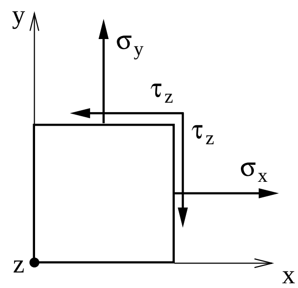
Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

6.3 Řešené příklady

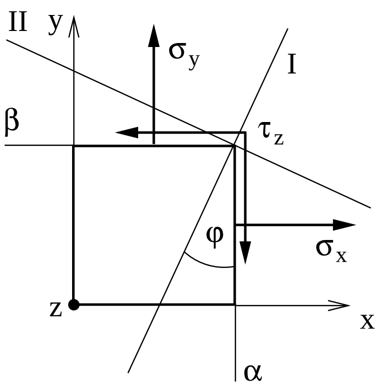
Příklad 1:

Napjatost v bodě tělesa je určena následujícími složkami napětí (viz obr. 1): $\sigma_x = 200\,\mathrm{MPa}$, $\sigma_y = 100\,\mathrm{MPa}$, $\tau_z = -50\,\mathrm{MPa}$. Sestrojte Mohrovu kružnici a graficky a početně určete velikosti hlavních napětí a maximálního smykového napětí τ_{max}. Dále stanovte polohu hlavních rovin vzhledem k zadaným rovinám.



Obr. 1

Řešení:



Obr. 2

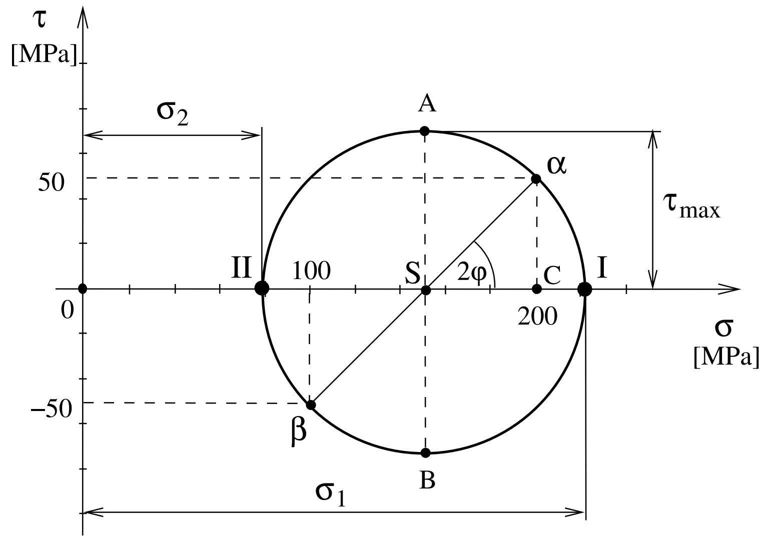
Konstrukci Mohrovy kružnice provedeme na základě znalosti velikostí smykových a normálových složek napětí ve dvou na sebe kolmých rovinách. Označme tyto dvě roviny, které jsou zároveň kolmé na rovinu xy, například α a β (viz obr. 2), tj. v rovině α působí normálové napětí σ_x a smykové napětí τ_z, zatímco v rovině β je to normálové napětí σ_y a smykové napětí τ_z. Potom, v souladu s úmluvou o znaméncích smykových a normálových složek napětí při konstrukci Mohrovy kružnice, bude obrazem roviny α, resp. β, v rovině $\sigma\tau$ bod o souřadnicích $[\sigma_x, |\tau_z|] = [200, 50]\,\mathrm{MPa}$, resp. $[\sigma_y, \tau_z] = [100, -50]\,\mathrm{MPa}$. Vzhledem k tomu, že roviny α a β svírají ve skutečnosti úhel 90°, budou jejich obrazy v Mohrově kružnici ležet na přímce. Průsečík této přímky s vodorovnou osou σ nám udává střed S hledané Mohrovy kružnice (viz obr. 3).

Sestrojená Mohrova kružnice protíná vodorovnou osu σ v bodech I a II ($\sigma_1 \geq \sigma_2$), které představují obrazy hlavních rovin (v těchto rovinách je smyková složka napětí nulová). Z obr. 3 je dále zřejmé, že obrazem roviny, v níž působí maximální τ_{max} je bod A, resp. bod B. Po odměření příslušných vzdáleností v sestrojené Mohrově kružnici lze psát: $\sigma_1 \doteq 221\,\mathrm{MPa}$, $\sigma_2 \doteq 79\,\mathrm{MPa}$ a $\tau_{max} \doteq 71\,\mathrm{MPa}$.

