OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

4.1 Shrnutí základních poznatků

V případech příčných deformací přímých prutů - nosníků se zabýváme deformací jejich střednice, tj. spojnice těžiště příčných průřezů. Tuto deformovanou křivku nazýváme průhybová čára. Posunutí těžiště průřezu nosníku ve směru kolmém k jeho ose pak nazýváme průhyb nosníku v v daném místě. Úhel, o nějž se natočí každý průřez vůči své původní poloze v nezatíženém stavu, nazýváme úhel natočení průřezu φ. Níže popsané metody výpočtu zmíněných deformací jsou omezeny následujícími předpoklady:

- jedná se o rovinný ohyb,
- průhyby jsou malé,
- platí Hookeův zákon,
- nosník je prizmatický a modul pružnosti v tahu je konstantní,
- není uvažován vliv posouvajících sil.

Diferenciální rovnice průhybové čáry

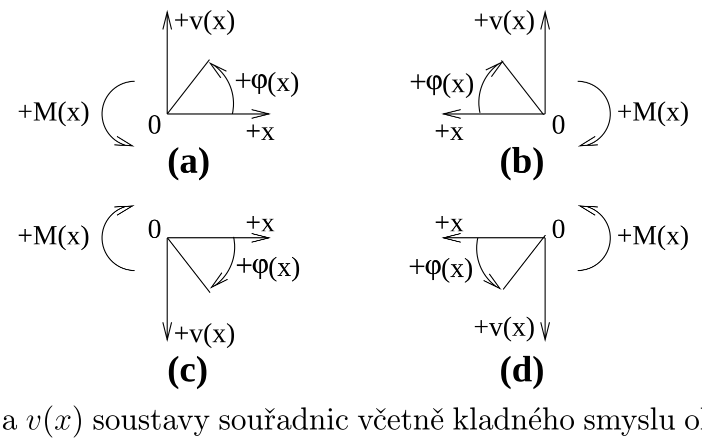
Pro uvedené kladné soustavy souřadnic $x, v(x)$, včetně kladného smyslu ohybových momentů, v souladu s obr. 1, má diferenciální rovnice průhybové čáry tvar

$$v''(x) = -\frac{M(x)}{EJ_z}\,, \tag{1}$$

kde $M(x)$ je vnitřní ohybový moment, E je modul pružnosti v tahu a J_z je kvadratický moment průřezu stanovený k neutrální ose. Dále uvažujeme

$$v'(x) = \tan\varphi(x) \doteq \varphi(x) \tag{2}$$

za předpokladu malých deformací. Úhel $\varphi(x)$ se přitom měří od kladné poloosy x k tečně průhybové čáry v uvažovaném bodě a to ve stejném smyslu, v němž se o úhel $\varphi = \frac{\pi}{2}$ pootočí kladný směr osy x do kladného směru osy $v(x)$, viz obr. 1.



Obr. 1: Volba os x a $v(x)$ soustavy souřadnic včetně kladného smyslu ohybového momentu.

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

Rovnice (1) popisující průhyb nosníku je obyčejná diferenciální rovnice 2. řádu. Jejím řešením tudíž obdržíme 2 integrační konstanty. Jak je ale vidět z (1), průhyb závisí na ohybovém momentu. Proto se průhybová čára bude skládat z tolika částí, na kolik intervalů (polí) byl nosník rozdělěn při vyšetřování průběhu vnitřního ohybového momentu. Byl-li tedy nosník rozdělěn na n polí, vyskytuje se v řešení $2n$ integračních konstant. Ty určíme z odpovídajících okrajových podmínek, které musí splňovat

- podmínky předepsané v uložení, tj. např. nulový průhyb v tuhé podpoře,
- podmínky vyjadřující spojitost průhybové čáry v bodech i, tj. $v(x_i-) = v(x_i+)$,
- podmínky vyjadřující hladkost průhybové čáry v bodech i, tj. $v'(x_i-) = v'(x_i+)$,

kde $x = x_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$ jsou odpovídající souřadnice bodů na rozhraní jednotlivých polí. Sestavením těchto okrajových podmínek dostáváme soustavu $2n$ lineárních algebraických rovnic pro neznámé integrační konstanty. Má-li potom nosník větší počet polí, stává se výpočet integračních konstant pracným. V těchto případech je výhodnější použít pro výpočet deformací jinou metodu.

