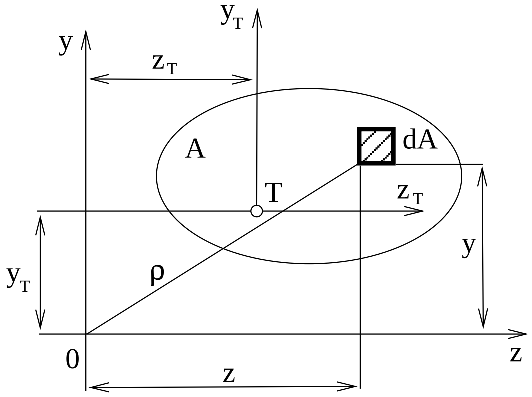
GEOMETRICKÉ CHARAKTERISTIKY PRŮŘEZŮ

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

2.1 Shrnutí základních poznatků

Uvažujme průřez o ploše A v pravoúhlé soustavě souřadnic y, z s počátkem 0, viz obr. 1. Na obrázku je dále zobrazena pravoúhlá soustava souřadnic y_T, z_T s počátkem v těžišti T plochy A. Osy souřadnicových systémů y a y_T, resp. z a z_T, jsou navzájem rovnoběžné a vzdálené z_T, resp. y_T.



Obr. 1: Popis plochy A v pravoúhlé soustavě souřadnic y, z.

Potom lineární moment průřezu U_z ([m^3], [mm^3]) k ose z a lineární moment průřezu U_y ([m^3], [mm^3]) k ose y definujeme jako

$$U_z = \int_A y dA = y_T A\,, \qquad U_y = \int_A z dA = z_T A \qquad \text{pro} \qquad U_z, U_y \gtreqless 0\,. \tag{1}$$

Znaménka lineárních momentů plochy závisí na poloze průřezu v soustavě souřadnic y, z. Budeme-li nyní uvažovat průřez A rozdělený na A_i, kde $i = 1, 2, .., n$ jednodušších částí (např. ploch tvaru obdélníka), platí pro celkové lineární momenty plochy

$$U_z = \sum_{i=1}^{n} U_{zi}\,, \qquad U_y = \sum_{i=1}^{n} U_{yi}\,. \tag{2}$$

Pomocí vztahů (1) lze vypočítat souřadnice těžiště

$$z_T = \frac{\int_A z dA}{A}\,, \qquad y_T = \frac{\int_A y dA}{A}. \tag{3}$$

Souřadnice těžiště můžeme obdobně nalézt i v případě průřezu rozděleného na A_i částí, tj.

$$z_T = \Big(\sum_{i=1}^{n} U_{yi}\Big)/\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big)\,, \qquad y_T = \Big(\sum_{i=1}^{n} U_{zi}\Big)/\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big)\,. \tag{4}$$

Ze vztahů (3) a (4) vyplývá důležitý závěr. Je-li totiž $U_z = 0$, resp. $U_y = 0$, je osa y totožná s těžištní osou y_T, resp. osa z je totožná s těžištní osou z_T.

Kvadratický moment průřezu J_z ([m^4], [mm^4]) k ose z a kvadratický moment průřezu J_y ([m^4], [mm^4]) k ose y, viz obr. 1, definujeme jako

$$J_z = \int_A y^2 dA\,, \qquad J_y = \int_A z^2 dA\,, \qquad \text{vždy platí} \qquad J_z, J_y > 0\,. \tag{5}$$

Kromě nich definujeme také deviační moment D_{yz}, resp. D_{zy}, ([m^4], [mm^4]) k osám y, z, resp. z, y, jako

$$D_{yz} = D_{zy} = \int_A zy dA \quad \gtreqless \quad 0\,. \tag{6}$$

Znaménko deviačního momentu závisí, podobně jako v případě lineárních momentů plochy, na poloze průřezu v soustavě souřadnic. Pomocí jednoduché úvahy lze ukázat, že deviační moment průřezu k libovolné soustavě souřadnic, kde alespoň jedna osa je osou souměrnosti, je roven nule. Takové osy se nazývají hlavní a kvadratické momenty hlavními. Poznamenejme ještě, že osy, které procházejí těžištěm průřezu, se nazývají centrální. Ty mají význam v teorii ohybu.

