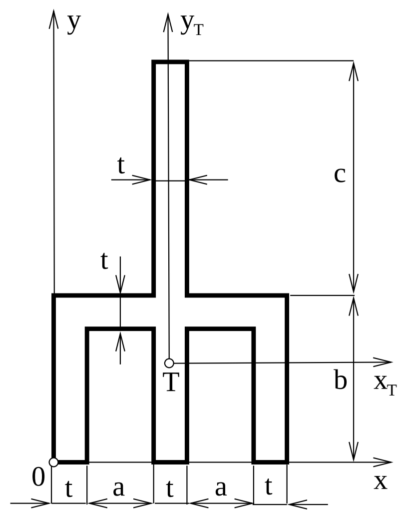
Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

2.3 Řešené příklady

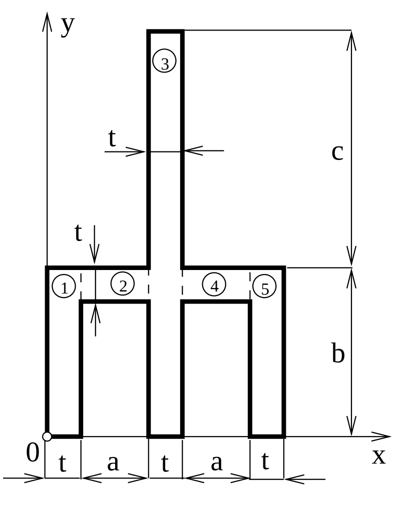
Příklad 1:

Vypočtěte kvadratické a deviační momenty k osám znázorněným na obr. 1, je-li dáno: $t = 10\,\mathrm{mm}$, $a = 20\,\mathrm{mm}$, $b = 50\,\mathrm{mm}$, $c = 60\,\mathrm{mm}$.



Obr. 1

Řešení:
Nejprve vypočteme kvadratické momenty a deviační moment k souřadnicovým osám x a y, tj. J_x, J_y a D_{xy}. Existuje více způsobů, jak tyto geometrické charakteristiky stanovit, avšak všechny vycházejí ze stejného principu: kvadratické a deviační momenty složeného průřezu k daným osám lze stanovit jako součet kvadratických (deviačních) momentů, dílčích ploch, ze kterých se tento průřez skládá, k daným osám. Je zřejmé, že zadaný průřez lze snadno rozdělit na jednotlivé obdélníky. Způsobů rozdělení, jakožto i postupů výpočtů, je celá řada. V tomto příkladě se zaměříme pouze na dva.



Obr. 2

Postup 1: Rozdělíme průřez myšlenými řezy, např. podle obr. 2 na obdélníky 1 - 5 a příslušné geometrické charakteristiky celého průřezu stanovíme na základě znalosti geometrických charakteristik dílčích obdélníků k jejich těžištním osám a přímou aplikací Steinerovy věty. Pro výsledný kvadratický moment k ose x potom můžeme psát

$$J_x = \underbrace{\frac{1}{12}\,tb^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 tb}_{J_x^{①}} + \underbrace{\frac{1}{12}\,at^3 + \left(b - \frac{t}{2}\right)^2 at}_{J_x^{②}} + \underbrace{\frac{1}{12}\,t\,(b+c)^3 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 (b+c)t}_{J_x^{③}} + \underbrace{\frac{1}{12}\,at^3 + \left(b - \frac{t}{2}\right)^2 at}_{J_x^{④}} + \underbrace{\frac{1}{12}\,tb^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 tb}_{J_x^{⑤}}. \qquad (1)$$

Je zřejmé, že platí:

$$J_x^{①} = J_x^{⑤} = \frac{1}{3}\,tb^3\,, \qquad J_x^{②} = J_x^{④} \qquad \text{a} \qquad J_x^{③} = \frac{1}{3}\,t\,(b+c)^3\,. \qquad (2)$$

Pomocí vztahů (2) lze vztah (1) přepsat do výsledného tvaru

$$J_x = \frac{2}{3}\,tb^3 + \frac{1}{3}\,t\,(b+c)^3 + 2\left[\frac{1}{12}\,at^3 + \left(b - \frac{t}{2}\right)^2 at\right]. \tag{3}$$

Po dosazení zadaných hodnot dostáváme $J_x \doteq 608.33\cdot 10^4\,\mathrm{mm}^4$.