V dalším kroku řešení stanovíme početně hledaná napětí σ_1, σ_2 a τ_{max}. Pro jejich velikosti lze psát

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2} = \tag{1}$$

$$= \frac{200 + 100}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{200 - 100}{2}\right)^2 + (-50)^2} = \begin{cases} \sigma_1 = 220.7\,\mathrm{MPa} \\ \sigma_2 = 79.3\,\mathrm{MPa} \end{cases} \tag{2}$$



Obr. 3

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2} = \sqrt{\left(\frac{200 - 100}{2}\right)^2 + (-50)^2} = 70.7\,\mathrm{MPa}. \tag{3}$$

Polohu hlavních rovin I a II určíme snadno z Mohrovy kružnice na obr. 3. Z uvedeného obrázku je zřejmé, že průvodič obrazu hlavní roviny I je pootočen vůči průvodiči obrazu roviny α o úhel 2φ ve směru hodinových ručiček. Velikost tohoto úhlu snadno určíme z pravoúhlého trojúhelníka $S\alpha C$ jako

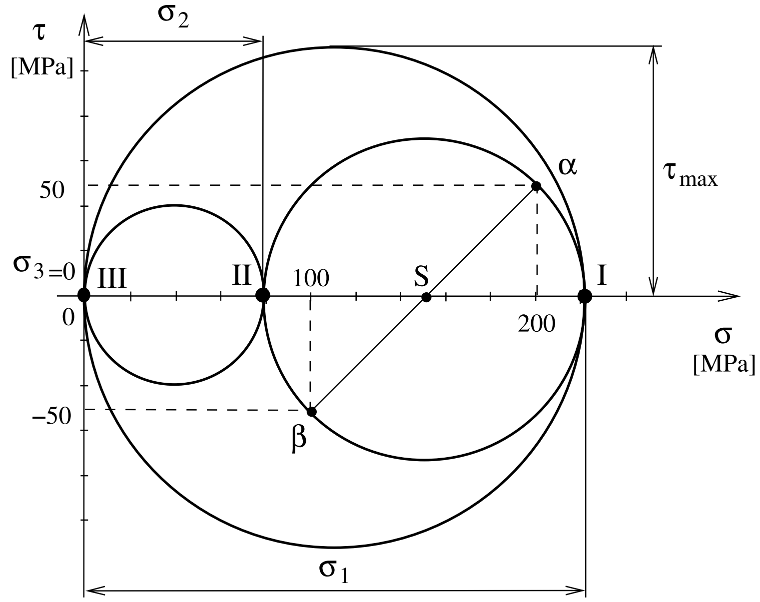
$$\tan 2\varphi = -\frac{2\tau_z}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot (-50)}{200 - 100} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\varphi = 45^\circ. \tag{4}$$

To ale znamená, že ve skutečnosti je hlavní rovina I vůči rovině α pootočena ve směru hodin o poloviční úhel, tj. $\varphi = 22.5^\circ$, jak je znázorněno na obr. 2.

Při výše uvedeném řešení jsme zadanou napjatost vyšetřovali pouze jako rovinnou. V případě ale, že bychom měli za úkol provést kontrolu bezpečnosti nějaké součásti, v níž je vnějšími účinky vyvolána takováto napjatost, nebo např. dimenzovat tuto součást apod., je nutné vždy pohlížet na rovinnou napjatost jako na zvláštní případ napjatosti prostorové a takto ji i vyšetřovat (to je nutné při použití Guestovy a Mohrovy hypotézy pevnosti).

