

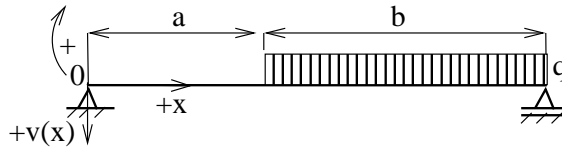
OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

4.3 Řešené příklady

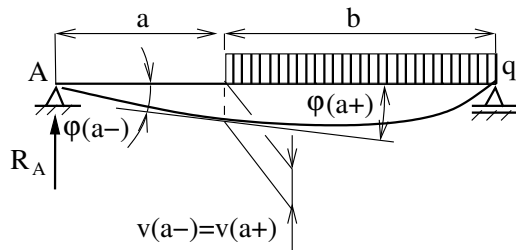
Příklad 1:

Určete s využitím diferenciální rovnice průhybové čáry úhel natočení a průhyb v obecném místě $x \in \langle 0, l \rangle$ nosníku na obrázku, je-li dáno: $a, b, q, E = \text{konst.}$ a $J_z = \text{konst.}$ Při řešení respektujte volbu os $x, v(x)$ souřadnicového systému a volbu smyslu ohybového momentu.



Obr. 1

Řešení:



Obr. 2

Pro uvažovaný kladný ohybový moment $M(x)$ a zvolený systém souřadnic $x, v(x)$ má diferenciální rovnice průhybové čáry tvar

$$v''(x) = -\frac{M(x)}{EJ_z}. \quad (1)$$

V našem případě je ohybový moment vyjádřen rovnicemi

$$M(x) = R_A x \quad \text{pro } x \in \langle 0, a \rangle \quad \text{a} \quad M(x) = R_A x - \frac{q}{2} (x - a)^2 \quad \text{pro } x \in \langle a, l \rangle^1, \quad (2)$$

kde $l = a + b$ a $R_A = \frac{qb^2}{2l}$, viz obr. 2. Proto bude průhybová čára popsána dvěma diferenciálními rovnicemi. Řešením rovnic (3) metodou separace proměnných, tj. přímou integrací, dostaneme postupně v jednotlivých polích

$$x \in \langle 0, a \rangle :$$

$$EJ_z v''(x) = -R_A x,$$

$$EJ_z v'(x) = -\frac{R_A x^2}{2} + C_1,$$

$$EJ_z v(x) = -\frac{R_A x^3}{6} + C_1 x + C_2,$$

$$x \in \langle a, l \rangle :$$

$$EJ_z v''(x) = -R_A x + \frac{q \zeta^2}{2}, \quad (3)$$

$$EJ_z v'(x) = -\frac{R_A x^2}{2} + \frac{q \zeta^3}{2 \cdot 3} + D_1, \quad (4)$$

$$EJ_z v(x) = -\frac{R_A x^3}{6} + \frac{q \zeta^4}{6 \cdot 4} + D_1 x + D_2 \quad (5)$$

¹Pro zjednodušení výpočtu zvolme $x - a = \zeta$ a pišme dále $M(x) = R_A x - \frac{q \zeta^2}{2}$.

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

vztahy pro úhel natočení a průhyb. V nich se vyskytují 4 neznámé integrační konstanty C_1 až D_2 , které je nutné určit z okrajových podmínek.

Za předpokladu tuhé podpory A bude

$$v(0) = 0. \quad (6)$$

Odtud po dosazení do vztahu pro průhyb bude

$$C_2 = 0 \quad (7)$$

a tedy v tomto intervalu $x \in \langle 0, a \rangle$ pro průhyb platí

$$v(x) = \frac{1}{EJ_z} \left(-\frac{R_A}{6} x^3 + C_1 x \right).$$

Ve společném bodě, kde $x = a$ (obr. 2), musí být funkce průhybu spojitá,

$$v(a-) = v(a+), \quad (8)$$

a hladká křivka. To znamená, že obě křivky, ze kterých se skládá, musí mít společnou také tečnu, tj.

$$v'(a-) = v'(a+). \quad (9)$$

Po rozepsání této podmínky

$$\frac{1}{EJ_z} \left(-\frac{R_A a^2}{2} + C_1 \right) = \frac{1}{EJ_z} \left[-\frac{R_A a^2}{2} + \frac{q}{6} (a-a)^3 + D_1 \right]$$

a její jednoduché úpravě snadno nahlédneme, že

$$C_1 = D_1. \quad (10)$$

Ze spojitosti průhybové čáry (8) po dosazení dostáváme

$$\frac{1}{EJ_z} \left(-\frac{R_A a^3}{6} + C_1 a \right) = \frac{1}{EJ_z} \left[-\frac{R_A a^3}{6} + \frac{q}{24} (a-a)^4 + D_1 a + D_2 \right]$$

a odtud

$$D_2 = 0 \quad (11)$$

s ohledem na (10). Při tuhé podpoře B bude okrajová podmínka pro $x = l$

$$v(l) = 0. \quad (12)$$

Po její úpravě

$$\frac{1}{EJ_z} \left[-\frac{R_A l^3}{6} + \frac{q}{24} (l-a)^4 + D_1 l \right] = 0$$

²Zjednodušený způsob zápisu pro výraz $\lim_{x \rightarrow a-} v(x) = \lim_{x \rightarrow a+} v(x)$.

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

dostáváme zbyvajících integračních konstantu

$$D_1 = \frac{1}{l} \left(\frac{R_A l^3}{6} - \frac{qb^4}{24} \right) = \frac{qb^2 l}{12} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

Nakonec, dosazením do rovnic pro úhel natočení (4) a průhyb (5) s ohledem na vypočítané integrační konstanty (7), (10), (11) a (13), nalezneme po malé úpravě pro

$x \in \langle 0, a \rangle :$

$$\varphi(x) = \frac{1}{EJ_z} \left(-\frac{R_A x^2}{2} + C_1 \right) = \frac{qb^2 l}{12EJ_z} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{l} \right)^2 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right], \quad (14)$$

$$v(x) = \frac{1}{EJ_z} \left(-\frac{R_A x^3}{6} + C_1 x \right) = \frac{qb^2 l x}{12EJ_z} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{l} \right)^2 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right], \quad (15)$$

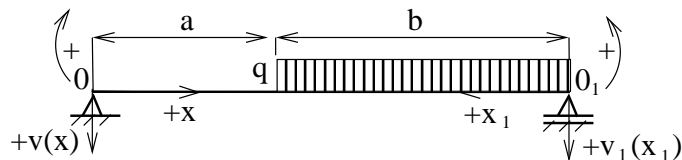
$x \in \langle a, l \rangle :$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{EJ_z} \left[-\frac{R_A x^2}{2} + \frac{q(x-a)^3}{6} + D_1 \right] = \\ &= \frac{qb^2 l}{12EJ_z} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{l} \right)^2 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 2 \frac{(x-a)^3}{b^2 l} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1}{EJ_z} \left[-\frac{R_A x^3}{6} + \frac{q(x-a)^4}{24} + D_1 x \right] = \\ &= \frac{qb^2 l x}{12EJ_z} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{l} \right)^2 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \frac{(x-a)^4}{2b^2 l x} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Příklad 2:

Určete s využitím diferenciální rovnice průhybové čáry úhel natočení a průhyb v obecném místě $x \in \langle 0, a \rangle$ a $x_1 \in \langle 0, b \rangle$ nosníku na obrázku, je-li dáno: $a, b, q, E = \text{konst.}, J_z = \text{konst.}$ Při řešení respektujte volbu os $x, v(x)$ a $x_1, v_1(x_1)$ souřadnicových systémů a volbu směrů kladných ohybových momentů.

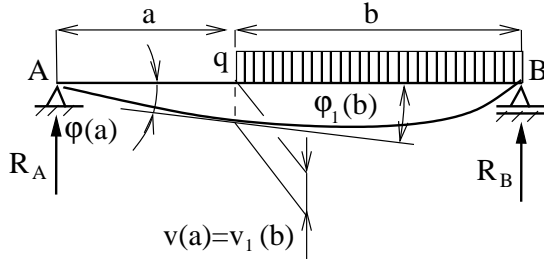


Obr. 1

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

Řešení:



Obr. 2

Při řešení tohoto příkladu si ukážeme, že v případech nosníků o dvou polích lze dospět k výsledku jednodušeji než při variantě řešení z příkladu 1 a to vhodnou volbou dvou systémů souřadnic $x, v(x)$ a $x_1, v_1(x_1)$, jak je vidět na obr. 1.