Kvadratický moment J_y stanovíme podle obr. 1 analogickým postupem. Platí

$$\begin{aligned} J_y = {} & \underbrace{\frac{1}{12}\,bt^3 + \left(\frac{t}{2}\right)^2 bt}_{J_y^{①}} + \underbrace{\frac{1}{12}\,ta^3 + \left(t + \frac{a}{2}\right)^2 at}_{J_y^{②}} + \underbrace{\frac{1}{12}\,(b+c)t^3 + \left(t + a + \frac{t}{2}\right)^2 (b+c)t}_{J_y^{③}} + \\ & + \underbrace{\frac{1}{12}\,ta^3 + \left(t + a + t + \frac{a}{2}\right)^2 at}_{J_y^{④}} + \underbrace{\frac{1}{12}\,bt^3 + \left(t + a + t + a + \frac{t}{2}\right)^2 bt}_{J_y^{⑤}}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Po úpravě lze (4) přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} J_y = {} & \frac{1}{6}\,bt^3 + bt\left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}t + 2a\right)^2\right] + \frac{1}{6}\,ta^3 + at\left[\left(t + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(2t + \frac{3}{2}a\right)^2\right] + \\ & + \frac{1}{12}\,(b+c)t^3 + \left(\frac{3}{2}t + a\right)^2 (b+c)t\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Po dosazení zadaných hodnot dostáváme $J_y \doteq 408.33\cdot 10^4\,\mathrm{mm}^4$.

Při stanovení D_{xy} s výhodou využijeme toho, že deviační moment plochy k souřadnému systému, jehož aspoň jedna osa je osou symetrie plochy, je roven 0. Potom

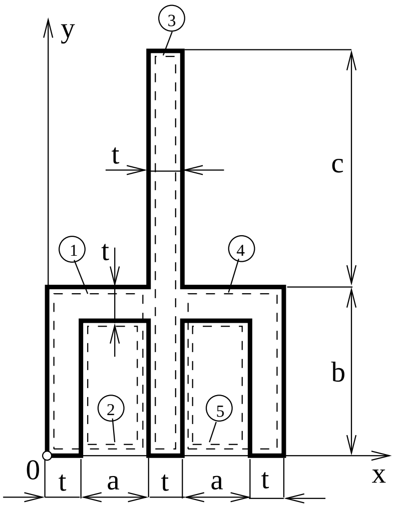
$$\begin{aligned} D_{xy} = {} & \underbrace{0 + \frac{t}{2}\frac{b}{2}\,bt}_{D_{xy}^{①}} + \underbrace{0 + (t + \frac{a}{2})\left(b - \frac{t}{2}\right)at}_{D_{xy}^{②}} + \underbrace{0 + \left(t + a + \frac{t}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)t(b+c)}_{D_{xy}^{③}} + \\ & + \underbrace{0 + \left(t + a + t + \frac{a}{2}\right)\left(b - \frac{t}{2}\right)at}_{D_{xy}^{④}} + \underbrace{0 + \left(t + a + t + a + \frac{t}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)bt}_{D_{xy}^{⑤}}\,, \end{aligned} \tag{6}$$

což lze po úpravě přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} D_{xy} = {} & bt\left[\frac{bt}{4} + \left(\frac{5}{2}t + 2a\right)\frac{b}{2}\right] + at\left[\left(t + \frac{a}{2}\right)\left(b - \frac{t}{2}\right) + \left(2t + \frac{3}{2}a\right)\left(b - \frac{t}{2}\right)\right] + \\ & + \frac{(b+c)^2}{2}t\left(\frac{3}{2}t + a\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Po dosazení zadaných hodnot dostáváme $D_{xy} = 362.25\cdot 10^4\,\mathrm{mm}^4$.

Postup 2: Průřez rozdělíme myšlenými řezy na jednotlivé obdélníky tak, aby byly osy x a y totožné s příslušnými stranami obdélníků, nebo s nimi byly rovnoběžné a procházely jejich těžišti, a mohli jsme tak přímo využít obecně platné vztahy



Obr. 3

$$J = \frac{1}{3}\, bh^3\,, \qquad J = \frac{1}{12}\, bh^3 \qquad \text{a} \qquad D = \frac{b^2h^2}{4}\,,$$

kde b a h představují strany obdelníka.

