NAPJATOST A HYPOTÉZY PEVNOSTI

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

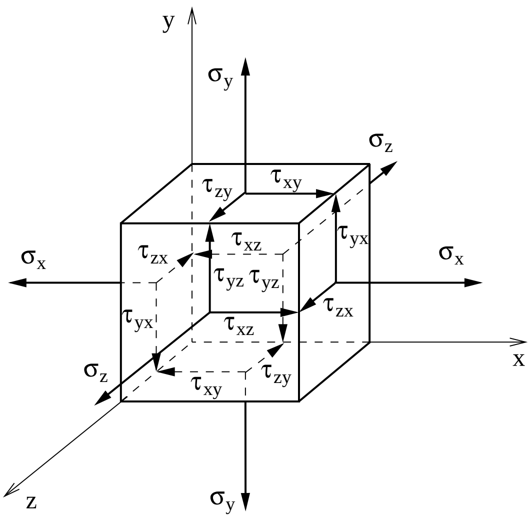
6.1 Shrnutí základních poznatků

Prostorová a rovinná napjatost

Prostorová napjatost v libovolném bodě tělesa je v pravoúhlé soustavě souřadnic xyz obecně popsána 9 složkami napětí, které lze uspořádat do matice ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} . \tag{1}$$

Prvky σ_x, σ_y a σ_z ležící na hlavní diagonále představují normálové složky napětí a prvky τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zx} a τ_{zy} ležící mimo hlavní diagonálu reprezentují smykové složky napětí. Orientace uvedených složek a roviny, v nichž působí, jsou patrné z obr. 1, na kterém je znázorněn elementární hranolek vyjmutý z tělesa.



Obr. 1: Element vyjmutý z tělesa.

Pro smykové složky napětí přitom platí tzv. zákon sdružených smykových napětí, který lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \tau_z \, , \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \tau_y \, , \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \tau_x \, . \end{aligned} \tag{2}$$

To však znamená, že z původních 9 složek napětí zbývá pouze 6 různých složek, z toho tři normálové σ_x, σ_y, σ_z a tři smykové τ_x, τ_y a τ_z.

Prostorovou napjatost lze také popsat jednodušeji pomocí tzv. hlavních napětí σ_1, σ_2 a σ_3 ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), což jsou normálová napětí působící v tzv. hlavních rovinách. Hlavní rovinou rozumíme takovou rovinu v tělese, ve které je smyková složka napětí nulová. Velikost hlavních napětí lze určit z podmínky

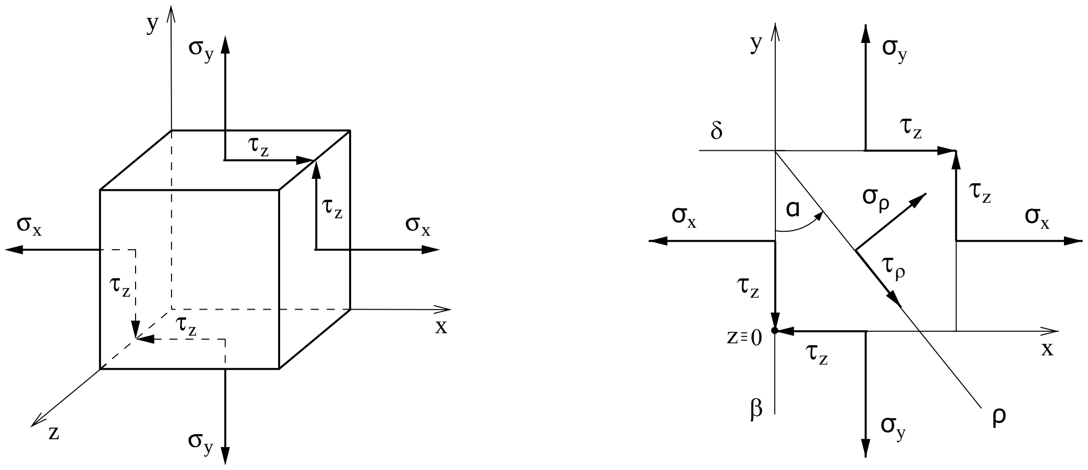
$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_i) & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & (\sigma_y - \sigma_i) & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & (\sigma_z - \sigma_i) \end{vmatrix} = 0 \, , \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

kde i představuje index příslušného hlavního napětí. Vyčíslením determinantu dostaneme kubickou rovnici pro výpočet tří hlavních napětí.