V souladu se zadáním lze tedy průběh ohybového momentu vyjádřit rovnicemi

$$M(x) = R_A x \quad \text{pro } x \in \langle 0, a \rangle \quad \text{a} \quad M_1(x_1) = R_B x_1 - \frac{q x_1^2}{2} \quad \text{pro } x_1 \in \langle 0, b \rangle, \quad (1)$$

kde reakce $R_A = \frac{qb^2}{2l}$ a reakce $R_B = qb \left(1 - \frac{b}{2l}\right)$, přičemž $l = a + b$, viz obr. 2. Průhybová čára nosníku bude opět popsána dvěma diferenciálními rovnicemi. Jejich řešením metodou separace proměnných dostaneme v jednotlivých polích postupně

$$x \in \langle 0, a \rangle :$$

$$EJ_z v''(x) = -R_A x,$$

$$EJ_z v'(x) = -\frac{R_A x^2}{2} + C_1,$$

$$EJ_z v(x) = -\frac{R_A x^3}{6} + C_1 x + C_2,$$

$$x_1 \in \langle 0, b \rangle :$$

$$EJ_z v_1''(x_1) = -R_B x_1 + \frac{q x_1^2}{2}, \quad (2)$$

$$EJ_z v_1'(x_1) = -\frac{R_B x_1^2}{2} + \frac{q x_1^3}{6} + D_1, \quad (3)$$

$$EJ_z v_1(x_1) = -\frac{R_B x_1^3}{6} + \frac{q x_1^4}{24} + D_1 x_1 + D_2. \quad (4)$$

Okrajové podmínky v místech tuhých podpor $x = 0$ a $x_1 = 0$ jsou

$$v(0) = 0 \quad \text{a} \quad v_1(0) = 0. \quad (5)$$

Pomocí (4) snadno nahlédneme, že

$$C_2 = 0 \quad \text{a} \quad D_2 = 0. \quad (6)$$

Podmínka spojitosti v řezu $x = a$, resp. $x_1 = b$, je

$$v(a) = v_1(b) \quad (7)$$

a současně podmínka hladkosti průhybové čáry v témže řezu je

$$v'(a) = -v_1'(b). \quad (8)$$

Záporné znaménko je ve vztahu proto, že nezávisle proměnné x, x_1 mají opačný smysl. Podmínka by měla být korektně vyjádřena ve tvaru $|v'(a)| = |v_1'(b)|$. V uvažovaných 2

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

soustavách souřadnic je např. $v'(a) > 0$, ale potom musí být $v'_1(b) < 0$, tj. $|v'(a)| = v'(a)$ a $|v'_1(b)| = -v'_1(b)$. Řešením soustavy 2 lineárních algebraických rovnic (7) a (8)

$$\begin{aligned} -\frac{R_A a^3}{6} + C_1 a &= -\frac{R_B b^3}{6} + \frac{qb^4}{24} + D_1 b \\ -\frac{R_A a^2}{2} + C_1 &= \frac{R_B b^2}{2} - \frac{qb^3}{6} - D_1 \end{aligned}$$

pro neznámé integrační konstanty C_1 a D_1 obdržíme po úpravách

$$C_1 = \frac{qb^2 l}{12} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right], \quad (9)$$

$$D_1 = -\frac{qb^2 l}{12} \left[1 - 4\frac{b}{l} + \frac{11}{2} \left(\frac{b}{l} \right)^2 - 6 \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right]. \quad (10)$$

Dosazením vypočítaných integračních konstant, vztahy (6), (9) a (10), do rovnic pro úhel natočení (3) a průhyb (4) obdržíme po úpravě výsledné závislosti pro

$x \in \langle 0, a \rangle :$

$$\varphi(x) = \frac{qb^2 l}{12EJ_z} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{l} \right)^2 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right], \quad (11)$$

$$v(x) = \frac{qb^2 l x}{12EJ_z} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{l} \right)^2 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right], \quad (12)$$

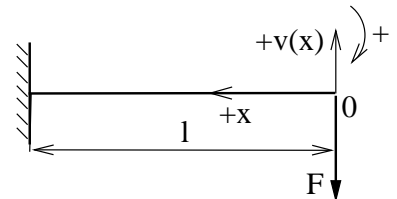
$x_1 \in \langle 0, b \rangle :$

$$\varphi_1(x_1) = \frac{-qb^2 l}{12EJ_z} \left[1 - 4\frac{b}{l} + \frac{11}{2} \left(\frac{b}{l} \right)^2 - 6 \left(\frac{a}{l} \right)^2 + 3 \left(2\frac{l}{b} - 1 \right) \left(\frac{x_1}{l} \right)^2 - 2 \left(\frac{l}{b} \right)^2 \left(\frac{x_1}{l} \right)^3 \right], \quad (13)$$

$$v_1(x_1) = \frac{-qb^2 l x_1}{12EJ_z} \left[1 - 4\frac{b}{l} + \frac{11}{2} \left(\frac{b}{l} \right)^2 - 6 \left(\frac{a}{l} \right)^2 + \left(2\frac{l}{b} - 1 \right) \left(\frac{x_1}{l} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{b} \right)^2 \left(\frac{x_1}{l} \right)^3 \right]. \quad (14)$$

Příklad 3:

Určete s využitím diferenciální rovnice průhybové čáry úhel natočení a průhyb v obecném místě $x \in \langle 0, l \rangle$ nosníku na obrázku, je-li dáno: $l, F, E = \text{konst.}, J_z = \text{konst.}$ Při řešení respektujte volbu os $x, v(x)$ souřadnicového systému a volbu kladného směru ohybového momentu.

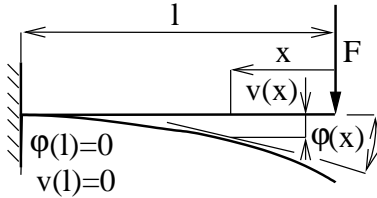


Obr. 1

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

Řešení:



Obr. 2

Pro uvažovaný kladný ohybový moment $M(x)$ a zvolený systém souřadnic $x, v(x)$, obr. 2, má diferenciální rovnice průhybové čáry tvar

$$v''(x) = -\frac{M(x)}{EJ_z}. \quad (1)$$

Pro ohybový moment vyšetřený z volného konce nosníku lze psát

$$M(x) = Fx \quad \text{pro } x \in \langle 0, l \rangle \quad (2)$$

a tudíž deformace nosníku je možné popsat pouze v jednom poli. Dosazením (2) do (1) a postupným integrováním dostáváme

$$EJ_z v''(x) = -Fx, \quad (3)$$

$$EJ_z v'(x) = -\frac{Fx^2}{2} + C_1, \quad (4)$$

$$EJ_z v(x) = -\frac{Fx^3}{6} + C_1x + C_2. \quad (5)$$

Okrajové podmínky budeme hledat v místě uložení, tj. v místě $x = l$. Za předpokladu absolutně tuhého vetknutí můžeme zřejmě psát

$$v'(l) = 0 \quad \text{a} \quad v(l) = 0. \quad (6)$$

Z první okrajové podmínky (6) po dosazení

$$\frac{1}{EJ_z} \left(-\frac{Fl^2}{2} + C_1 \right) = 0$$

určíme jednoduše integrační konstantu

$$C_1 = \frac{Fl^2}{2}. \quad (7)$$

Z druhé okrajové podmínky (6) pomocí C_1

$$\frac{1}{EJ_z} \left(-\frac{Fl^3}{6} + \frac{Fl^3}{2} + C_2 \right) = 0$$

pak vypočteme zbývající konstantu

$$C_2 = -\frac{Fl^3}{3}. \quad (8)$$

Po dosazení a úpravě dostáváme výsledný tvar funkcí popisujících deformace celého nosníku

$$\varphi(x) = \frac{Fl^2}{2EJ_z} \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right], \quad (9)$$

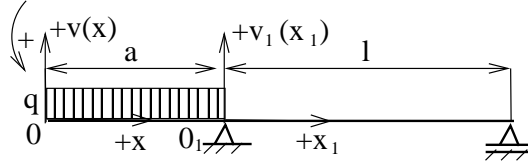
$$v(x) = \frac{-Fl^3}{3EJ_z} \left[1 - \frac{3x}{2l} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]. \quad (10)$$

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

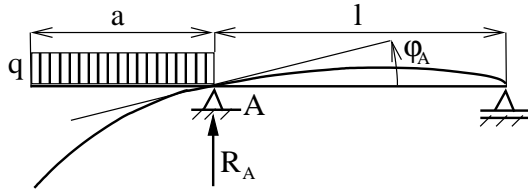
Příklad 4:

Určete s využitím diferenciální rovnice průhybové čáry úhel natočení a průhyb v obecném místě $x \in \langle 0, a \rangle$ a $x_1 \in \langle 0, l \rangle$ nosníku na obrázku, je-li dáno: $a, l, q, E = \text{konst.}, J_z = \text{konst.}$ Při řešení respektujte volbu os $x, v(x)$ a $x_1, v_1(x_1)$ souřadnicových systémů a volbu směru ohybových momentů.



Obr. 1

Řešení:



Obr. 2

Při řešení tohoto příkladu ukážeme, jak je možné postupovat u nosníků s převislým koncem, jestliže pro výpočet použijeme diferenciální rovnici průhybové čáry.