Za účelem stanovení J_x je vhodné rozdělit zadaný průřez na dílčí obdélníky, např. podle obr. 3. Potom můžeme psát

$$J_x = J_x^{①} - J_x^{②} + J_x^{③} + J_x^{④} - J_x^{⑤}\,. \tag{8}$$

Vzhledem k tomu, že

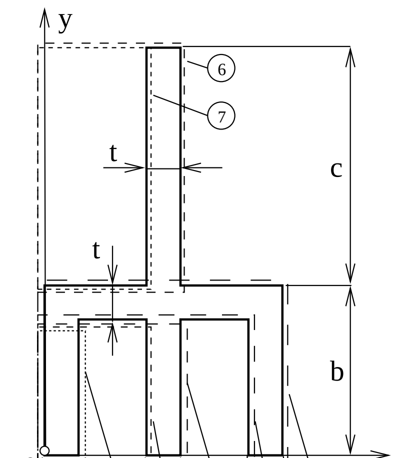
$$J_x^{①} = J_x^{④} \qquad \text{a} \qquad J_x^{②} = J_x^{⑤}\,,$$

lze (8) přepsat do tvaru

$$J_x = J_x^{③} + 2\,(J_x^{①} - J_x^{②}) = \frac{1}{3}\, t\,(b+c)^3 + 2\left[\frac{1}{3}\,(a+t)\,b^3 - \frac{1}{3}\, a\,(b-t)^3\right]. \tag{9}$$

Po dosazení zadaných hodnot dostáváme $J_x \doteq 608.33 \cdot 10^4$ mm^4 stejně jako v případě prvního postupu a vztahu (3).

V případě výpočtu J_y rozdělme průřez např. podle obr. 4. Potom lze pro J_y psát



Obr. 4

$$\begin{aligned} J_y = {} & J_y^{①} - J_y^{②} + J_y^{③} - J_y^{④} + J_y^{⑤} + J_y^{⑥} - J_y^{⑦} = \\ = {} & \frac{1}{3}\, b\,(3t+2a)^3 - \frac{1}{3}\,(b-t)\,(2t+2a)^3 + \\ & + \frac{1}{3}\,(b-t)\,(2t+a)^3 - \frac{1}{3}\,(b-t)\,(t+a)^3 + \\ & + \frac{1}{3}\,(b-t)t^3 + \frac{1}{3}\, c\,(2t+a)^3 - \frac{1}{3}\, c\,(a+t)^3. \end{aligned} \tag{10}$$

Po úpravě a dosazení zadaných hodnot zjistíme, že kvadratický moment $J_y \doteq 408.33 \cdot 10^4\,$mm^4, porovnej s výsledkem dle vztahu (5).

Deviační moment D_{xy} by bylo možné stanovit analogickým postupem, avšak jak již napovídá výpočet J_y, není tento postup příliš vhodný, neboť by bylo nutné sestavit původní průřez z ještě většího počtu obdélníků, jejichž strany leží na ose x a y.

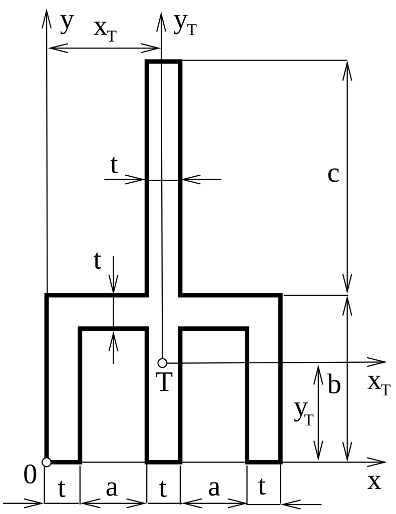
Z výše uvedených výpočtů vyplývá, že postup 2 je v některých případech snažší a méně náročný (viz stanovení J_x), avšak mnohdy vede na příliš velký počet dílčích obdélníků, na které je nutné průřez rozdělit (viz stanovení J_y). Postup 1 se na první pohled zdá složitější, nicméně lze říci, že je univerzálnější.