V našem případě jsme stanovili polohu hlavních rovin I a II a zjistili jsme, že obě tyto roviny jsou kolmé na rovinu xy souřadnicového systému xyz. Vzhledem k tomu, že všechny hlavní roviny jsou navzájem kolmé, je hledaná hlavní rovina III rovnoběžná s rovinou xy. Obrazem této roviny III bude přitom bod o souřadnicích $[0, 0]$, tj. ležící v počátku souřadnicového systému $\sigma\tau$, neboť normálové napětí σ_z působící ve směru osy z je nulové a tedy $\sigma_3 = \sigma_z = 0$. Mohrův diagram je potom nutné doplnit o další dvě kružnice, viz obr. 4, a pro velikosti hlavních napětí a maximálního smykového napětí potom platí

$$\sigma_1 = 220.7\,\text{MPa}, \quad \sigma_2 = 79.3\,\text{MPa}, \quad \sigma_3 = 0\,\text{MPa} \quad \text{a} \quad \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 110.35\,\text{MPa}. \tag{5}$$

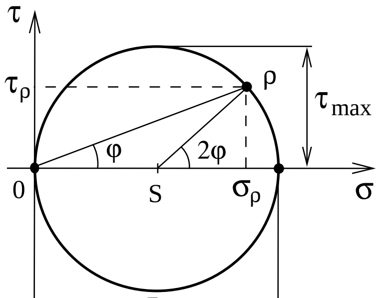


Obr. 4

Příklad 2:

Prut je namáhán osovou silou. Ta v uvažované rovině ρ vyvolá normálové napětí $\sigma_\rho =$ $= 80\,\text{MPa}$ a smykové napětí $\tau_\rho = 56\,\text{MPa}$. Vypočítejte velikost maximálního normálového napětí σ_{max} působícího v tělese.

Řešení:



Obr. 1

Ze zadání je zřejmé, že se jedná o jednoosou napjatost. Mohrova kružnice odpovídající této napjatosti prochází počátkem souřadnicového systému $\sigma\tau$ a bodem o souřadnicích $[80, 56]$ MPa, který představuje obraz roviny ρ (viz obr. 1). Podle této Mohrovy kružnice je zřejmé, že maximální normálové napětí bude rovné maximálnímu hlavnímu napětí σ_1 působícímu v rovině kolmé na osu prutu (hodnota minimálního normálového napětí je přitom rovna hlavnímu napětí $\sigma_2 = 0$). Pro stanovení velikosti σ_1 postačí určit hodnotu maximálního smykového napětí τ_{max}, tj. poloměru kružnice, neboť z obr. 1 vyplývá $\sigma_1 = 2\tau_{max}$. Využijeme-li vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem, můžeme pro velikost maximálního smykového napětí psát

$$\tau_{max} = \frac{\tau_\rho}{\sin(2\varphi)}, \quad \text{kde } \varphi = \arctan\left(\frac{\tau_\rho}{\sigma_\rho}\right) = \arctan\left(\frac{56}{80}\right) \doteq 34.99^\circ. \tag{1}$$

Po dosazení dostáváme

$$\tau_{max} = \frac{56}{\sin(2 \cdot 34.99)} = 59.6\,\text{MPa} \tag{2}$$

a potom

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = 2\tau_{max} = 119.2\,\text{MPa}. \tag{3}$$

Požadovanou hodnotu σ_{max} lze stanovit i jiným způsobem, např. využitím znalosti implicitního vyjádření kružnice. Rovnici kružnice v rovině xy můžeme obecně zapsat ve tvaru

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \tag{4}$$

kde r představuje poloměr kružnice a souřadnice x_0 a y_0 určují polohu jejího středu. Rovnice (4) přejde v našem případě do tvaru

$$(\sigma - \tau_{max})^2 + \tau^2 = \tau_{max}^2. \tag{5}$$

Rovnici (5) však musí vyhovovat i bod představující obraz roviny ρ, tj. musí platit

$$(\sigma_\rho - \tau_{max})^2 + \tau_\rho^2 = \tau_{max}^2. \tag{6}$$

Z rovnice (6) pak snadno vyjádříme

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_\rho^2 + \tau_\rho^2}{2\sigma_\rho} = \frac{80^2 + 56^2}{2 \cdot 80} = 59.6\,\text{MPa} \tag{7}$$

a potom

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = 2\tau_{max} = 119.2\,\text{MPa}. \tag{8}$$

Příklad 3:

Prostorová napjatost je dána složkami napětí $\sigma_x = 80\,\text{MPa}$, $\sigma_y = 20\,\text{MPa}$, $\sigma_z = -15\,\text{MPa}$, $\tau_z = 40\,\text{MPa}$, $\tau_x = \tau_y = 0$. Určete velikosti hlavních napětí. Dále stanovte součinitel bezpečnosti podle hypotézy Guestovy, HMH a Mohrovy, je-li dáno: $Re = 240\,\text{MPa}$, $R_{mt} = 200\,\text{MPa}$, $R_{md} = 400\,\text{MPa}$.