Zvolme například dvě soustavy souřadnic $x, v(x)$ a $x_1, v_1(x_1)$, jak je vidět na obr. 1. S ohledem na tuto volbu souřadnic lze průběh ohybového momentu vyjádřit jako

$$M(x) = \frac{qx^2}{2} \quad \text{pro } x \in \langle 0, a \rangle \quad \text{a} \quad M_1(x_1) = -R_A x_1 + qa \left(x_1 + \frac{a}{2} \right) \quad \text{pro } x_1 \in \langle 0, l \rangle, \quad (1)$$

kde reakce $R_A = qa \left(1 + \frac{a}{2l} \right)$, viz obr. 2. Průhybová čára nosníku bude tedy popsána dvěma diferenciálními rovnicemi. Jejich řešením metodou separace proměnných dostaneme v jednotlivých polích postupně

$$x \in \langle 0, a \rangle :$$

$$x_1 \in \langle 0, l \rangle :$$

$$EJ_z v''(x) = -\frac{qx^2}{2},$$

$$EJ_z v_1''(x_1) = R_A x_1 - qa \left(x_1 + \frac{a}{2} \right), \quad (2)$$

$$EJ_z v'(x) = -\frac{qx^3}{6} + C_1,$$

$$EJ_z v_1'(x_1) = R_A \frac{x_1^2}{2} - qa \left(\frac{x_1^2}{2} + \frac{ax_1}{2} \right) + D_1, \quad (3)$$

$$EJ_z v(x) = -\frac{qx^4}{24} + C_1 x + C_2,$$

$$EJ_z v_1(x_1) = R_A \frac{x_1^3}{6} - qa \left(\frac{x_1^3}{6} + \frac{ax_1^2}{4} \right) + D_1 x_1 + D_2. \quad (4)$$

Pro část nosníku mezi podporami, tj. na intervalu $x_1 \in \langle 0, l \rangle$, musí vzhledem k předpokladu tuhých podpor platit

$$v_1(0) = 0 \quad \text{a} \quad v_1(l) = 0. \quad (5)$$

Po dosazení do první z těchto okrajových podmínek ihned vyplývá, že

$$D_2 = 0. \quad (6)$$

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

Dosazením do druhé z nich

$$\frac{1}{EJ_z} \left(qa \left(1 + \frac{a}{2l} \right) \frac{l^3}{6} - qa \left(\frac{l^3}{6} + \frac{al^2}{4} \right) + D_1 l \right) = 0$$

a úpravou zjistíme integrační konstantu

$$D_1 = \frac{qa^2 l}{6}. \quad (7)$$

Protože souřadnicové systémy mají shodnou orientaci kladných os, bude i velikost úhlu natočení v podpoře A stejná, přičemž její velikost můžeme určit za pomoci (3) a (7). Platí

$$v'(a) = v'_1(0) = \frac{D_1}{EJ_z} = \frac{qa^2 l}{6EJ_z}. \quad (8)$$

Z této okrajové podmínky

$$\frac{1}{EJ_z} \left(-\frac{qa^3}{6} + C_1 \right) = \frac{qa^2 l}{6EJ_z}$$

pak dopočítáme integrační konstantu

$$C_1 = \frac{qa^3}{6} \left(1 + \frac{l}{a} \right). \quad (9)$$

Zbývající konstantu C_2 určíme z podmínky spojitosti průhybové čáry v podpoře A , kde lze zároveň předepsat i velikost průhybu

$$v(a) = v_1(0) = 0. \quad (10)$$

Po dosazení C_1 do tohoto vztahu

$$\frac{1}{EJ_z} \left(-\frac{qa^4}{24} + \frac{qa^4}{6} + \frac{qa^3 l}{6} + C_2 \right) = 0$$

a následněm vyjádření integrační konstanty

$$C_2 = -\frac{qa^4}{8} \left(1 + \frac{4l}{3a} \right) \quad (11)$$

můžeme po úpravě popsat deformace nosníku, viz (3) a (7), následovně:

$x \in \langle 0, a \rangle :$

$$\varphi(x) = \frac{qa^3}{6EJ_z} \left[1 + \frac{l}{a} - \left(\frac{x}{a} \right)^3 \right], \quad (12)$$

$$v(x) = -\frac{qa^4}{8EJ_z} \left[1 + \frac{4l}{3a} \left(1 - \frac{x}{a} \right) - \frac{4}{3} \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{a} \right)^4 \right], \quad (13)$$

$x_1 \in \langle 0, l \rangle :$

$$\varphi_1(x_1) = \frac{qa^2 l}{6EJ_z} \left[1 - 3\frac{x_1}{l} + \frac{3}{2} \left(\frac{x_1}{l} \right)^2 \right], \quad (14)$$

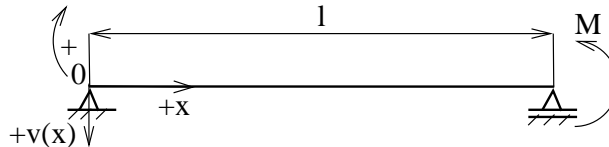
$$v_1(x_1) = \frac{qa^2 l x_1}{6EJ_z} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{x_1}{l} + \left(\frac{x_1}{l} \right)^2 \right]. \quad (15)$$

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

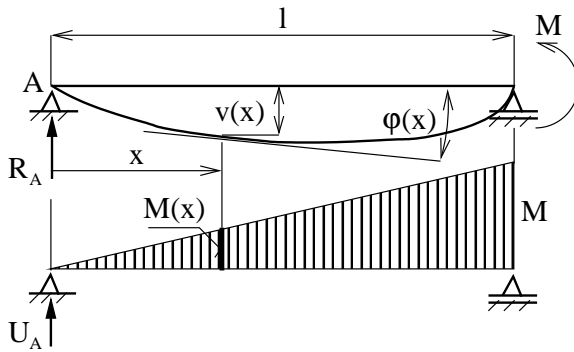
Příklad 5:

Pomocí metody momentových ploch vypočítejte úhel natočení a průhyb v obecném místě $x \in \langle 0, l \rangle$ nosníku na obrázku, je-li dáno: l , M , $E = \text{konst.}$ a $J_z = \text{konst.}$ Dále určete hodnotu maximálního průhybu. Při řešení respektujte volbu os $x, v(x)$ souřadnicového systému.



Obr. 1

Řešení:



Obr. 2

Chceme-li pro výpočet deformací nosníku použít metody momentových ploch, musíme nejprve znát průběh vnitřního ohybového momentu podél nosníku. S ohledem na volbu souřadnic (obr. 1) lze vyjádřit průběh ohybového momentu podél celého nosníku jako

$$M(x) = R_A x \Rightarrow \begin{cases} M(0) = 0, \\ M(l) = M, \end{cases} \quad (1)$$

kde $R_A = \frac{M}{l}$ je reakce v bodě A, viz obr. 2.

Nyní si představíme momentovou plochu jako fiktivní spojitě obtížení nosníku, obr. 2. Stejně jako u skutečného nosníku musíme i zde vypočítat reakce. V našem příkladě bude postačovat určení pouze jedné z nich, např. fiktivní reakce U_A . Tu vypočítáme z momentové podmínky k bodu B

$$U_A l - \frac{Ml}{2} \frac{l}{3} = 0 \Rightarrow U_A = \frac{Ml}{6}. \quad (2)$$

Podle definice pro nosníky mezi podporami pak vypočítáme úhel natočení a průhyb v obecném místě $x \in \langle 0, l \rangle$ jako

$$\varphi(x) = \frac{1}{EJ_z} \left[U_A x - M(x) \frac{x}{2} \right] = \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{Ml}{6} x - M \frac{x}{l} \frac{x}{2} \right] = \frac{Ml}{6EJ_z} \left[1 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right], \quad (3)$$

$$v(x) = \frac{1}{EJ_z} \left[U_A x^2 - M(x) \frac{x}{2} \frac{x}{3} \right] = \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{Ml}{6} x^2 - M \frac{x}{l} \frac{x^2}{6} \right] = \frac{Mlx}{6EJ_z} \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]. \quad (4)$$

Velikost maximálního průhybu stanovíme s pomocí 1. derivace funkce (4), která popisuje průhyb v . Tato derivace je však přímo rovna funkci popisující úhel natočení φ . Položíme-li tedy vztah (3) roven nule,

$$\frac{M}{6EJ_z l} (l^2 - 3x^2) = 0, \quad (5)$$

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

dostaneme kořeny této rovnice

$$x_{1,2} = \pm \frac{l}{\sqrt{3}}. \quad (6)$$

S ohledem na definiční obor $x \in \langle 0, l \rangle$ má však smysl pouze kořen

$$x_1 = \frac{l}{\sqrt{3}} \doteq 0.577l. \quad (7)$$

O tom, že se jedná skutečně o místo maximálního průhybu, se přesvědčíme pomocí 2. derivace funkce průhyb

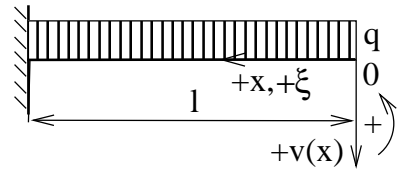
$$v''(x) = -\frac{Mx}{EJ_z l}. \quad (8)$$

Dosazením (7) do (8) zjistíme relaci $v''(x_1) < 0$, což je důkaz, že funkce $v(x)$ nabývá v bodě x_1 maxima. Maximální průhyb je tedy roven

$$v_{max} = v(x_1) = \frac{\sqrt{3} Ml^2}{27 EJ_z}. \quad (9)$$

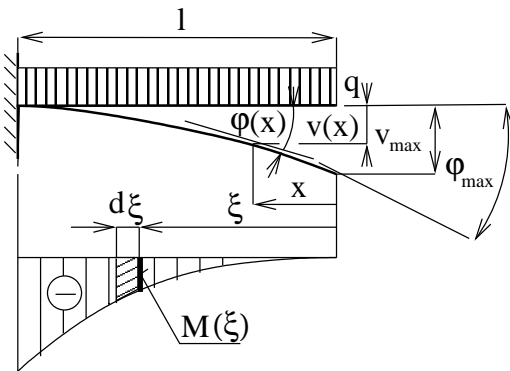
Příklad 6:

Pomocí metody momentových ploch vypočítejte úhel natočení a průhyb v obecném místě $x \in \langle 0, l \rangle$ nosníku na obrázku, je-li dáno: $l, q, E = \text{konst.}, J_z = \text{konst.}$ Dále určete hodnotu maximálního úhlu natočení a průhybu. Při řešení respektujte volbu os $x, v(x)$ souřadnicového systému a volbu osy ξ .