Nyní se zaměříme na stanovení J_{x_T}, J_{y_T} a $D_{x_T y_T}$. K tomu, abychom mohli tyto hodnoty vypočítat, je nejprve nutné určit polohu těžiště. Nechť je poloha těžiště T zadaného průřezu v systému $x\,y$ dána souřadnicemi $T = [x_T, z_T]$ (viz obr. 5). Díky symetrii průřezu vzhledem k ose y_T je zřejmé, že

$$x_T = a + \frac{3}{2}t \tag{11}$$

a po dosazení $x_T = 35\,\mathrm{mm}$. Souřadnici y_T stanovíme pomocí lineárních (statických) momentů jednotlivých částí průřezu k ose x a pomocí celkové plochy průřezu A. Využijeme-li např. rozdělení průřezu znázorněné na obr. 2, můžeme psát

$$y_T = \frac{S_x^{①} + S_x^{②} + S_x^{③} + S_x^{④} + S_x^{⑤}}{A} \tag{12}$$



Obr. 5

Je zřejmé, že $S_x^{①} = S_x^{⑤}$ a $S_x^{②} = S_x^{④}$. Potom lze (12) přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} y_T &= \frac{2(S_x^{①} + S_x^{②}) + S_x^{③}}{A} = \\ &= \frac{2\left[\frac{b}{2}tb + \left(b - \frac{t}{2}\right)at\right] + \frac{b+c}{2}t(b+c)}{3tb + 2at + tc} = \\ &= \frac{b^2 + (2b-t)a + \frac{1}{2}(b+c)^2}{3b + 2a + c}\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Dosazením do (13) dostáváme $y_T = 41.4\,\mathrm{mm}$.

Nyní již tedy známe polohu těžiště T a můžeme přistoupit ke stanovení centrálních kvadratických charakteristik průřezu J_{x_T}, J_{y_T} a $D_{x_T y_T}$[1]. Opět uvedeme pouze dva z možných postupů.

Postup 1: Využijeme znalosti hodnot J_x, J_y a D_{xy} a přímou aplikací Steinerovy věty určíme hledané geometrické charakteristiky. Lze tedy psát (viz obr. 5)

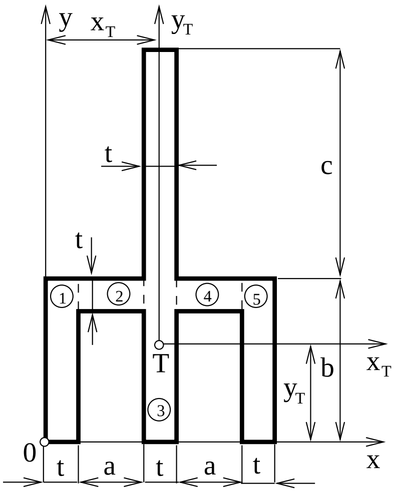
$$J_{x_T} = J_x - y_T^2 A\,, \qquad J_{y_T} = J_y - x_T^2 A \qquad \text{a} \qquad D_{x_T y_T} = D_{xy} - x_T y_T A\,. \tag{14}$$

Po dosazení do (14) již dříve vypočtených hodnot kvadratických momentů a polohy těžiště, přičemž plocha $A = t(3b+2a+c) = 2.5{\cdot}10^3\,\mathrm{mm}^2$, rovnou dostáváme $J_{x_T} \doteq 179.84{\cdot}10^4\,\mathrm{mm}^4$, $J_{y_T} \doteq 102.08 \cdot 10^4\,\mathrm{mm}^4$ a $D_{x_T y_T} = 0$.

Postup 2: Tento způsob je založen na stejném principu jako první postup v případě určení J_x, J_y a D_{xy}. Liší se pouze tím, že nyní použijeme Steinerovu větu přímo pro přepočet centrálních kvadratických a deviačních momentů dílčích obdélníků k osám x_T a y_T a ne k osám x a y, tj. při tomto postupu budeme využívat vzdálenosti těžištních os dílčích obdélníků od těžištních os celého průřezu.

[1] Je zřejmé, že $D_{x_T y_T} = 0$, neboť osa y_T je osou symetrie průřezu. Pro názornost však v dalším budeme počítat i tuto hodnotu, jakoby se jednalo o nesymetrický průřez.