Řešení:
Hledaná hlavní napětí určíme řešením determinantu ve tvaru

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_z & 0 \\ \tau_z & (\sigma_y - \sigma) & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0\,. \tag{1}$$

Provedeme-li vyčíslení (1) např. podle třetího řádku dostáváme

$$(\sigma_z - \sigma)\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_z \\ \tau_z & (\sigma_y - \sigma) \end{vmatrix} = 0\,. \tag{2}$$

Z rovnice (2) je zřejmé, že $(\sigma_z - \sigma) = 0$, tj. $\sigma_3 = \sigma_z = -15\,\mathrm{MPa}$. To, že σ_z představuje jedno hlavní napětí, bylo možné usoudit hned ze zadání, neboť v rovině kolmé na osu z působí jen normálové napětí ($\tau_x = \tau_y = 0$). Pro zbývající dvě hlavní napětí potom podle (2) platí

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_z \\ \tau_z & (\sigma_y - \sigma) \end{vmatrix} = 0\,. \tag{3}$$

Po vyčíslení determinantu a řešení získané kvadratické rovnice dostáváme pro zbývající dvě hlavní napětí vztah

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2} = 50 \pm 50\,\mathrm{MPa}. \tag{4}$$

Hledaná hlavní napětí tedy jsou

$$\sigma_1 = 100\,\mathrm{MPa}, \quad \sigma_2 = 0\,\mathrm{MPa}, \quad \sigma_3 = -15\,\mathrm{MPa}. \tag{5}$$

Nyní pro zadanou napjatost určíme součinitel bezpečnosti podle jednotlivých hypotéz. Podle Guestovy hypotézy lze psát

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_1 - \sigma_3 = 115\,\mathrm{MPa}. \tag{6}$$

Dosazením redukovaného napětí σ_{red} do pevnostní podmínky

$$\sigma_{red} \leq \sigma_D = \frac{Re}{k} \tag{7}$$

dostáváme

$$k = \frac{Re}{\sigma_{red}} = \frac{240}{115} \doteq 2.1. \tag{8}$$

Analogicky budeme postupovat i v případě pevnostní podmínky HMH. Redukované napětí v tomto případě však určíme podle vztahu

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = 108.3\,\mathrm{MPa}. \tag{9}$$

Pro hledanou bezpečnost k potom platí

$$k = \frac{Re}{\sigma_{red}} = \frac{240}{108.3} \doteq 2.2. \tag{10}$$

V případě Mohrovy podmínky pevnosti, která má tvar

$$\sigma_{red} \leq \sigma_{Dt} = \frac{R_{mt}}{k}\,, \tag{11}$$

určíme redukované napětí jako

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} - \rho\,\sigma_{min} = \sigma_1 - \rho\,\sigma_3 = \sigma_1 - \frac{R_{mt}}{R_{md}}\,\sigma_3 = 107.5\,\mathrm{MPa}. \tag{12}$$

Potom podle (11) pro bezpečnost k platí

$$k = \frac{R_{mt}}{\sigma_{red}} = \frac{200}{107.5} \doteq 1.9. \tag{13}$$

Příklad 4:

Součást je vyrobena z křehkého materiálu s mezí pevnosti v tahu $R_{mt} = 100\,\text{MPa}$ a mezí pevnosti v tlaku $R_{md} = 250\,\text{MPa}$. V nebezpečném bodě působí tahové napětí σ_1 a tlakové napětí $\sigma_3 = -200\,\text{MPa}$. Při jak velkém napětí σ_1 by nastalo porušení součásti?

Řešení:
Pro křehký materiál použijeme Mohrovu podmínku pevnosti. Podle této hypotézy dojde k porušení součásti tehdy, jestliže je redukované napětí rovno mezi pevnosti R_{mt}, tj.

$$\sigma_1 - \rho\,\sigma_3 = R_{mt}. \tag{1}$$

Z této podmínky vyplývá

$$\sigma_1 = R_{mt} + \frac{R_{mt}}{R_{md}}\,\sigma_3 = 20\,\text{MPa}. \tag{2}$$

Příklad 5:

Krychle je zatížena všestranným tlakem $p = 1.4\,\text{MPa}$. Určete modul pružnosti v tahu E, je-li Poissonovo číslo $\mu = 0.3$ a objem krychle se zmenšil o $0.8 \cdot 10^{-3}\,\%$.