Obr. 1

Řešení:



Obr. 2

Ohybový moment vyšetříme v závislosti na proměnné $\xi \in \langle 0, l \rangle$, přičemž jeho znaménko bude respektovat směr na obr. 1. Ohybový moment je tedy podle úmluvy

$$M(\xi) = -\frac{q\xi^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} M(0) = 0, \\ M(l) = -\frac{ql^2}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

Ve shodě s definicí pro nosníky vetknuté (znaménka stanovíme podle obr. 2) pak můžeme vypočítat deformace v obecném místě nosníku jako

$$\varphi(x) = -\frac{1}{EJ_z} \int_x^l |M(\xi)| d\xi = -\frac{1}{EJ_z} \int_x^l \frac{q\xi^2}{2} d\xi = -\frac{ql^3}{6EJ_z} \left[1 - \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right], \quad (2)$$

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajížek, V. Adámek

$$\begin{aligned}
 v(x) &= +\frac{1}{EJ_z} \int_x^l |M(\xi)| (\xi - x) d\xi = \frac{1}{EJ_z} \int_x^l \frac{q\xi^2}{2} (\xi - x) d\xi = \frac{q}{2EJ_z} \left[\frac{\xi^4}{4} - \frac{\xi^3}{3}x \right]_x^l = \\
 &= \frac{ql^4}{8EJ_z} \left[1 - \frac{4x}{3l} + \left(\frac{x}{l}\right)^4 \right].
 \end{aligned} \tag{3}$$

Maximální úhel natočení a průhyb lze snadno vypočítat dosazením do předchozích vztahů za $x = 0$. Pokud nás ale zajímají pouze konkrétní hodnoty, lze je vypočítat přímo, tj.

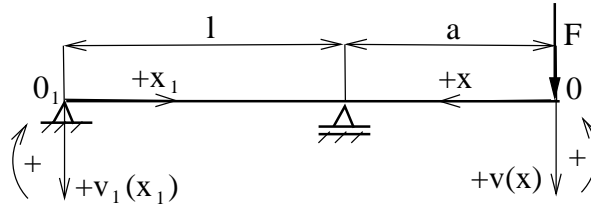
$$\varphi_{max} = -\frac{1}{EJ_z} \int_0^l |M(\xi)| d\xi = -\frac{1}{EJ_z} \int_0^l \frac{q\xi^2}{2} d\xi = -\frac{ql^3}{6EJ_z}, \tag{4}$$

$$v_{max} = +\frac{1}{EJ_z} \int_0^l |M(\xi)| \xi d\xi = \frac{1}{EJ_z} \int_0^l \frac{q\xi^2}{2} \xi d\xi = \frac{ql^4}{8EJ_z}. \tag{5}$$

V tom spočívá výhoda metody momentových ploch.

Příklad 7:

Pomocí metody momentových ploch vypočítejte úhel natočení a průhyb nosníku v místě působišťe zatěžující síly, je-li dáno: l , a , F , $E = \text{konst.}$, $J_z = \text{konst.}$ Při řešení respektujte volbu os $x_1, v_1(x_1)$ a $x, v(x)$ souřadnicových systémů na obr. 1.



Obr. 1

Řešení:

Postup řešení je zřejmý z obr. 2. Využijeme přitom metodu pro výpočet deformací nosníku mezi podporami a nosníku vetknutého. Kromě toho využijeme zákona superpozice deformací.

Snadno nahlédneme, že průběh ohybového momentu (respektujeme přitom zvolený směr kladných momentů, obr. 1) lze zobrazit ve shodě s obr. 2. Momentová plocha v intervalu $x_1 \in \langle 0, l \rangle$ deformuje nosník mezi podporami. Tím dojde k natočení převislého konce nosníku o hodnotu úhlu natočení v podpoře B , což můžeme zapsat jako

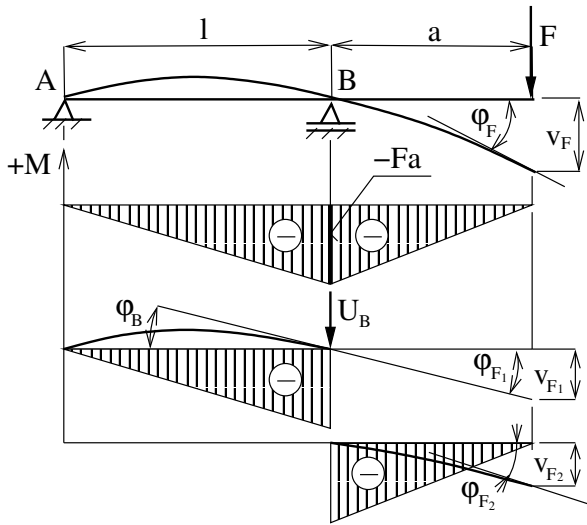
$$|\varphi_{F_1}| = |\varphi_B| = \frac{1}{EJ_z} |U_B|, \tag{1}$$

kde U_B je reakce v podpoře B na nosníku zatíženém momentovou plochou mezi podporami. Tuto reakci vypočteme z momentové podmínky k bodu A ,

$$U_B l - F a l \frac{1}{2} \frac{2}{3} l = 0 \quad \Rightarrow \quad U_B = \frac{F a l}{3}. \tag{2}$$

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek



Obr. 2

S přihlédnutím na volbu souřadnicových systémů, obr. 1, pak můžeme pro úhel φ_{F_1} , viz vztahy (1) a (2), psát

$$\varphi_{F_1} = -\varphi_B = -\frac{F a l}{3 E J_z}. \quad (3)$$

Posunutí v_{F_1} v bodě $x = 0$, které nastane vlivem tohoto natočení v bodě B od deformace nosníku mezi podporami, bude

$$v_{F_1} = +\varphi_B a = \frac{F a^2 l}{3 E J_z}. \quad (4)$$

K uvedeným deformacím nosníku na převislém konci se ještě superponuje deformace vlastního převislého konce. V bodě $x = 0$

vypočteme (v souladu s metodikou řešení vetknutých nosníků)

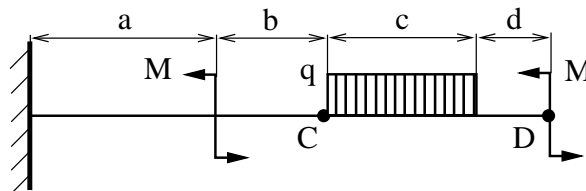
$$\varphi_{F_2} = -\frac{1}{E J_z} F a \frac{a}{2} = -\frac{F a^2}{2 E J_z} \quad \text{a} \quad v_{F_2} = +\frac{1}{E J_z} F a \frac{a^2}{2 \cdot 3} = \frac{F a^3}{3 E J_z}. \quad (5)$$

Výsledný úhel natočení a průhyb na konci převislé části nosníku potom dostaneme součtem dílčích deformací

$$\varphi_F = \varphi_{F_1} + \varphi_{F_2} = -\frac{F a}{E J_z} \left(\frac{l}{3} + \frac{a}{2} \right) \quad \text{a} \quad v_F = v_{F_1} + v_{F_2} = \frac{F a^2}{3 E J_z} (l + a). \quad (6)$$

Příklad 8:

Pomocí metody momentových ploch stanovte úhel natočení a průhyb nosníku v bodech C a D, je-li dáno: $a = 0.5 \text{ m}$, $b = 0.3 \text{ m}$, $c = 0.4 \text{ m}$, $d = 0.2 \text{ m}$, $q = 10 \text{ kNm}^{-1}$, $M = 5 \text{ kNm}$, $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $J_z = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$.



Obr. 1

Řešení:

Při řešení deformací nosníku pomocí metody momentových ploch (Mohrovy metody) je nutné znát tvar momentové plochy odpovídající vnějšímu zatížení nosníku. Vzhledem k tomu, že rozložení vnitřního momentu podél nosníku z obr. 1 již bylo vyšetřeno v rámci

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

řešených příkladů v kapitole 3.3, využijeme těchto výsledků a použijeme i stejné značení a volbu polí, souřadnic a funkcí momentů, viz obr. 2.