Mezi kvadratické charakteristiky plochy řadíme ještě polární moment průřezu J_p ([m^4], [mm^4]), který k počátku 0 je v soustavě souřadnic y, z roven

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (z^2 + y^2) dA = J_y + J_z\,, \qquad \text{vždy platí} \qquad J_p > 0\,. \tag{7}$$

Obdobně jako u lineárních momentů platí pro složené průřezy

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} J_{zi}, \qquad J_y = \sum_{i=1}^{n} J_{yi}, \qquad D_{yz} = \sum_{i=1}^{n} D_{yzi}, \qquad J_p = \sum_{i=1}^{n} J_{pi} = \sum_{i=1}^{n} J_{zi} + \sum_{i=1}^{n} J_{yi}\,. \tag{8}$$

Kvadratické momenty k posunutým osám (Steinerova věta).

S ohledem na obr. 1 lze vyjádřit Steinerovu větu ve tvaru

$$J_z = J_{z_T} + A\,y_T^2\,, \qquad J_y = J_{y_T} + A\,z_T^2 \qquad \text{a} \qquad D_{yz} = D_{y_T z_T} + A\,y_T z_T\,. \tag{9}$$

U deviačního momentu je potřeba uvažovat znaménka souřadnic těžiště z_T a y_T s ohledem na zvolenou soustavu souřadnic y, z.

Podmínky platnosti Steinerovy věty (9) jsou následující:

- osy souřadnicových systémů jsou rovnoběžné.
- osy jednoho ze souřadnicových systémů musí procházet těžištěm průřezu nebo zvolené části průřezu.

Budeme-li tedy respektovat značení z obr. 1, musí osa y_T, resp. z_T, při použití vztahu $(9)_1$, resp. $(9)_2$, procházet těžištěm T. Při použití vztahu $(9)_3$ pak musí obě osy y_T a z_T současně procházet těžištěm T.

Kvadratické momenty k pootočeným osám.

Je dána pravoúhlá soustava souřadnic y_1, z_1 pootočená vůči pravoúhlé soustavě souřadnic y, z o úhel α. Obě soustavy souřadnic mají stejný počátek 0, jak je vidět na obr. 2. Pro transformace souřadnic platí

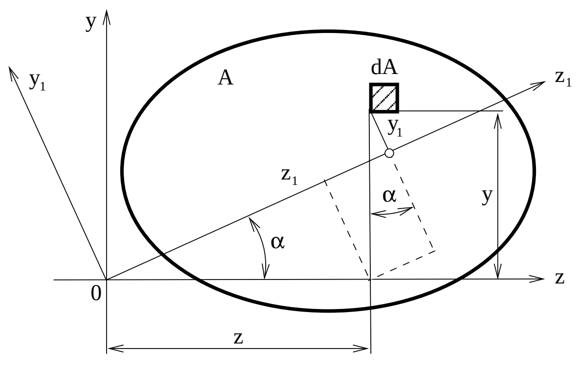
$$z_1 = y \sin\alpha + z\cos\alpha\,, \qquad y_1 = y\cos\alpha - z\sin\alpha\,. \tag{10}$$

Potom bude

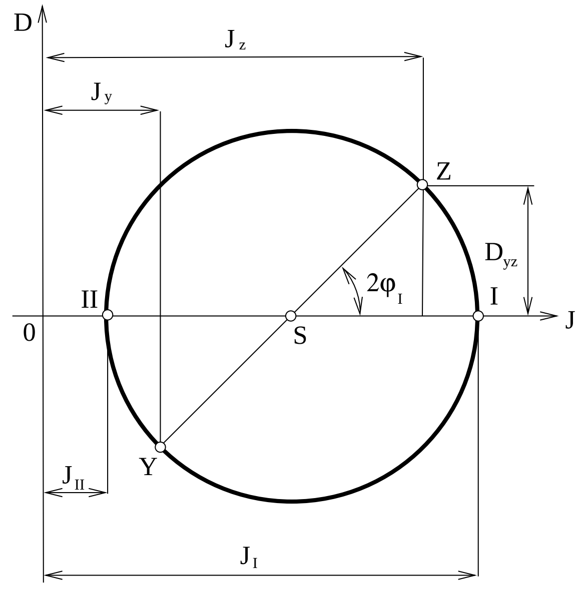
$$J_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \frac{J_z + J_y}{2} + \frac{J_z - J_y}{2}\cos 2\alpha - D_{yz}\sin 2\alpha\,,$$

$$D_{y_1 z_1} = \int_A y_1 z_1 dA = \frac{J_z - J_y}{2}\sin 2\alpha + D_{yz}\cos 2\alpha\,. \tag{11}$$