Opět provedeme rozdělení průřezu na dílčí obdélníky, např. podle obr. 6. Potom pro kvadratický moment J_{x_T} platí:



Obr. 6

$$J_{x_T} = J_{x_T}^{①} + J_{x_T}^{②} + J_{x_T}^{③} + J_{x_T}^{④} + J_{x_T}^{⑤}\,. \tag{15}$$

Je zřejmé, že $J_{x_T}^{①} = J_{x_T}^{⑤}$ a $J_{x_T}^{②} = J_{x_T}^{④}$. Potom lze vztah (15) přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} J_{x_T} &= 2\,(J_{x_T}^{①} + J_{x_T}^{②}) + J_{x_T}^{③} = \\ &= 2\left[\frac{1}{12}\,tb^3 + \left(\frac{b}{2} - y_T\right)^2 tb + \frac{1}{12}\,at^3 + \right. \\ &+ \left.\left(b - \frac{t}{2} - y_T\right)^2 at\right] + \frac{1}{12}\,t(b+c)^3 + \\ &+ \left(\frac{b+c}{2} - y_T\right)^2 t(b+c)\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Vyčíslením vztahu (16) dostáváme $J_{x_T} \doteq 179.84 10^4\,\mathrm{mm}^4$.

Analogický postup využijeme i při výpočtu kvadratického momentu

$$J_{y_T} = J_{y_T}^{①} + J_{y_T}^{②} + J_{y_T}^{③} + J_{y_T}^{④} + J_{y_T}^{⑤}\,. \tag{17}$$

Opět je z obr. 6 zřejmé, že $J_{y_T}^{①} = J_{y_T}^{⑤}$ a $J_{y_T}^{②} = J_{y_T}^{④}$. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} J_{y_T} &= 2\,(J_{y_T}^{①} + J_{y_T}^{②}) + J_{y_T}^{③} = 2\left[\frac{1}{12}\,bt^3 + \left(\frac{t}{2} - x_T\right)^2 tb + \frac{1}{12}\,a^3 + \left(\frac{a}{2} + t - x_T\right)^2 at\right] + \\ &+ \frac{1}{12}\,(b+c)t^3 + 0\,t(b+c)\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Po dosazení do tohoto vztahu a vyčíslení obdržíme stejný výsledek jako v případě aplikace Steinerovy věty, vztah $(14)_2$.

Deviační moment $D_{x_Ty_T}$ je díky symetrii průřezu vzhledem k ose y_T roven 0 (viz dříve poznámka pod čarou). Tento fakt ověříme následovně:

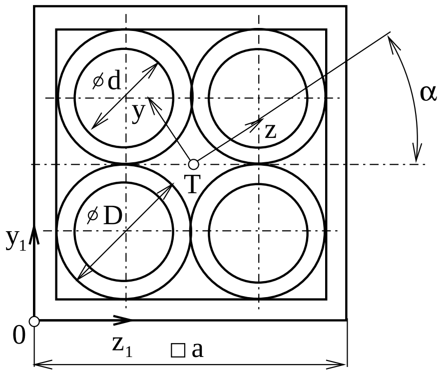
$$\begin{aligned} D_{x_Ty_T} &= D_{x_Ty_T}^{①} + D_{x_Ty_T}^{②} + D_{x_Ty_T}^{③} + D_{x_Ty_T}^{④} + D_{x_Ty_T}^{⑤} = 0 + \left(\frac{b}{2} - y_T\right)\left(\frac{t}{2} - x_T\right) tb + \\ &+ 0 + \left(b - \frac{t}{2} - y_T\right)\left(\frac{a}{2} + t - x_T\right) at + 0 + 0 + \left(b - \frac{t}{2} - y_T\right)\left(2t + \frac{3}{2}\,a - x_T\right) at + \\ &+ 0 + \left(\frac{b}{2} - y_T\right)\left(2a + \frac{5}{2}\,t - x_T\right) tb\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Po dosazení příslušných hodnot do (19) dostáváme skutečně $D_{x_Ty_T} = 0$, neboť platí: $D_{x_Ty_T}^{①} = -D_{x_Ty_T}^{⑤}$, $D_{x_Ty_T}^{②} = -D_{x_Ty_T}^{④}$ a $D_{x_Ty_T}^{③} = 0$.

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

Příklad 2:

Vypočítejte kvadratické momenty $J_z, J_y, J_{z_1}, J_{z_2}$ a deviační momenty D_{yz} a $D_{y_1z_1}$ průřezu na obr. 1, je-li dáno: $a, \varnothing D, \varnothing d$.