Řešení:
Víme, že pro poměrnou změnu objemu platí

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \tag{1}$$

Vzhledem k tomu, že se jedná o namáhání všestranným tlakem, tj. všechny smykové složky napětí jsou nulové a pro normálové složky napětí platí $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$, budou všechny normálové složky deformace stejné, tj. $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon$. Jejich velikost lze přitom určit podle Hookeova zákona pro prostorovou napjatost jako

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] = -\frac{p}{E}\,(1 - 2\mu). \tag{2}$$

Po dosazení (2) do (1) dostáváme

$$\varepsilon_v = 3\,\varepsilon = -\frac{3p}{E}\,(1 - 2\mu). \tag{3}$$

Ze vztahu (3) již snadno vyjádříme hledaný vztah pro modul pružnosti v tahu E ve tvaru

$$E = -\frac{3p\,(1 - 2\mu)}{\varepsilon_v} = -\frac{3 \cdot 1.4 \cdot 10^6 (1 - 2 \cdot 0.3)}{-0.8 \cdot 10^{-5}} = 2.1 \cdot 10^5\,\text{MPa}. \tag{4}$$

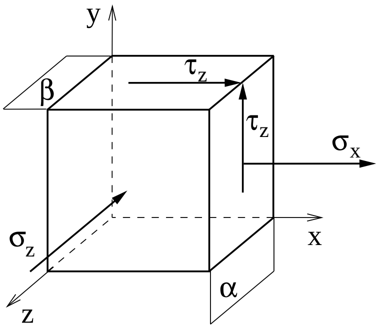
NAPJATOST A HYPOTÉZY PEVNOSTI

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

Příklad 6:

Napjatost je dána složkami napětí $\sigma_x = 80$ MPa, $\sigma_z = -30$ MPa a $\tau_z = 30$ MPa. Početně a graficky určete velikosti všech hlavních napětí a velikost τ_{max}. Dále ověřte splnění Guestovy podmínky pevnosti, je-li dáno: $Re = 280$ MPa, $k = 2.6$.

Řešení:



Obr. 1

Jako první krok při řešení tohoto příkladu si znázorníme elementární hranolek a do něj zakreslíme složky napětí podle zadání. Hranolek umístíme do prvního oktantu souřadnicového systému xyz, viz obr. 1. Normálová složka napětí σ_x, resp. smyková složka $\tau_z = \tau_{xy}$, působí ve směru kladné poloosy x, resp. kladných poloos x a y, neboť jsou kladné. Složka napětí σ_z působí ve směru záporné polosy z ($\sigma_z < 0$). Ostatní složky napětí jsou nulové. Z obr. 1 je zřejmé, že se jedná o prostorovou napjatost. Dále pak vidíme, že napětí σ_z je jedno z hledaných hlavních napětí, protože působí v rovině, v níž je smyková složka napětí nulová, tj. v hlavní rovině. To znamená, že jedna z hlavních rovin je rovnoběžná s rovinou xy souřadnicového systému.

