{4}{5}D = 51.2$ mm.

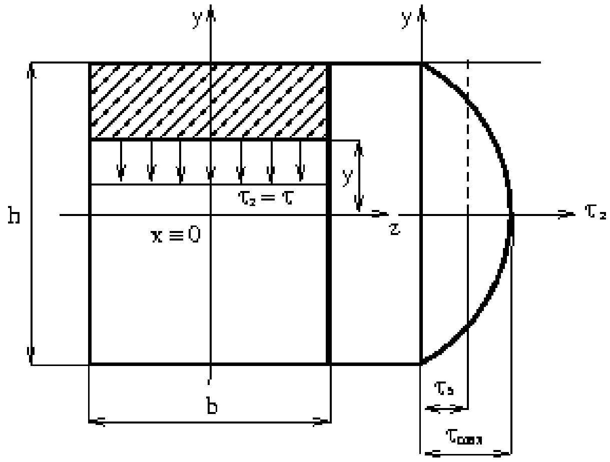
OHYB (Napjatost)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

Příklad 4:

Vyšetřete průběh smykového napětí u obdélníkového průřezu.

Řešení:



Obrázek 1

Pro $h/b \geq 2$ platí Žuravského rovnice

$$\tau_z = \frac{T(x)\,U_y}{b_y\,J_z}. \tag{1}$$

Pro obdelníkový průřez můžeme ale psát

$$b_y = b \quad \text{a} \quad J_z = \frac{1}{12}\,bh^3\,. \tag{2}$$

Lineární (statický) moment U_y potom vypočteme jako

$$U_y = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right) = \\ = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = \frac{bh^2}{8}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right). \tag{3}$$

Dosazením vztahu (3) do vztahu (1) lze napětí τ_z vyjádřit jako

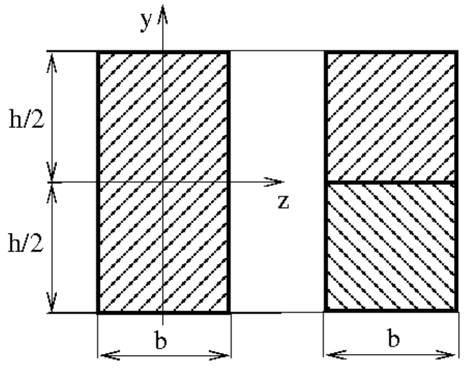
$$\tau_z = \frac{T(x)}{b\frac{1}{12}bh^3}\frac{bh^2}{8}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) = \frac{3}{2}\frac{T(x)}{bh}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right), \tag{4}$$

nebo

$$\tau_z = \frac{3}{2}\tau_s\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right), \quad \text{kde} \quad \tau_s = \frac{T(x)}{bh}\,. \tag{5}$$

Z výše uvedených vztahů je zřejmé, že

$$\tau_z = 0 \quad \text{pro} \quad y = \pm\frac{h}{2} \qquad \text{a} \qquad \tau_z = \tau_{max} = \frac{3}{2}\,\tau_s \quad \text{pro} \quad y = 0\,. \tag{6}$$



Obrázek 2

Na základě uvedeného výsledku rozhodněte, zda lze z hlediska tuhosti nahradit nosník obdélníkového průřezu o rozměrech h, b dvěma nosníky průřezu $\frac{h}{2}$, b (viz obr. 2). Své rozhodnutí zdůvodněte.