Obr. 1

Řešení:
Při řešení nejprve zaměřme pozornost na stanovení geometrických charakteristik plochy vůči souřadnicovým osám z a y s počátkem v bodě $T-$ těžištěm celého průřezu. Polohu bodu T můžeme určit snadno intuitivně, protože tento bod leží na čtyřech osách symetrie vyšetřované geometrie. Poloha bodu T v systému z_1y_1 je tedy dána souřadnicemi $T = [0.5\,a, 0.5\,a]$. Ze symetrie průřezu vyplývají další důležité zákonitosti. Ve shodě s obr. 2 zřejmě platí, že

$$J_{z_2} = J_{y_2}\,, \qquad D_{z_2y_2} = 0 \qquad \wedge \qquad J_{z_3} = J_{y_3}\,, \qquad D_{z_3y_3} = 0\,. \tag{1}$$

Pokusme si nyní představit konstrukci Culmannovy kružnice pro svazek všech os procházejících bodem T. Budeme-li postupovat při konstrukci kružnice ve shodě s (1), zjistíme, že kružnice zdegeneruje v bod, který leží na ose kvadratických momentů. Z toho tedy vyplývá, že kvadratický moment k jakékoliv ose ze svazku os, která prochází bodem T, je identický, tj.

$$J_{z_2} = J_{y_2} = J_{z_3} = J_{y_3} = ... = J_z = J_y\,. \tag{2}$$

Z Culmannovy kružnice rovněž vyplývá, že deviační moment je nulový k jakýmkoliv dvěma navzájem kolmým osám z tohoto svazku os, tj. také pro

$$D_{z_2y_2} = D_{z_3y_3} = D_{zy} = 0. \tag{3}$$

Pro stanovení J_z si proto můžeme vybrat výpočet kvadratického momentu k libovolné jiné ose, ke které se bude výpočet provádět snadněji. Z hlediska pracnosti se jeví jako nejsnažší provést výpočet k ose z_2 nebo y_2. Kvadratický moment k ose z_2 pak vypočteme jako, viz obr. 2,

$$J_{z_2} = J_{z_{2S}} + 4J_{z_{2C}} = J_{z_{2S}} + 4\left[J_{z_{2K}} + A_K\left(\frac{D}{2}\right)^2\right]\,, \tag{4}$$

kde $J_{z_{2S}}$, resp. $J_{z_{2C}}$, je kvadratický moment dutého čtvercového průřezu, resp. mezikruhového průřezu, k ose z_2. Kvadratický moment $J_{z_{2C}}$ stanovíme aplikací Steinerovy věty ze znalosti kvadratického momentu $J_{z_{2K}}$ mezikruhového průřezu k ose z_{2K} a plochy A_K mezikruží. Po dosazení dostaneme

$$J_{z_2} = \frac{1}{12}\left[a^4 - (2D)^4\right] + 4\left[\frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right) + \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right)\left(\frac{D}{2}\right)^2\right]\,. \tag{5}$$

Nyní proveďme výpočet kvadratických momentů a deviačního momentu k osám z_1, y_1. Podle obr. 1 zřejme platí, že

$$J_{z_1} = J_{y_1}\,. \tag{6}$$

K jejich výpočtu můžeme s výhodou využít znalosti J_{z_2} k centrální (těžištní) ose celého průřezu. Pomocí Steinerovy věty můžeme psát

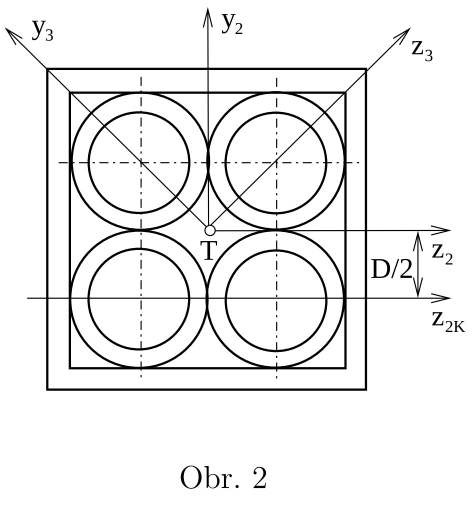
$$J_{z_1} = J_{z_2} + A\left(\frac{a}{2}\right)^2 = J_{z_2} + \left[a^2 - (2D)^2 + 4\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)\right]\left(\frac{a}{2}\right)^2, \tag{7}$$

kde A je velikost plochy celého průřezu. Obdobně budeme postupovat i v případě výpočtu deviačního momentu $D_{z_1y_1}$, kde platí, viz (3),