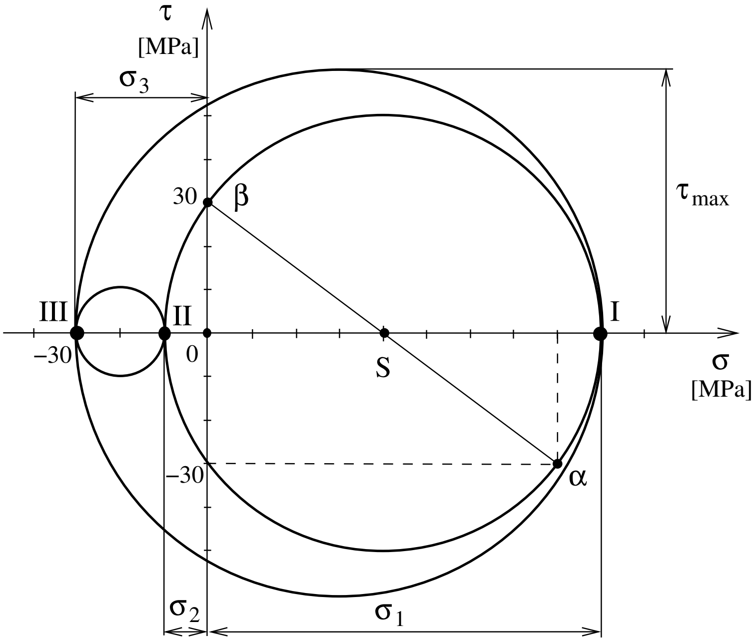
Sestrojme tedy nejprve Mohrovu kružnici odpovídající rovinné napjatosti popsané složkami σ_x a τ_z. Za tímto účelem zavedeme označení rovin α a β podle obr. 1. Při respektování úmluvy o znaméncích při vynášení normálovových a smykových složek napětí do Mohrova diagramu bude obrazem roviny α bod o souřadnicích $[80, -30]$ MPa a obrazem roviny β bod o souřadnicích $[0, 30]$ MPa. Obrazy těchto rovin budou přitom v souřadnicové rovině $\sigma\tau$ ležet na přímce, neboť tyto roviny ve skutečnosti svírají úhel 90°. Průsečík spojnice těchto obrazů a vodorovné osy σ představuje střed S hledané Mohrovy kružnice (viz. obr 2). Průsečíky sestrojené kružnice s vodorovnou osou σ představují obrazy dvou hlavních rovin, v tomto případě I a II. Obraz poslední hlavní roviny III má souřadnice $[-30, 0]$ MPa, neboť $\sigma_3 = \sigma_z = -30$ MPa (viz výše). Nyní již můžeme sestrojit zbývající dvě kružnice a získat tak výsledný Mohrův diagram zadané napjatosti. Hledané velikosti hlavních napětí a maximálního smykového napětí pak můžeme snadno odečíst z obr. 2. Dostáváme tak: $\sigma_1 \doteq 90\,\text{MPa}$, $\sigma_2 \doteq -9\,\text{MPa}$, $\sigma_3 \doteq -30\,\text{MPa}$ a $\tau_{max} \doteq 60\,\text{MPa}$.

Nyní stanovíme početně velikosti hlavních napětí σ_1, σ_2 a maximálního smykového napětí τ_{max}. Pro jejich velikosti lze psát

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2} = \tag{1}$$

$$= \frac{80+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{80-0}{2}\right)^2 + 30^2} = \begin{cases} \sigma_1 = 90\,\text{MPa} \\ \sigma_2 = -10\,\text{MPa} \end{cases} \tag{2}$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{90 - (-30)}{2} = 60\,\text{MPa}. \tag{3}$$



Obr. 2

V dalším kroku ověříme splnění Guestovy podmínky pevnosti. To můžeme provést např. ověřením platnosti nerovnosti $\sigma_{red} \leq \sigma_D$, kde σ_D určíme ze zadaných hodnot Re a k, nebo vypočtením skutečné bezpečnosti k' odpovídající zadané napjatosti a tu poté porovnat s bezpečností požadovanou k, tj. ověřením platnosti nerovnosti $k' \geq k$ (pokud bude tato nerovnost platit, podmínka pevnosti je splněna). V obou případech však musíme stanovit velikost σ_{red} podle příslušné podmínky pevnosti.

Podle Guestovy podmínky platí

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_1 - \sigma_3 = 90 - (-30) = 120\,\mathrm{MPa}. \tag{4}$$

Využijeme-li prvního uvedeného postupu, určíme nejprve hodnotu σ_D, tj.

$$\sigma_D = \frac{Re}{k} = \frac{280}{2.6} \doteq 107.7\,\mathrm{MPa} \tag{5}$$

a potom ověříme splnění nerovnosti $\sigma_{red} \leq \sigma_D$, tj.

$$120 \nleq 107.7, \tag{6}$$

takže Guestova podmínka pevnosti není splněna.

Pokud bychom chtěli použít druhý uvedený přístup, stanovíme skutečnou bezpečnost k' z rovnice

$$\sigma_{red} = \sigma_D = \frac{Re}{k'}\,, \quad \text{tj.}\;\; k' = \frac{Re}{\sigma_{red}} = \frac{280}{120} \doteq 2.3. \tag{7}$$

Zjistili jsme tedy, že $k' < k$, tj. Guestova podmínka pevnosti není splněna.