Metoda momentových ploch

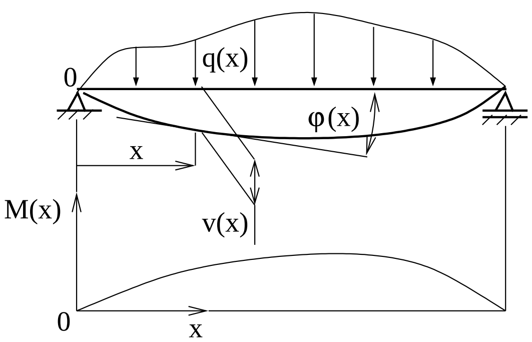
Pomocí této metody lze nejen, obdobně jako při řešení diferenciální rovnice, určit úhel natočení a průhyb v obecném řezu nosníku, ale rovněž i úhel natočení a průhyb přímo v řezu, který nás zajímá.

Metoda momentových ploch je založena na analogii Schwedlerovy věty pro posouvající sílu a ohybový moment

$$\frac{dT(x)}{dx} = -q(x) \qquad \text{a} \qquad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x) \tag{3}$$

a diferenciální rovnice, viz (1) a (2), popisující úhel natočení a průhyb

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = -\frac{M(x)}{EJ_z} \qquad \text{a} \qquad \frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ_z}\,. \tag{4}$$



Obr. 2: Nosník na dvou podporách.

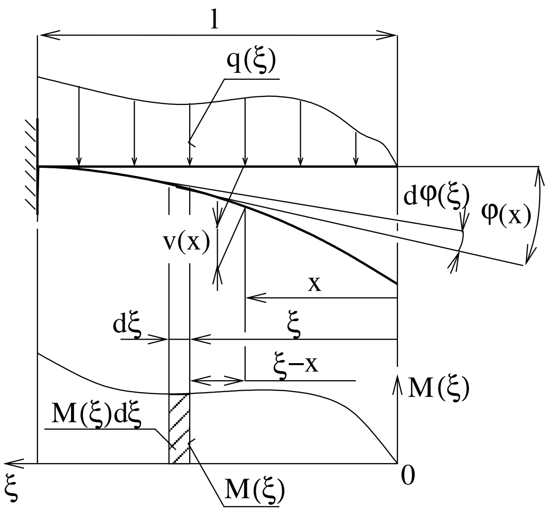
Z matematického hlediska se jedná o diferenciální rovnice naprosto stejného typu. Důležitým aspektem řešení jsou však okrajové podmínky odpovídající příslušným fyzikálním dějům. Proto si postupně ukážeme, jak je nutné postupovat při vyšetřování deformací nosníků různých typů. V závěru této části potom ukážeme další možnost řešení, kdy upravíme okrajové podmínky pomocí tzv. fiktivních nosníků.

Rovnice (3) a (4) mají v případě *nosníků na dvou podporách*, viz obr. 2, také shodné okrajové podmínky. Tyto skutečnosti jsou dostačující k tomu, abychom mohli využít matematického modelování, kdy jeden fyzikální děj může být popsán dějem jiným. Z uvedeného vyplývá, že úhel natočení lze vyjádřit jako

$$\varphi(x) = \frac{1}{EJ_z}\left[\begin{array}{l}\text{posouvající síla v místě hledaného úhlu natočení od zatížení}\\ \text{nosníku fiktivním obtížením totožným s momentovou plochou}\end{array}\right] \tag{5}$$

a obdobně průhyb

$$v(x) = \frac{1}{EJ_z}\left[\begin{array}{l}\text{ohybový moment v místě hledaného průhybu od zatížení nosníku}\\ \text{fiktivním obtížením totožným s momentovou plochou}\end{array}\right]. \tag{6}$$



Obr. 3: Nosník vetknutý.

Způsob výpočtu deformací u nosníků na dvou podporách uvedený v (5) a (6) nelze ovšem takto použít u *nosníků vetknutých*, kde nejsou splněny odpovídající si okrajové podmínky. Podle obr. 3 je pro $\xi = l$ fiktivní ohybový moment $M_f(l) \neq 0$, zatímco pro průbyb $v(l) = 0$. Podobně je pro fiktivní posouvající sílu $T_f(l) \neq 0$ a pro úhel natočení $\varphi(l) = 0$.