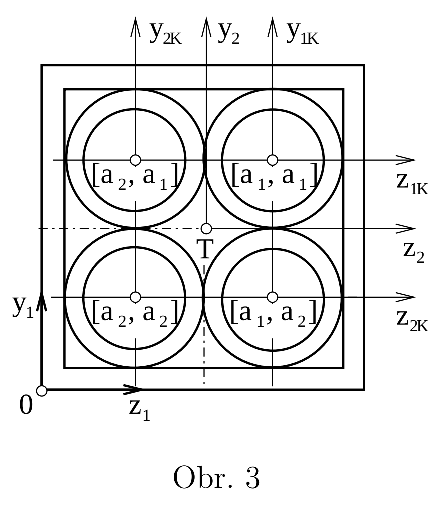
$$D_{z_1y_1} = D_{z_2y_2} + A\,\frac{a}{2}\frac{a}{2} = 0 + \left[a^2 - (2D)^2 + 4\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)\right]\frac{a^2}{4}\,. \tag{8}$$

Výpočet kvadratických charakteristik J_{z_1} a $D_{z_1y_1}$ můžeme provést i jinými postupy. Ukažme si jeden z nich. Celý průřez rozdělíme na geometricky jednodušší plochy, konkrétně na dutý čtvercový průřez o ploše A_S a 4 mezikruhové průřezy o plochách A_K. S ohledem na obr. 3 pak můžeme psát

$$\begin{aligned} J_{z_1} &= J_{z_{2S}} + A_S\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(J_{z_{1K}} + A_K a_1^2\right) + 2\left(J_{z_{2K}} + A_K a_2^2\right) = \frac{1}{12}\left[a^4 - (2D)^4\right] + \\ &+ \left[a^2 - (2D)^2\right]\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left[\frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right) + \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)\left(\frac{D}{2} + D + \frac{a - 2D}{2}\right)^2\right] + \\ &+ 2\left[\frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right) + \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)\left(\frac{D}{2} + \frac{a - 2D}{2}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{9}$$



Obr. 2



Obr. 3

Obdobně vypočteme deviační moment

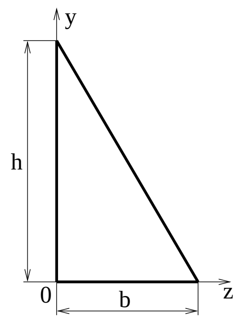
$$D_{z_1y_2} = D_{z_2y_2} + A_S\frac{a}{2}\frac{a}{2} + D_{z_{1K}y_{1K}} + A_Ka_1a_1 + D_{z_{2K}y_{2K}} + A_Ka_2a_2 + D_{z_{1K}y_{2K}} + A_Ka_1a_2 +$$
$$+ D_{z_{2K}y_{1K}} + A_Ka_2a_1 = A_S\frac{a^2}{4} + A_K\left(a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2\right) = A_S\frac{a^2}{4} + A_K\left(a_1 + a_2\right)^2 =$$
$$= [a^2 - (2D)^2]\frac{a^2}{4} + \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right)\left[\left(\frac{D}{2} + D + \frac{a-2D}{2}\right) + \left(\frac{D}{2} + \frac{a-2D}{2}\right)\right]^2, \quad (10)$$

přičemž platí, že $D_{z_2y_2} = D_{z_{1K}y_{1K}} = ... = D_{z_{2K}y_{1K}} = 0$. Po elementární úpravě dostaneme výraz ve tvaru (8).

Závěrem příkladu ještě podotkněme, že vztah (5) a vztahy (7) až (10) je možné a účelné dále upravit a zjednodušit. Došlo by však ke ztrátě názornosti, a proto nejsou úpravy výrazů provedeny.

Příklad 3:

Pro trojúhelníkový průřez $h = 2b$ podle obr. 1 vypočítejte hlavní centrální kvadratické momenty a určete polohu hlavních os.