Speciálními případy prostorové napjatosti jsou tzv. jednoosá a rovinná napjatost. Danou napjatost označíme za jednoosou, je-li pouze jedna normálová složka napětí nenulová a všechny ostatní složky jsou nulové. V takovém případě hovoříme o prostém tahu či tlaku.

NAPJATOST A HYPOTÉZY PEVNOSTI

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek



(a) (b)

Obr. 2: Rovinná napjatost.

V případě rovinné napjatosti leží všechny nenulové složky napětí pouze v jedné rovině, všechny ostatní složky jsou nulové. S takovým případem napjatosti se často setkáváme při kombinovaném namáhání. Příkladem je např. napjatost v rovině xy znázorněná na obr. 2(a) popsaná složkami napětí σ_x, σ_y a τ_z.

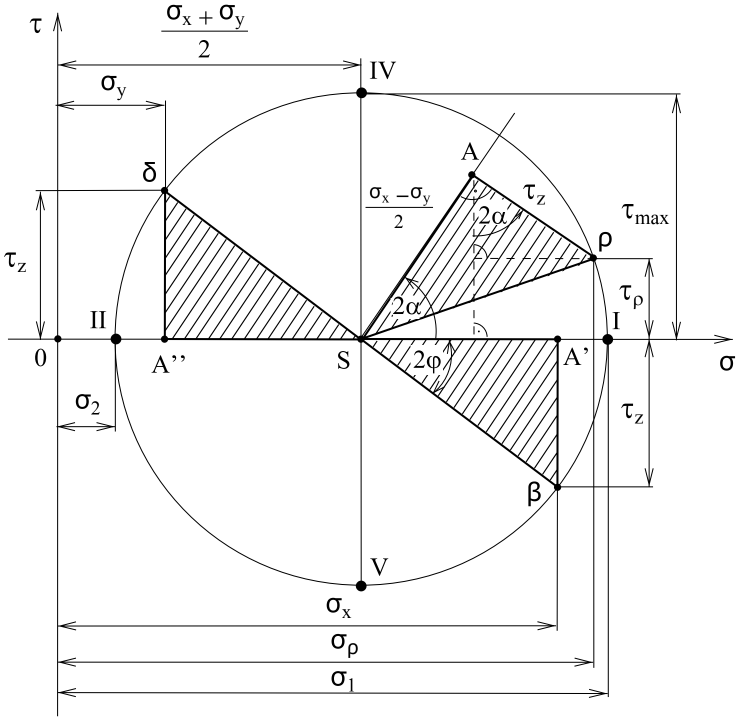
Předpokládejme, že známe složky napětí σ_x, σ_y a τ_z popisující rovinnou napjatost v rovině xy. Potom velikost složek napětí σ_ρ a τ_ρ působících v rovině ρ, která je vůči rovině yz pootočena o úhel α (viz obr. 2(b)), určíme pomocí vztahů

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_z \sin 2\alpha\,,\\ \tau_\rho &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha - \tau_z \cos 2\alpha\,,\end{aligned} \tag{4}$$

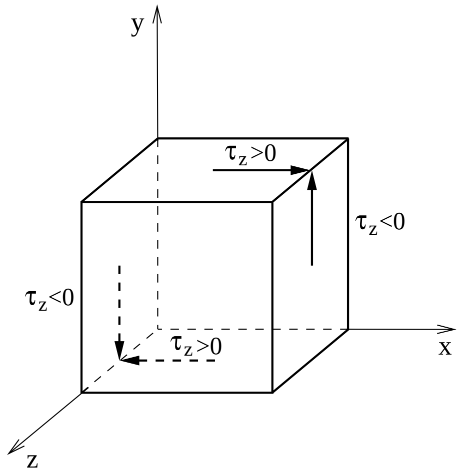
přičemž úhel α považujeme za kladný, směřuje-li proti směru otáčení hodinových ručiček.