S ohledem na obr. 3 tedy můžeme psát

$$d\varphi(\xi) = \pm\frac{M(\xi)}{EJ_z}d\xi\,, \tag{7}$$

přičemž se zatím nezabývejme určením znaménka této rovnice. Z obr. 3 je dále vidět, že

$$dv(\xi) = (\xi - x)\,d\varphi(\xi) = \pm\frac{M(\xi)}{EJ_z}\,(\xi - x)\,d\xi\,. \tag{8}$$

Integrací předchozích dvou rovnic pro případ, že chceme určit úhel natočení a průhyb v místě x, dostáváme

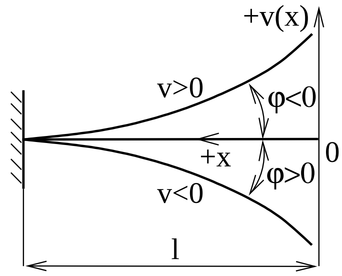
$$\varphi(x) = \pm\int_x^l \frac{M(\xi)}{EJ_z}d\xi \qquad \text{a} \qquad v(x) = \pm\int_x^l \frac{M(\xi)}{EJ_z}\,(\xi - x)\,d\xi\,. \tag{9}$$

Odtud vyplývá, že úhel natočení a průhyb se ve zvoleném řezu $x \in \langle 0, l\rangle$ vypočítá jako

$$\varphi(x) = \pm\frac{1}{EJ_z}\left[\begin{array}{l}\text{plocha části momentové plochy mezi místem}\\ \text{výpočtu úhlu natočení a místem vetknutí}\end{array}\right], \tag{10}$$

$$v(x) = \pm\frac{1}{EJ_z}\left[\begin{array}{l}\text{lineární moment (počítaný k místu průhybu) části momentové}\\ \text{plochy mezi místem výpočtu průhybu a místem vetknutí}\end{array}\right]. \tag{11}$$

Znaménko v těchto vztazích se určí podle zvolené soustavy souřadnic, viz obr. 4, pro $x \in \langle 0, l\rangle$. Znaménko ohybového momentu se potom při dosazování do integrálů uvažuje vždy kladné.



Obr. 4: Určení znaménka deformací.

Při výpočtu deformací na *nosnících s převislým koncem* využijeme postupu uvedeného u nosníků na dvou podporách a nosníků vetknutých, přičemž uplatníme zákon superpozice.

Jestliže se zabýváme výpočtem deformací na tomto typu nosníku pouze mezi podporami, provádíme výpočet shodně jako v případě nosníků mezi podporami, vztahy (5) a (6), přičemž do výpočtu zahrnujeme pouze vliv momentové plochy mezi podporami.

Jestliže se zabýváme výpočtem deformací na převislém konci nosníku, skládají se výsledné deformace ze dvou částí. Díky vlivu momentové plochy mezi podporami dojde k natočení převislého konce nosníku o úhel

$$\varphi_1 = \frac{1}{EJ_z}\left[\begin{array}{l}\text{posouvající síla v místě podpory od zatížení nosníku fiktivním}\\ \text{obtížením totožným s momentovou plochou mezi podporami}\end{array}\right] \qquad (12)$$

a tak i vzniku průhybu v_1, který pro malé hodnoty úhlu natočení vypočteme jako

$$v_1 = \varphi_1\,[\text{vzdálenost od podpory k místu výpočtu průhybu}]\,. \qquad (13)$$

K těmto hodnotám se pak superponují deformace vlastního převislého konce nosníku. Při tomto výpočtu si můžeme představit převislou část nosníku jako nosník vetknutý v místě podpory. Výpočet těchto deformací se pak řídí formálně vztahy (10) a (11). Znaménka dílčích deformací záleží na volbě souřadnicových systémů.

Obraťme nyní naši pozornost zpět ke vzahům (3) a (4). Jestliže označíme $\frac{M(x)}{EJ_z} = q_f(x)$ jako fiktivní spojité zatížení, je z analogie mezi rovnicemi (3) a (4) zřejmé, že

- vyšetření úhlu natočení $\varphi(x)$ je totožné s vyšetřením fiktivní posouvající síly $T_f(x)$ v daném místě nosníku,
- vyšetření průhybu $v(x)$ je totožné s vyšetřením fiktivního ohybového momentu $M_f(x)$ v daném místě nosníku.