Funkce popisující rozložení ohybového momentu M v jednotlivých polích mají tvar:

$$\text{Pole I:} \quad x \in \langle 0, d \rangle \quad M_1(x) = M, \quad (1)$$

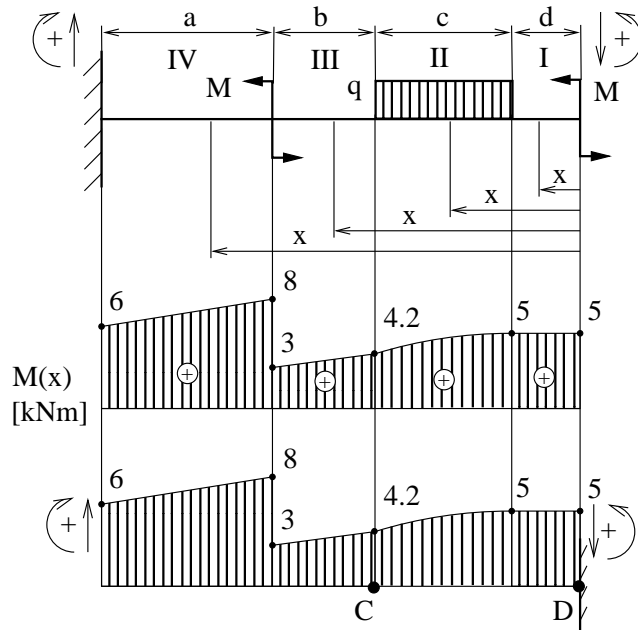
$$\text{Pole II:} \quad x \in \langle d, c+d \rangle \quad M_2(x) = M - \frac{q}{2}(x-d)^2, \quad (2)$$

$$\text{Pole III:} \quad x \in \langle c+d, b+c+d \rangle \quad M_3(x) = M + \frac{qc^2}{2} + qc(d-x), \quad (3)$$

$$\text{Pole IV:} \quad x \in \langle b+c+d, a+b+c+d \rangle \quad M_4(x) = 2M + \frac{qc^2}{2} + qc(d-x). \quad (4)$$

Průběhy těchto funkcí momentu jsou znázorněny na obr. 2. Princip metody momentových ploch spočívá v analogii diferenciální rovnice průhybové čáry se Schwedlerovou větou. Pokud zatížíme tzv. fiktivní (náhradní) nosník spojitým fiktivním zatížením, jehož rozložení odpovídá tvaru výsledné momentové plochy podél skutečného nosníku, můžeme pro úhel natočení $\varphi(x)$ a průhyb $v(x)$ v libovolném místě x nosníku podle Mohrovy metody psát

$$\varphi(x) = \frac{1}{EJ_z} T_f(x) \quad \text{a} \quad v(x) = \frac{1}{EJ_z} M_f(x), \quad (5)$$



Obr. 2

kde $T_f(x)$ a $M_f(x)$ postupně představují fiktivní posouvající sílu a fiktivní ohybový moment v místě x . Tyto veličiny určíme analogicky jako skutečné T a M na skutečném nosníku, tj. metodou řezu. V tomto případě však nebudeme sčítat příspěvky skutečných vnějších sil a momentů do vnitřní síly T a momentu M po levé či pravé straně řezu, nýbrž příslušné účinky fiktivní. Znaménková úmluva přitom zůstává stejná jako v případě skutečného nosníku.

Typ uložení fiktivního nosníku závisí na okrajových podmínkách úlohy při řešení pomocí diferenciální rovnice průhybové čáry. V případě nosníku vetknutého se jedná opět o nosník vetknutý, avšak na opačné straně, tj. v našem případě vetknutý vpravo. Fiktivní nosník

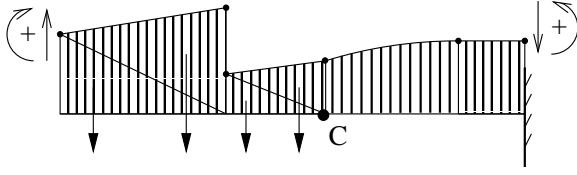
zatížený fiktivním zatížením odpovídající této úloze je spolu s příslušnou znaménkovou úmluvou a body C a D znázorněn na obr. 2.

V následujícím kroku vyšetříme deformace v bodě C . Podle Mohrovy metody, viz (5), platí:

$$\varphi(c+d) = \frac{1}{EJ_z} T_f(c+d) \quad \text{a} \quad v(c+d) = \frac{1}{EJ_z} M_f(c+d), \quad (6)$$

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek



Obr. 3

což lze formálně přepsat do zkrácené podoby

$$\varphi_C = \frac{1}{EJ_z} T_f^C \quad \text{a} \quad v_C = \frac{1}{EJ_z} M_f^C. \quad (7)$$

Fiktivní posouvající sílu T_f^C v bodě C určíme jako sumu všech fiktivních posouvajících sil vlevo od řezu v bodě C s využitím

levé části znaménkové konvence. Podle obr. 3 platí:

$$T_f^C = -\frac{M_4(a+b+c+d)a}{2} - \frac{M_4(b+c+d)a}{2} - \frac{M_3(b+c+d)b}{2} - \frac{M_3(c+d)b}{2}, \quad (8)$$

kde první dva, resp. druhé dva, sčítance představují obsah lichoběžníka, který reprezentuje momentovou plochu v poli IV, resp. v poli III³. Po dosazení příslušných hodnot momentů uvedených na obr. 2 a příslušných rozměrů nosníku dostáváme

$$T_f^C = -\frac{1}{2} [(6000 + 8000) 0.5 + (3000 + 4200) 0.3] = -4580 \text{ Nm}^2. \quad (9)$$

Fiktivní ohybový moment M_f^C v bodě C vyjádříme jako součet momentů všech fiktivních momentových ploch ležících vlevo od řezu v bodě C při respektování levé části znaménkové konvence. Lze psát

$$M_f^C = -\frac{M_4(a+b+c+d)a}{2} \left(\frac{2}{3}a + b \right) - \frac{M_4(b+c+d)a}{2} \left(\frac{1}{3}a + b \right) - \\ - \frac{M_3(b+c+d)b}{2} \left(\frac{2}{3}b \right) - \frac{M_3(c+d)b}{2} \left(\frac{1}{3}b \right), \quad (10)$$

kde první dva, resp. druhé dva, sčítance představují moment fiktivní momentové plochy v poli IV, resp. poli III, k řezu v bodě C ⁴. Po dosazení dostáváme

$$M_f^C = -\frac{1}{2} \left[6000 \cdot 0.5 \left(\frac{2}{3} \cdot 0.5 + 0.3 \right) + 8000 \cdot 0.5 \left(\frac{1}{3} \cdot 0.5 + 0.3 \right) + \right. \\ \left. + 3000 \cdot 0.3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.3 + 4200 \cdot 0.3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.3 \right] = -2036.3 \text{ Nm}^3. \quad (11)$$

Velikost fiktivních účinků T_f^C a M_f^C by bylo samozřejmě možné určit také jako součet příslušných fiktivních účinků působících vpravo od bodu C , avšak v tom případě bychom museli navíc stanovit fiktivní reakce ve vetknutí fiktivního nosníku.

³Velikost posouvající síly, která odpovídá spojitému fiktivnímu zatížení ve tvaru momentové plochy, je rovna obsahu této momentové plochy; obsah lichoběžníka byl přitom určen jako součet obsahů dvou trojúhelníků, na které lze tento lichoběžník rozdělit.

⁴Moment momentové plochy reprezentující fiktivní spojitě zatížení k danému bodu C určíme jako moment fiktivní síly, která působí v těžišti momentové plochy a její velikost je rovna obsahu této plochy, k bodu C ; moment lichoběžníkové momentové plochy k bodu C byl přitom vyjádřen jako součet momentů dvou příslušných trojúhelníkových momentových ploch.

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

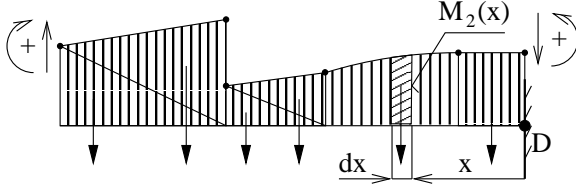
Nyní již můžeme vyčíslit hodnotu úhlu natočení a průhybu v bodě C daném vztahy (7), resp. (6). S pomocí (9) a (11) a hodnot ze zadání tak dostáváme

$$\varphi_C = -\frac{4580}{2.1 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \doteq -4.36 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \doteq -0.25^\circ, \quad (12)$$

$$v_C = -\frac{2036.3}{2.1 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \doteq -1.94 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -1.94 \text{ mm}. \quad (13)$$

V dalším kroku řešení vyšetříme deformace v bodě D , tj. určíme φ_D a v_D . Analogicky se vztahy (7) lze pro tyto deformace psát

$$\varphi_D = \frac{1}{EJ_z} T_f^D \quad \text{a} \quad v_D = \frac{1}{EJ_z} M_f^D. \quad (14)$$



Obr. 4

Fiktivní posouvající sílu T_f^D a fiktivní moment M_f^D v bodě D určíme analogicky jako v případě bodu C , tj. jako součet všech příslušných fiktivních účinků působících vlevo od bodu D s využitím levé částkové znaménkové konvence, viz obr. 4. Do posouvající síly T_f^D a ohybového momentu M_f^D musíme nyní ale

zahrnout také vliv momentových ploch v poli I a II. Příspěvek momentové plochy v poli I do T_f^D a M_f^D určíme snadno, uvědomíme-li si, že účinek tohoto fiktivního spojitého zatížení lze ekvivalentně nahradit silou působící v těžišti momentové plochy (obr. 4), jejíž velikost je rovna obsahu této plochy, tj. obsahu obdelníka. Pro vyjádření příspěvku momentové plochy v poli II do T_f^D a M_f^D využijeme v podstatě stejnou úvahu. Stačí si totiž pouze uvědomit, že momentovou plochu v poli II lze rozdělit na konečný počet dílčích obdelníků šířky dx a výšky $M_2(x)$, jejichž účinek lze opět nahradit silou působící v těžišti tohoto elementu, jehož velikost je rovna obsahu elementu, tj. $M_2(x)dx$. Výsledný příspěvek momentové plochy v poli II do T_f^D a M_f^D lze tak vyjádřit jako součet všech těchto elementárních účinků (fiktivních sil či fiktivních momentů), tj. jako integrál přes interval $x \in \langle d, c+d \rangle$.