Rovnice (4) představují parametrické vyjádření kružnice s parametrem α a se středem na ose σ v Mohrově rovině napětí $\sigma\tau$. Tato kružnice se nazývá Mohrova a pro případ $\sigma_x > \sigma_y > 0$ je znázorněna na obr. 3. Geometrická interpretace vztahů (4) je znázorněna do tohoto obrázku pomocí trojúhelníka $SA\rho$. Z uvedeného obrázku vyplývá, že každý bod kružnice představuje obraz jedné roviny (v tomto případě roviny ρ) patřící do svazku rovin, který je určen průsečnicí rovin, v nichž působí složky napětí σ_x, σ_y a τ_z, v tomto případě osou z. Dále je z obr. 3 zřejmé, že se úhly do Mohrovy kružnice (diagramu) vynášejí s dvojnásobnou velikostí a se stejnou orientací v porovnání se skutečností (viz obr. 2(b) a obr. 3).

Podle výše uvedeného lze snadno provést vlastní konstrukci Mohrovy kružnice (diagramu) na základě znalosti složek napětí σ_x, σ_y a τ_z. Do Mohrovy roviny potom vyneseme body představující obrazy dvou navzájem kolmých rovin β a δ (viz obr. 2(b)), jejichž poloha je dána velikostmi normálových a smykových složek napětí působících v těchto rovinách (viz vyšrafované trojúhelníky $SA'\beta$ a $SA''\delta$ v obr. 3). Znaménka smykových napětí přitom



Obr. 3: Konstrukce Mohrovy kružnice.



Obr. 4: Znaménka smykových složek napětí při vynášení do Mohrovy roviny.

vynášíme podle úmluvy znázorněné na obr. 4. Tato úmluva plyne ze druhého vztahu (4) a z obr. 2(b) pro úhel $\alpha = 0$. Dodržíme-li pravidlo pro znaménko smykových napětí, bude smysl otáčení roviny ρ v elementu na obr. 2(b) shodný se smyslem pohybu jejího obrazu (bodu) na Mohrově kružnici na obr. 3.

Body I a II v obr. 3 představují obrazy hlavních rovin. Z obrázku je zřejmé, že v těchto rovinách působí extrémní (maximální a minimální) napětí - hlavní napětí $\sigma_1 > \sigma_2$. Pokud $|OS|$ označíme vzdálenost středu Mohrovy kružnice od počátku souřadnicového systému $\sigma\tau$ a R poloměr Mohrovy kružnice, lze velikosti těchto napětí stanovit podle vztahu

$$\sigma_{1,2} = |OS| \pm R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2}\,. \tag{5}$$

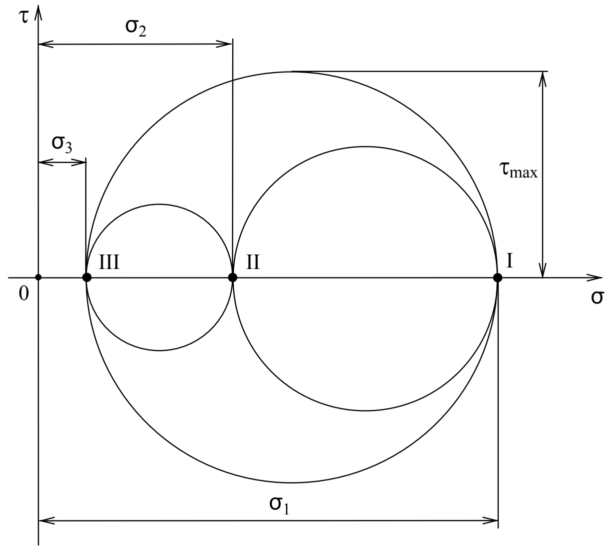
Z Mohrova diagramu můžeme dále také určit polohu hlavních rovin vzhledem k rovině β či δ. Rovina I s napětím σ_1 je například od roviny β natočena o úhel φ (v Mohrově kružnici o úhel 2φ) proti směru hodinových ručiček, jehož velikost určíme z pravoúhlého trojúhelníka $SA'\beta$ v obr. 3 jako

$$\tan 2\varphi = -\frac{\tau_z}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{2\tau_z}{\sigma_x - \sigma_y}\right)\,. \tag{6}$$