Vztahy (11) představují v pravoúhlé soustavě souřadnic J, D parametrické rovnice kružnice se středem S na ose J ve vzdálenosti $(J_z + J_y)/2$ od počátku. Souřadnice jednotlivých bodů kružnice se rovnají kvadratickému momentu k uvažované ose a deviačnímu momentu k uvažované ose a k ose k ní kolmé (např. bod Z o souřadnicích $[J_z, D_{yz}]$). Na body tzv. Culmannovy (Mohrovy) kružnice kvadratických momentů lze potom pohlížet jako na obrazy svazku os určeného počátkem 0 původní soustavy os y, z (obr. 2).



Obr. 2: Popis plochy A ve vzájemně pootočených soustavách souřadnic.



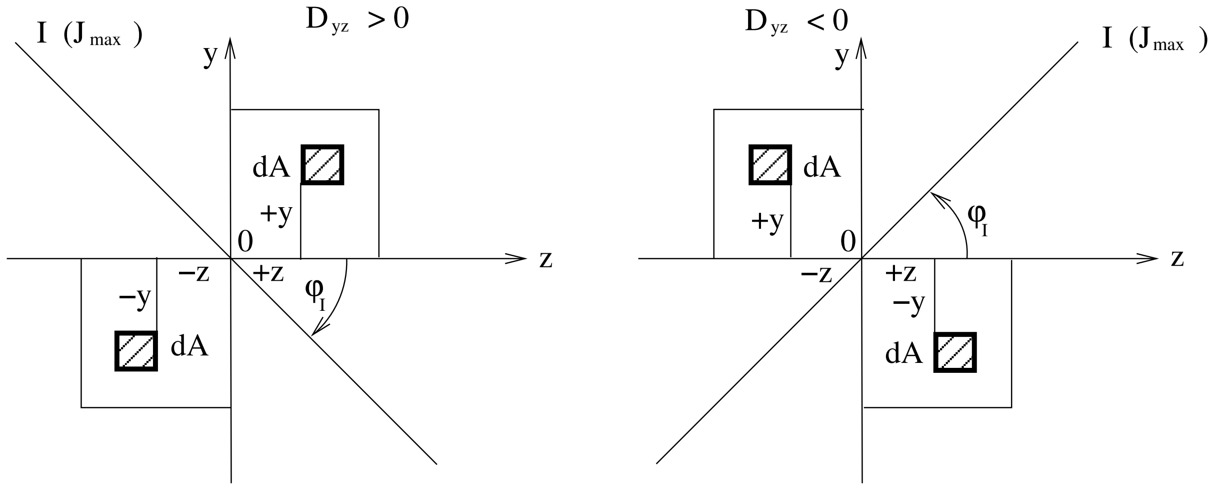
Obr. 3: Culmannova (Mohrova) kružnice kvadratických momentů.

Konstrukce kružnice:

Vypočítáme kvadratické momenty a deviační moment průřezu ke dvěma zcela libovolným, navzájem kolmým (ale výhodně voleným vzhledem k výpočtu) osám J_y, J_z, D_{yz} (uvažujme $J_z > J_y$) a v diagramu sestrojíme jejich obrazy Z, Y, viz obr. 3. Znaménko deviačního momentu D_{yz} při konstrukci neuvažujeme. Střed kružnice přitom leží na ose J, jak bylo uvedeno výše.

Body I a II představují osy, ke kterým je $D_{I,II} = 0$. Ty se nazývají hlavní a kvadratické momenty k nim hlavní kvadratické momenty.

Poloha hlavních os v uvažované soustavě souřadnic závisí na znaménku deviačního momentu, obr. 4 s ohledem na obr. 3.



Obr. 4: Poloha hlavních os v uvažované soustavě souřadnic.

Z obr. 3 dále vyplývají vztahy pro hlavní kvadratické momenty

$$J_{I,II} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + D_{yz}^2}\,. \tag{12}$$

Ty lze také určit ve zvoleném měřítku z Culmannovy kružnice, obr. 3. Úhel φ_I, který svírá osa maximálního kvadratického momentu s výchozí osou z, můžeme určit graficky rozpůlením úhlu $2\varphi_I$, nebo pomocí vztahu

$$\tan 2\varphi_I = \left|\frac{2D_{yz}}{J_z - J_y}\right|\,. \tag{13}$$