Podle výše uvedeného lze tedy pro T_f^D psát

$$T_f^D = -\frac{M_4(a+b+c+d)a}{2} - \frac{M_4(b+c+d)a}{2} - \frac{M_3(b+c+d)b}{2} - \frac{M_3(c+d)b}{2} - \int_d^{c+d} M_2(x)dx - M_1(x)d, \quad (15)$$

což po vyjádření příslušného integrálu a úpravě lze přepsat do tvaru

$$T_f^D = -\frac{1}{2} \left[\left(M_4(a+b+c+d)a + M_4(b+c+d)a \right) + \left(M_3(b+c+d)b + M_3(c+d)b \right) \right] - \left(Mc - \frac{qc^3}{6} \right) - Md. \quad (16)$$

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

Po dosazení a vyčíslení dostáváme

$$T_f^D = -\frac{1}{2} [(6000 + 8000) 0.5 + (3000 + 4200) 0.3] - \left(5000 \cdot 0.4 - \frac{10^4 \cdot 0.4^3}{6} \right) - 5000 \cdot 0.2 = -7473.3 \text{ Nm}^2. \quad (17)$$

Fiktivní moment M_f^D určíme s pomocí obr. 3 a při zavedení $l = a + b + c + d$ jako

$$M_f^D = -\frac{M_4(l)a}{2} \left(l - \frac{1}{3}a \right) - \frac{M_4(l-a)a}{2} \left(l - \frac{2}{3}a \right) - \frac{M_3(l-a)b}{2} \left(\frac{2}{3}b + c + d \right) - \frac{M_3(c+d)b}{2} \left(\frac{1}{3}b + c + d \right) - \int_d^{c+d} M_2(x)xdx - M_1(x)d\frac{d}{2}, \quad (18)$$

což po vyjádření příslušného integrálu⁵ a po úpravě (zde bez použití l) vede na tvar

$$M_f^D = -\frac{1}{2} \left\{ \left[M_4(a+b+c+d) \left(\frac{2}{3}a + b + c + d \right) + M_4(b+c+d) \left(\frac{1}{3}a + b + c + d \right) \right] a + \left[M_3(b+c+d) \left(\frac{2}{3}b + c + d \right) + M_3(c+d) \left(\frac{1}{3}b + c + d \right) \right] b \right\} - \left[Mc \left(\frac{c}{2} + d \right) - \frac{qc^3}{2} \left(\frac{c}{4} + \frac{d}{3} \right) \right] - \frac{Md^2}{2}. \quad (19)$$

Po dosazení a vyčíslení dostáváme

$$M_f^D = -\frac{1}{2} \left\{ \left[6000 \left(\frac{2}{3} \cdot 0.5 + 0.3 + 0.4 + 0.2 \right) + 8000 \left(\frac{1}{3} \cdot 0.5 + 0.3 + 0.4 + 0.2 \right) \right] 0.5 + \left[3000 \left(\frac{2}{3} \cdot 0.3 + 0.4 + 0.2 \right) + 4200 \left(\frac{1}{3} \cdot 0.3 + 0.4 + 0.2 \right) \right] 0.3 \right\} - \left[5000 \cdot 0.4 \cdot \left(\frac{0.4}{2} + 0.2 \right) - \frac{10^4 \cdot 0.4^3}{2} \left(\frac{0.4}{4} + \frac{0.2}{3} \right) \right] - \frac{5000 \cdot 0.2^2}{2} = -5631 \text{ Nm}^3. \quad (20)$$

Pro hledané deformace φ_D a v_D lze podle (14) psát

$$\varphi_D = -\frac{7473.3}{2.1 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \doteq -7.12 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \doteq -0.41^\circ, \quad (21)$$

$$v_D = -\frac{5631}{2.1 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \doteq -5.36 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -5.36 \text{ mm}. \quad (22)$$

⁵Při integraci (16) a (19) byla použita substituce $\zeta = x - d$ a tudíž $d\zeta = dx$. Potom dostáváme pro

$$\int_d^{c+d} M_2(x)dx = \int_d^{c+d} \left[M - \frac{q(x-d)^2}{2} \right] dx = \int_0^c \left(M - \frac{q\zeta^2}{2} \right) d\zeta = Mc - \frac{qc^3}{6},$$

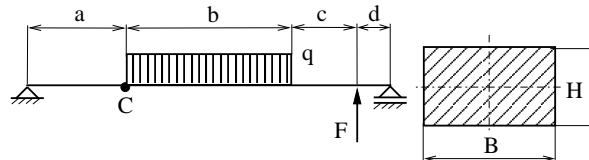
$$\int_d^{c+d} M_2(x)xdx = \int_d^{c+d} \left[M - \frac{q(x-d)^2}{2} \right] xdx = \int_0^c \left(M - \frac{q\zeta^2}{2} \right) (\zeta + d) d\zeta = Mc \left(\frac{c}{2} + d \right) - \frac{qc^3}{2} \left(\frac{c}{4} + \frac{d}{3} \right).$$

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

Příklad 9:

Pomocí metody momentových ploch stanovte úhel natočení a průhyb nosníku v bodě C , je-li dáno: $a = 0.3$ m, $b = 0.5$ m, $c = 0.2$ m, $d = 0.1$ m, $B = 60$ mm, $H = 40$ mm, $F = 10$ kN, $q = 20$ kNm⁻¹, $E = 2.1 \cdot 10^5$ MPa.



Obr. 1

Řešení:

Tvar momentové plochy odpovídající vnějšímu zatížení a uložení nosníku na obr. 1 byl již vyšetřen v rámci příkladu v kapitole 3.3. Výsledné rozložení vnitřního momentu M podél nosníku spolu s použitým označením polí, volbou souřadnic a reakcemi je znázorněn na obr. 2. Tuto výslednou momentovou plochu použijeme jako základ při vyšetřování deformací nosníku metodou momentových ploch (Mohrovou metodou).

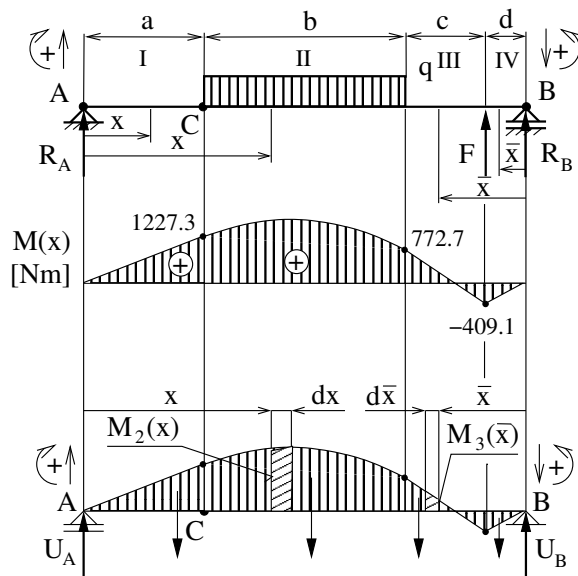
V jednotlivých polích jsou funkce popisující rozložení momentu M dány předpisy:

Pole I: $x \in \langle 0, a \rangle$ $M_1(x) = R_A x$, (1)

Pole II: $x \in \langle a, a + b \rangle$ $M_2(x) = R_A x - \frac{q}{2} (x - a)^2$, (2)

Pole III: $\bar{x} \in \langle d, c + d \rangle$ $M_3(\bar{x}) = R_B \bar{x} + F (\bar{x} - d)$, (3)

Pole IV: $\bar{x} \in \langle 0, d \rangle$ $M_4(\bar{x}) = R_B \bar{x}$, (4)



Obr. 2

kde reakce $R_A = 4090.9$ N a $R_B = -R_A$. Tyto momentové plochy nyní prohlásíme za nové fiktivní zatížení nového, tzv. náhradního (fiktivního), nosníku. Vzhledem k tomu, že skutečný nosník je podepřený na obou koncích, bude i nosník náhradní nosníkem na dvou podporách, viz analogie okrajových podmínek diferenciální rovnice průhybové čáry a Schwedlerovy věty. Fiktivní nosník zatížený fiktivním zatížením ve tvaru výsledné momentové plochy je znázorněn v dolní části obr. 2. Vlivem působení fiktivního zatížení vznikají v podporách nosníku fiktivní reakce. Označme je U_A a U_B a volme jejich směr např. podle obr. 2 (Směr působení reakcí u fiktivního nosníku si můžeme stejně jako u skutečného nosníku zvolit).

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

Podle Mohrovy metody můžeme úhel natočení φ_C a průhyb v_C nosníku v bodě C vyjádřit jako

$$\varphi_C = \frac{1}{EJ_z} T_f^C \quad \text{a} \quad v_C = \frac{1}{EJ_z} M_f^C, \quad (5)$$

kde J_z je kvadratický moment průřezu k neutrální ose. Veličiny T_f^C a M_f^C představují postupně fiktivní posouvající sílu a fiktivní ohybový moment v bodě C a jejich velikost lze určit pomocí metody řezu, tj. velikost fiktivní posouvající síly (fiktivního ohybového momentu) působící v řezu v místě C určíme jako součet všech vnějších fiktivních posouvajících sil (fiktivních ohybových momentů) působících po levé, nebo pravé, straně řezu s využitím příslušné znaménkové konvence (obr. 2). Z polohy bodu C a z výsledné momentové plochy je zřejmé, že T_f^C a M_f^C lze snáze určit jako součet fiktivních účinků působících vlevo od bodu C . Z ryze cvičných důvodů však určíme T_f^C a M_f^C i pomocí účinků působících vpravo od bodu C .