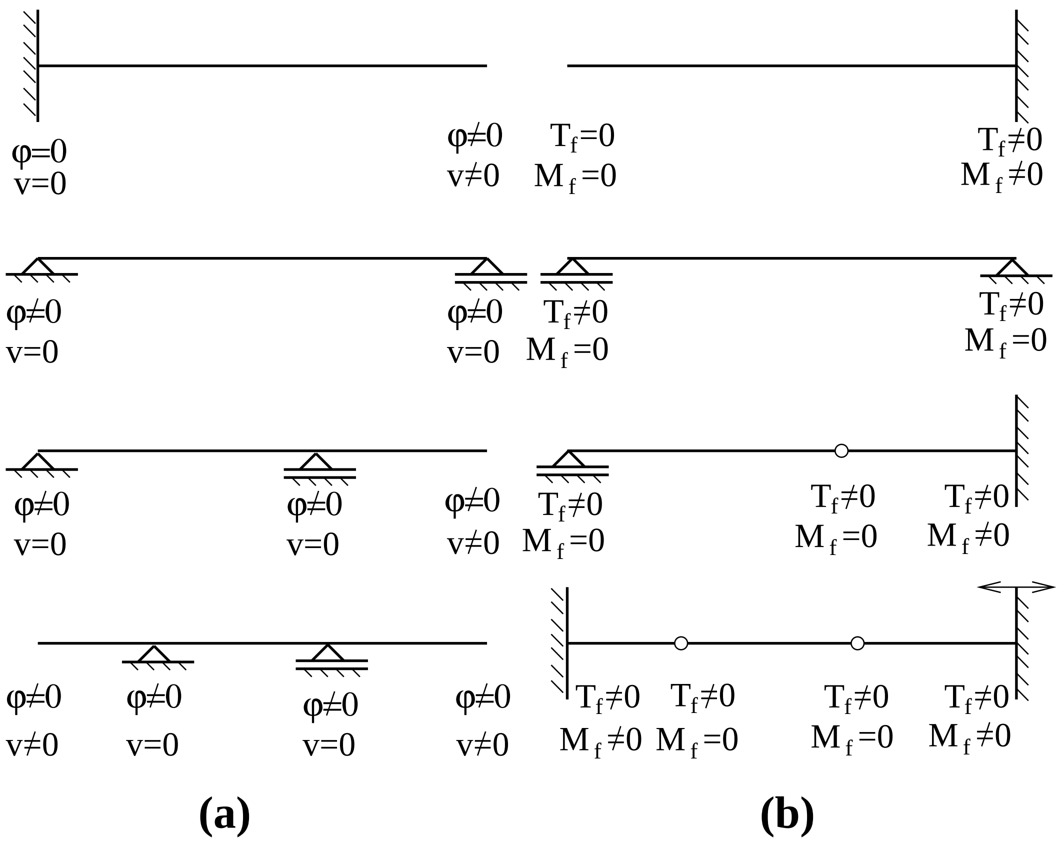
Oba předchozí závěry jsou však obecně v platnosti bez ohledu na typ nosníku jen tehdy, jsou-li okrajové podmínky pro T_f, resp. pro M_f, totožné s okrajovými podmínkami pro φ, resp. pro v. Proto nosník, jehož deformace vyšetřujeme, nazývejme nosníkem skutečným. Ke každému skutečnému nosníku potom přiřaďme takový nosník, jehož okrajové podmínky pro T_f a M_f se shodují s okrajovými podmínkami skutečného nosníku pro φ a v. Takový nosník nazývejme *nosníkem náhradním*, nebo také *fiktivním*. Jejich přehled nalezneme na obr. 5.

Výpočet deformace metodou momentových ploch s použitím fiktivního nosníku pak můžeme obecně formulovat takto:

$$\varphi(x) = \frac{1}{EJ_z}\left[\begin{array}{l}\text{fiktivní posouvající síla v daném místě na náhradním nosníku}\\ \text{od zatížení momentovou plochou skutečného nosníku}\end{array}\right], \tag{14}$$

$$v(x) = \frac{1}{EJ_z}\left[\begin{array}{l}\text{fiktivní ohybový moment v daném místě na náhradním nosníku}\\ \text{od zatížení momentovou plochou skutečného nosníku}\end{array}\right]. \tag{15}$$

Poznamanejme ještě, že s ohledem na znaménka vyskytující se ve Schwedlerově větě je výhodné dodržovat při vyšetřování T_f a M_f stejnou znaménkovou úmluvu jako v případech vyšetřování T a M, viz kapitoly OHYB (Napjatost). V takovém případě se kladné směry deformací nosníku řídí směry zobrazenými na obr. 1(c).



Obr. 5: Skutečné nosníky ve sloupci (a) a jim odpovídající nosníky náhradní (fiktivní) ve sloupci (b).