Dalšími charakteristickými body na Mohrově kružnici jsou body IV a V (viz obr. 3). Tyto body představují obrazy rovin, v nichž působí stejně velká normálová napětí σ_s a maximální smyková napětí τ_{max}, pro jejichž velikost platí

$$\sigma_s = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad \text{a} \quad \tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2}\,. \tag{7}$$

Mohrovu kružnici lze sestrojit i pro prostorovou napjatost. V takovém případě pak hovoříme o tzv. Mohrově diagramu, který se skládá ze tří Mohrových kružnic. Příklad takového Mohrova diagramu pro prostorovou napjatost popsanou hlavními napětími σ_1, σ_2 a σ_3, pro která platí $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$, je znázorněn na obr. 5. Body I, II a III pak reprezentují obrazy hlavních rovin.



Obr. 5: Mohrův diagram pro prostorovou napjatost.

Vztah mezi složkami napětí a deformace při prostorové a rovinné napjatosti

Vztah mezi složkami napětí a deformace je v teorii pružnosti popsán tzv. Hookeovým zákonem. V případě prostorové napjatosti lze tento zákon zapsat v zobecněném tvaru

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right], & \gamma_x &= \frac{1}{G}\,\tau_x\,,\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right], & \gamma_y &= \frac{1}{G}\,\tau_y\,,\\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right], & \gamma_z &= \frac{1}{G}\,\tau_z\,, \end{aligned} \tag{8}$$

kde E [MPa] představuje modul pružnosti v tahu (tzv. Youngův modul), μ [-] je Poissonovo číslo a G [MPa] je modul pružnosti ve smyku. Mezi těmito konstantami platí vztah

$$\frac{E}{G} = 2(1 + \mu)\,. \tag{9}$$

Vzhledem k tomu, že rovinná napjatost je speciálním případem napjatosti prostorové, lze podobu Hookeova zákona pro tuto napjatost snadno odvodit ze vztahů (8). Pro rovinnou napjatost v rovině xy potom platí

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right), \quad \gamma_z = \frac{1}{G}\tau_z. \tag{10}$$

Inverzí vztahů (10) pak dostáváme příslušné vztahy pro složky napětí

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x\right), \quad \tau_z = G\,\gamma_z. \tag{11}$$

Teorie pevnosti (hypotézy) - podmínky pevnosti

V případě jednoosé napjatosti či napjatosti prostého smyku má podmínka pevnosti jednoduchý tvar (blíže viz kapitola Tah (tlak) a Krut). Jedná-li se o složitější napjatost (rovinnou či prostorovou) je situace komplikovanější, protože chování materiálu ovlivní všechny složky napětí. Pro řešení uvedeného problému byla navržena různá kritéria a pro vyjádření potřebné mechanické vlastnosti materiálu se vychází z jednoosé napjatosti, na kterou se pohlíží jako na zvláštní případ napjatosti prostorové $\sigma_1 = \sigma \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Závislost mezi těmito veličinami, kdy by nastala porucha, lze obecně vyjádřit ve tvaru

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, R_{mt}, R_{md}) = 0, \tag{12}$$

kde R_{mt} je pevnost materiálu v tahu a R_{md} pevnost v tlaku.

Pro zajištění spolehlivého provozu součásti je potřeba zabezpečit, že k uvedenému meznímu stavu nedojde. Proto, jak již bylo uvedeno u prostého tahu - tlaku (jednoosá napjatost), se zavádí součinitelé bezpečnosti $k_k > 1$ vůči mezi kluzu a $k_p > 1$ vůči mezi pevnosti. Přípustná (dovolená) napětí lze potom pro tvárné materiály vyjádřit ve tvaru

$$\sigma_D = \frac{\sigma_k}{k_k}, \tag{13}$$

kde $\sigma_k = Re$ pro materiály s výraznou mezí kluzu a $\sigma_k = R_p0.2$ pro materiály se smluvní mezí kluzu. Pro křehké materiály, pro které platí $R_{mt} < R_{md}$, jsou dovolené hodnoty napětí definovány vztahy

$$\sigma_{Dt} = \frac{R_{mt}}{k_p} \quad \text{a} \quad \sigma_{Dd} = \frac{R_{md}}{k_p}. \tag{14}$$