Pokud sčítáme fiktivní účinky působící vlevo od bodu C , můžeme pro T_f^C psát

$$T_f^C = U_A - \frac{M_1(a)a}{2}, \quad (6)$$

kde druhý ze sčítanců představuje obsah momentové plochy v poli I. Budeme-li sčítat fiktivní posouvající síly působící vpravo od bodu C , potom

$$T_f^C = -U_B + \frac{M_4(d)d}{2} + \int_d^{c+d} M_3(\bar{x})d\bar{x} + \int_a^{a+b} M_2(x)dx, \quad (7)$$

kde 2., 3. a 4. sčítanec představuje postupně obsah momentové plochy v poli II, III a IV. Druhý integrál v (7) přitom můžeme ekvivalentně nahradit součtem obsahů dvou trojúhelníků (s respektováním znamének funkce $M_3(\bar{x})$), na které lze momentovou plochu $M_3(\bar{x})$ rozdělit (viz obr. 2).

Fiktivní moment M_f^C v bodě C určíme analogicky jako součet fiktivních momentů k bodu po levé či pravé straně řezu v bodě C . Pokud sčítáme účinky působící vlevo, lze psát

$$M_f^C = U_A a - \frac{M_1(a)a}{2} \frac{a}{3}, \quad (8)$$

kde druhý sčítanec představuje moment fiktivního zatížení, které je popsáno funkcí $M_1(x)$, k bodu C (geometricky toto představuje lineární moment momentové plochy v poli I k bodu C). Při sčítání fiktivních momentů k bodu C z pravé strany bude fiktivní moment

$$\begin{aligned} M_f^C = & U_B(b+c+d) - \frac{M_4(d)d}{2} \left(\frac{1}{3}d + c + b \right) - \int_d^{c+d} M_3(\bar{x})(b+c+d-\bar{x})d\bar{x} - \\ & - \int_a^{a+b} M_2(x)(x-a)dx. \end{aligned} \quad (9)$$

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

Ve vztazích (6) a (8), resp. (7) a (9), figuruje zatím neznámá (velikostí) fiktivní reakce U_A , resp. U_B . Tyto reakce určíme z podmínek rovnováhy fiktivního nosníku. Podle momentové podmínky k bodu B platí (pro větší přehlednost definujme parametr $l = a + b + c + d$)

$$U_A l - \frac{M_1(a)a}{2} \left(l - \frac{2}{3}a \right) - \int_a^{a+b} M_2(x)(l-x)dx - \int_d^{c+d} M_3(\bar{x})\bar{x}d\bar{x} - \frac{M_4(d)d}{2} \frac{2}{3}d = 0. \quad (10)$$

Po vyjádření U_A z (10) a po vyčíslení dostáváme: $U_A \doteq 522.35 \text{ Nm}^2$. Analogicky určíme velikost U_B z momentové podmínky k bodu A , kde

$$U_B l - \frac{M_4(d)d}{2} \left(l - \frac{2}{3}d \right) - \int_d^{c+d} M_3(\bar{x})(l-\bar{x})d\bar{x} - \int_a^{a+b} M_2(x)xdx - \frac{M_1(a)a}{2} \frac{2}{3}a = 0. \quad (11)$$

Z této rovnice potom vyplyne $U_B \doteq 385.98 \text{ Nm}^2$. Poznamenejme ještě, že kontrolu správnosti vyčíslení U_A a U_B můžeme provést pomocí silové podmínky rovnováhy fiktivních účinků ve svislém směru, která má tvar

$$U_A - \frac{M_1(a)a}{2} - \int_a^{a+b} M_2(x)dx - \int_d^{c+d} M_3(\bar{x})d\bar{x} - \frac{M_4(d)d}{2} + U_B = 0. \quad (12)$$

Nyní již máme určené fiktivní reakce U_A a U_B a lze tedy dopočítat velikost fiktivní síly T_f^C , resp. fiktivního momentu M_f^C , ze vztahu (6) nebo (7), resp. ze vztahu (8) nebo (9). Vyčíslením dostáváme

$$T_f^C \doteq 338.26 \text{ Nm}^2 \quad \text{a} \quad M_f^C \doteq 138.30 \text{ Nm}^3. \quad (13)$$

Posledním krokem před určením deformací φ_C a v_C podle vztahů (5) je výpočet J_z pro zadaný průřez. Platí

$$J_z = \frac{BH^3}{12} = 3.2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4. \quad (14)$$

Po dosazení hodnot ze (13) a (14) a hodnoty E ze zadání do vztahů (5) dostáváme

$$\varphi_C = \frac{338.26}{2.1 \cdot 10^{11} \cdot 3.2 \cdot 10^{-7}} \doteq 5 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \doteq 0.29^\circ, \quad (15)$$

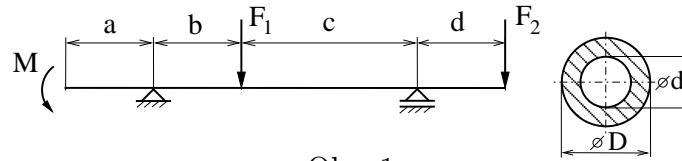
$$v_C = \frac{138.30}{2.1 \cdot 10^{11} \cdot 3.2 \cdot 10^{-7}} \doteq 2.1 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2.1 \text{ mm}. \quad (16)$$

Příklad 10:

Pro nosník s převislými konci, obr. 1, kde $F = 15 \text{ kN}$, $a = 0.2 \text{ m}$, $Re = 300 \text{ MPa}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $k = 1.5$, $b = a$, $c = 2a$, $d = a$, $M = \frac{1}{2}Fa$, $F_1 = 2F$, $F_2 = F$ a $\frac{d}{D} = \frac{4}{5}$, stanovte pomocí metody momentových ploch úhel natočení a průhyb v bodech C až H , viz obr. 2, přičemž $\overline{EB} = \frac{c}{2}$ a $\overline{BH} = \frac{d}{3}$.

OHYB (Deformace)

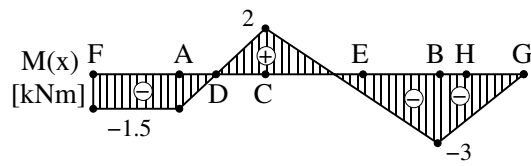
Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek



Obr. 1

Řešení:

Nosník na obr. 1 byl již řešen v kapitole 3.3, kde bylo mimo jiné provedeno dimenzování ($J_z = 486\,224\text{mm}^4$) a vyšetřen průběh vnitřního ohybové momentu podél nosníku, jehož charakter je patrný z obr. 2. Z obrázku je zřejmé, že funkci momentu lze jednoduše popsat pomocí jeho velikosti v bodech



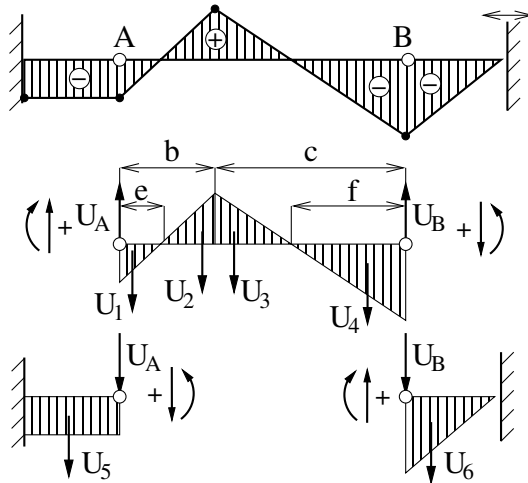
Obr. 2

$$\begin{aligned} \mathbf{A}: M_A &= -1.5 \text{ kNm}, & \mathbf{B}: M_B &= -3 \text{ kNm}, \\ \mathbf{C}: M_C &= 2 \text{ kNm}, & \mathbf{F}: M_F &= -1.5 \text{ kNm}, \\ \mathbf{G}: M_G &= 0, & & \end{aligned} \quad (1)$$

příčměž mezi těmito body je funkce momentu vždy lineární.

Jestliže pro výpočet deformací nosníku v konkrétním bodě i (v našem případě budeme za i dosazovat postupně C až H) využijeme Mohrovy metody s aplikací na tzv. fiktivním nosníku, můžeme úhel natočení φ_i a průhyb v_i vyjádřit jako

$$\varphi_i = \frac{1}{EJ_z} T_f^i \quad \text{a} \quad v_i = \frac{1}{EJ_z} M_f^i, \quad (2)$$



Obr. 3

Fiktivní nosník(y)⁶, který je nutné použít v případě skutečného nosníku se dvěma převislými konci, je vidět na obr. 3. S ohledem na učiněnou poznámku je dále nutné při výpočtu uplatnit metodu uvolňování, obr. 3, čímž v podstatě dostáváme 3 nosníky (2 vetknuté a

⁶Ve skutečnosti se jedná o 3 tělesa spojená v bodech A a B prostřednictvím kloubů.

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

1 na dvou podporách). Na základě zákona akce a reakce je nyní důležité do míst původně spojených klouby připojit fiktivní reakce označené např. U_A a U_B . Na jednom z těles může být jejich směr volen vždy libovolně, na druhém tělese však musí být směr vždy opačný. K volbě U_A a U_B (mají svislé nositelky) ještě poznamenejme, že s ohledem na směr fiktivního zatížení a s ohledem na uložení jsou všechny osové fiktivní účinky a priori nulové.