Pevnostní podmínky se vzájemně liší podle toho, z jakého předpokladu vycházejí. Na základě toho se obecná napjatost vyjádří pomocí ekvivalentního napětí tzv. redukovaného napětí σ_{red}. Existuje řada podmínek pevnosti, které jsou definovány pro tvárný nebo křehký materiál. Zde uvedeme pouze tři nejužívanější.

NAPJATOST A HYPOTÉZY PEVNOSTI

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

Podmínky pevnosti pro tvárné materiály:

1. Teorie (hypotéza) pevnosti podle maximálního smykového napětí - tzv. *Guestova hypotéza.*
   Podle této teorie rozhoduje o pevnosti součásti velikost maximálního smykového napětí. Pevnostní podmínku lze obecně zapsat ve tvaru

$$-\sigma_D \leq \sigma_i - \sigma_j \leq \sigma_D, \quad \text{kde} \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{15}$$

   což lze přepsat do tvaru

$$\sigma_{red} \leq \sigma_D. \tag{16}$$

   Redukované napětí σ_{red} v (16) lze přitom podle této hypotézy vyjádřit jako

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{max}, \tag{17}$$

   kde σ_1 je největší a σ_3 nejmenší hlavní napětí. Zde je potřeba dát pozor u rovinné napjatosti, při které jsou obě hlavní napětí σ_1, σ_2 stejného znaménka. Protože o pevnosti rozhoduje maximální smykové napětí, je nutné rovinnou napjatost chápat jako speciální případ napjatosti prostorové, tj. třetí hlavní napětí je $\sigma_3 = 0$ a pomocí toho pak správně určit σ_{red} podle rovnice (17). V případě rovinné napjatosti dané dvěma složkami normálových napětí a jednou smykovou složkou (např. σ_x, σ_y a τ_z) bude velikost redukovaného napětí rovna

$$\sigma_{red} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2}. \tag{18}$$

2. Teorie pevnosti podle hustoty deformační energie na změnu tvaru - tzv. *hypotéza HMH* (Huber-Mises-Hencky).
   Podle této teorie rozhoduje o pevnosti součásti velikost deformační energie na změnu tvaru. Pevnostní podmínku lze opět zapsat ve tvaru

$$\sigma_{red} \leq \sigma_D, \tag{19}$$

   kde velikost redukovaného napětí σ_{red} určíme jako

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}, \tag{20}$$

   nebo

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 3\left(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2\right)}. \tag{21}$$

   V případě rovinné napjatosti dané např. složkami σ_x, σ_y a τ_z se vztah pro σ_{red} redukuje na

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_z^2}. \tag{22}$$

   Redukované napětí určené dle této hypotézy je v literatuře velmi často označováno jako tzv. Misesovo napětí (von Mises stress).

Podmínky pevnosti pro křehké materiály:

1. *Mohrova hypotéza* pevnosti. Tuto podmínku lze zapsat ve tvaru

$$\sigma_{red} \leq \sigma_{Dt}, \tag{23}$$

Hodnotu redukovaného napětí σ_{red} přitom obecně stanovíme jako

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \rho\sigma_3\,, \tag{24}$$

kde konstantu ρ určíme v případě rozdílných součinitelů bezpečnosti v tahu a v tlaku jako

$$\rho = \frac{\sigma_{Dt}}{\sigma_{Dd}}. \tag{25}$$

Pokud uvažujeme stejné součinitele bezpečnosti, přechází vztah (25) do podoby

$$\rho = \frac{R_{mt}}{R_{md}}\,. \tag{26}$$

Při posuzování rovinné napjatosti pomocí této hypotézy je nutné, stejně jako u Guestovy hypotézy, chápat danou napjatost jako prostorovou a správně tak určit maximální a minimální hlavní napětí.