Při výpočtech pohlížíme na průběh ohybového momentu (mometovou plochu) na skutečném nosníku jako na spojitě fiktivní zatížení nosníku náhradního. S ohledem na přehlednost dalších výpočtů bude účelné nahradit toto spojitě zatížení osamělými fiktivními silami (označme je např. U_1 až U_6), jejichž velikost je z geometrického hlediska rovna dílčím plochám reprezentovaným momentovou plochou. Nositelky těchto výslednic navíc umístíme tak, aby procházely jednotlivými těžišti dílčích ploch. Zaručíme tak ekvivalenci celkového zatížení. Přitom orientujeme U_1 až U_6 vždy shora dolů, bez ohledu na to, zda je momentová plocha nad či pod střednicí skutečného nosníku. Výše popsaná náhrada spojitěho zatížení osamělými fiktivními silami je vidět na obr. 3. Z obrázku je také zřejmé, že pro stanovení U_1 až U_4 je nutné ještě znát velikost úseků e a f . Tyto délky určíme snadno např. z geometrické podobnosti trojúhelníků, které nalezneme na obr. 3. Zjevně platí

$$\frac{|M_A|}{e} = \frac{M_C}{b-e} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{|M_A|}{|M_A| + M_C} b = \frac{1.5}{1.5 + 2} 0.2 \doteq 0.086 \text{ m}, \quad (3)$$

$$\frac{|M_B|}{f} = \frac{M_C}{c-f} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{|M_B|}{|M_B| + M_C} c = \frac{3}{3 + 2} 0.4 = 0.24 \text{ m}. \quad (4)$$

I pomocí těchto délek potom můžeme stanovit fiktivní síly

$$U_1 = \frac{M_A e}{2} = \frac{-1.5 \cdot 10^3 \cdot 0.086}{2} = -64.5 \text{ Nm}^2, \quad (5)$$

$$U_2 = \frac{M_C (b-e)}{2} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot (0.2 - 0.086)}{2} = 114 \text{ Nm}^2, \quad (6)$$

$$U_3 = \frac{M_C (c-f)}{2} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot (0.4 - 0.24)}{2} = 160 \text{ Nm}^2, \quad (7)$$

$$U_4 = \frac{M_B f}{2} = \frac{-3 \cdot 10^3 \cdot 0.24}{2} = -360 \text{ Nm}^2, \quad (8)$$

$$U_5 = M_A a = -1.5 \cdot 10^3 \cdot 0.2 = -300 \text{ Nm}^2, \quad (9)$$

$$U_6 = \frac{M_B d}{2} = \frac{-3 \cdot 10^3 \cdot 0.2}{2} = -300 \text{ Nm}^2. \quad (10)$$

Než budeme moci provést výpočet T_f^i a M_f^i v určených bodech C až H , musíme ještě určit velikosti obou fiktivních reakcí U_A a U_B . Ty lze stanovit z podmínek rovnováhy pouze na tělese, které je ohraničeno body A a B . Pro výpočet můžeme použít např. momentovou podmínku rovnováhy k levému koncovému bodu A

$$U_B (b+c) - U_4 \left(b+c - \frac{f}{3} \right) - U_3 \left(b + \frac{c-f}{3} \right) - U_2 \left(b - \frac{b-e}{3} \right) - U_1 \frac{e}{3} = 0 \quad (11)$$

OHYB (Deformace)

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

a podmínku rovnováhy fiktivních sil ve svislém směru

$$U_A - U_1 - U_2 - U_3 - U_4 + U_B = 0. \quad (12)$$

Dosazením z (3) až (10), včetně znamének, do (11) dostaneme po vyjádření a vyčíslení

$$U_B \doteq -227.6 \text{ Nm}^2. \quad (13)$$

Poté dosazením z (5) až (10) a (13), včetně znamének, do (12) dostaneme po vyjádření a vyčíslení

$$U_A = 77.1 \text{ Nm}^2. \quad (14)$$

Nyní již nic nebrání tomu, abychom postupně stanovili velikosti vnitřních fiktivních sil a momentů v předem vybraných bodech. Budeme přitom respektovat již zmiňovanou znaménkovou konvenci zleva, popř. zprava, a to podle toho, ze které strany bude výpočet formálně jednodušší. Pro fiktivní posouvající sílu v jednotlivých bodech bude potom platit

$$T_f^C = U_A - U_1 - U_2 = 77.1 - (-64.5) - 114 = 27.6 \text{ Nm}^2, \quad (15)$$

$$T_f^D = U_A - U_1 = 77.1 - (-64.5) = 141.6 \text{ Nm}^2, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} T_f^E &= -U_B + \frac{1}{2}M_B \frac{c}{2} + \frac{1}{2}M_B \frac{f - \frac{c}{2}}{f} \frac{c}{2} = -U_B + \frac{M_B c}{4f} \left(2f - \frac{c}{2}\right) = \\ &= -(-227.6) + \frac{-3 \cdot 10^3 \cdot 0.4}{4 \cdot 0.24} \left(2 \cdot 0.24 - \frac{0.4}{2}\right) = -122.4 \text{ Nm}^2, \end{aligned} \quad (17)$$

$$T_f^F = U_A + U_5 = 77.1 + (-300) = -222.9 \text{ Nm}^2, \quad (18)$$

$$T_f^G = -U_B - U_6 = -(-227.6) - (-300) = 527.6 \text{ Nm}^2, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} T_f^H &= -U_B - \frac{1}{2}M_B \frac{d}{3} - \frac{1}{2}M_B \frac{\frac{2}{3}d}{d} \frac{d}{3} = -U_B - \frac{5}{18}M_B d = \\ &= -(-227.6) - \frac{5}{18}(-3 \cdot 10^3) 0.2 \doteq 394.3 \text{ Nm}^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Analogicky můžeme psát pro fiktivní ohybový moment ve sledovaných bodech

$$\begin{aligned} M_f^C &= U_A b - U_1 \left(b - \frac{e}{3}\right) - U_2 \frac{b - e}{3} = 77.1 \cdot 0.2 - (-64.5) \left(0.2 - \frac{0.086}{3}\right) - \\ &- 114 \frac{0.2 - 0.086}{3} \doteq 22.14 \text{ Nm}^3, \end{aligned} \quad (21)$$

$$M_f^D = U_A e - \frac{2}{3}U_1 e = \left(U_A - \frac{2}{3}U_1\right) e = \left(77.1 - \frac{2}{3}(-64.5)\right) 0.086 \doteq 10.33 \text{ Nm}^3, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} M_f^E &= U_B \frac{c}{2} - \frac{1}{2}M_B \frac{c}{2} \frac{c}{2} - \frac{1}{2}M_B \frac{f - \frac{c}{2}}{f} \frac{c}{2} \frac{1}{3} \frac{c}{2} = \left[U_B - \frac{M_B c}{12f} \left(3f - \frac{c}{2}\right)\right] \frac{c}{2} = \\ &= \left[-227.6 - \frac{-3 \cdot 10^3 \cdot 0.4}{12 \cdot 0.24} \left(3 \cdot 0.24 - \frac{0.4}{2}\right)\right] \frac{0.4}{2} \doteq -2.19 \text{ Nm}^3, \end{aligned} \quad (23)$$

OHYB (Deformace)

Autoři: *F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek*

$$M_f^F = -U_A a - U_5 \frac{a}{2} = - \left(U_A + \frac{U_5}{2} \right) a = - \left(77.1 + \frac{-300}{2} \right) 0.2 = 14.58 \text{ Nm}^3, \quad (24)$$

$$M_f^G = -U_B d - U_6 \frac{2}{3} d = - \left(U_B + \frac{2}{3} U_6 \right) d = - \left(-227.6 - \frac{2}{3} 300 \right) 0.2 = 85.52 \text{ Nm}^3, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} M_f^H &= -U_B \frac{d}{3} - \frac{1}{2} M_B \frac{d}{3} \frac{2}{3} \frac{d}{3} - \frac{1}{2} M_B \frac{\frac{2}{3} d}{d} \frac{d}{3} \frac{1}{3} \frac{d}{3} = - \left(U_B + \frac{4}{27} M_B d \right) \frac{d}{3} = \\ &= - \left(-227.6 - \frac{4}{27} 3 \cdot 10^3 \cdot 0.2 \right) \frac{0.2}{3} \doteq 21.10 \text{ Nm}^3. \end{aligned} \quad (26)$$

Hledané deformace snadno dopočítáme cyklickým dosazováním za $i = C$ až H ve vztahu (2), jestliže jsou známi velikosti E a J_z a velikosti fiktivních sil a fiktivních momentů, vztahy (15) až (26). Vyčíslením tedy postupně dostáváme

$$\varphi_C \doteq 0.28 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \doteq 0.016^\circ, \quad v_C \doteq 0.23 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.23 \text{ mm}, \quad (27)$$

$$\varphi_D \doteq 1.46 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \doteq 0.084^\circ, \quad v_D \doteq 0.11 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.11 \text{ mm}, \quad (28)$$

$$\varphi_E \doteq -1.26 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \doteq -0.072^\circ, \quad v_E \doteq -0.02 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -0.02 \text{ mm}, \quad (29)$$

$$\varphi_F \doteq -2.29 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \doteq -0.131^\circ, \quad v_F \doteq 0.15 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.15 \text{ mm}, \quad (30)$$

$$\varphi_G \doteq 5.43 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \doteq 0.311^\circ, \quad v_G \doteq 0.88 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.88 \text{ mm}, \quad (31)$$

$$\varphi_H \doteq 4.05 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \doteq 0.232^\circ, \quad v_H \doteq 0.22 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.22 \text{ mm}. \quad (32)$$