Obr. 1

Řešení:
Při výpočtu použijeme následující postup:

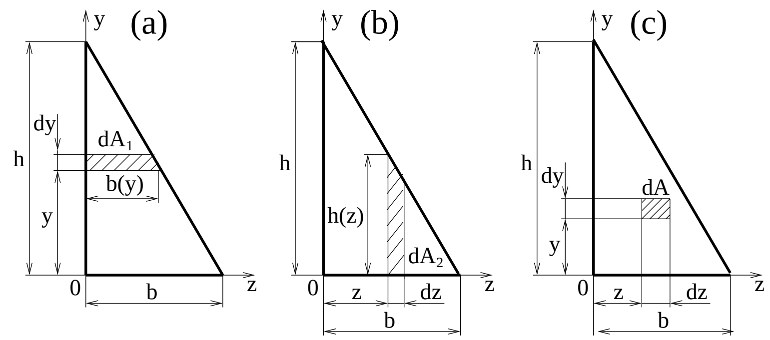
- ve vhodně zvolené soustavě souřadnic z, y (obr. 1) vypočítáme kvadratické charakteristiky J_z, J_y a D_{yz}.
- vůči této soustavě souřadnic určíme polohu těžiště T, tj. jeho souřadnice z_T, y_T.
- vypočítáme centrální kvadratické charakteristiky J_{z_T}, J_{y_T} a $D_{y_Tz_T}$ využitím Steinerovy věty.
- ze znalosti centrálních kvadratických charakteristik vypočteme hlavní centrální kvadratické momenty $J_I = J_{max}$ a $J_{II} = J_{min}$, nalezneme polohy hlavních centrálních os a zobrazíme Culmanovu (Mohrovu) kružnici kvadratických momentů.

Na základě definičního vztahu pro kvadratický moment průřezu k ose z lze psát

$$J_z = \int_A y^2\,dA_1 = \int_0^h y^2\frac{b}{h}(h-y)dy = \frac{b}{h}\int_0^h (hy^2 - y^3)dy = \frac{b}{h}\left[h\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h = \frac{bh^3}{12}, \quad (1)$$

přičemž $dA_1 = b(y)dy$, jak je vidět na obr. 2(a). Proměnný paramert $b(y)$ snadno vyjádříme z podobnosti trojúhelníků

$$\frac{b(y)}{h-y} = \frac{b}{h} \quad\Rightarrow\quad b(y) = \frac{b}{h}(h-y).$$



Obr. 2

Analogicky stanovíme kvadratický moment k ose y jako

$$J_y = \int_A z^2\, dA_2 = \int_0^b z^2 \frac{h}{b}(b-z)\, dz = \frac{hb^3}{12}\,, \tag{2}$$

jestliže jsme v tomto případě využili vztahu, obr. 2(b),

$$dA_2 = h(z)\, dz = \frac{h}{b}(b-z)\, dz.$$

Deviační moment k osám y, z vypočteme na základě definičního vztahu jako

$$D_{yz} = \int_A y\, z\, dA = \iint_A y\, z\, dy\, dz = \int_0^h \left(y \int_0^{b(y)} z\, dz \right) dy = \int_0^h \left(y \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{b(y)} \right) dy =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^h \left(\frac{b}{h}(h-y) \right)^2 y\, dy = \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h (h^2 y - 2hy^2 + y^3)\, dy = \frac{b^2 h^2}{24}\,. \tag{3}$$

V tomto případě byl diferenciál plochy $dA = dy\, dz$ uvažován ve shodě s obr. 2(c). Deviační moment D_{yz} můžeme výhodně vypočítat také alternativní postupem. Uvažujme diferenciál plochy dA_1 dle obr. 2(a), resp. diferenciál plochy dA_2 dle obr. 2(b). Vzhledem k tomu, že proměnné y a z v definičním vztahu odpovídají poloze těžiště diferenciálu plochy (při zanedbání diferenciálů druhého řádu), lze definiční vztah psát v následujících tvarech

$$D_{yz} = \int_A y \frac{b(y)}{2}\, dA_1 = \int_0^h y \frac{b(y)}{2} b(y)\, dy = \frac{1}{2} \int_0^h y b(y)^2\, dy\,, \tag{4}$$

$$D_{yz} = \int_A z \frac{h(z)}{2}\, dA_2 = \int_0^b z \frac{h(z)}{2} h(z)\, dz = \frac{1}{2} \int_0^b z h(z)^2\, dz\,. \tag{5}$$

Tímto postupem se lze vyhnout jedné integraci, srov. (3) a (4).

Pro určení kvadratických charakteristik k těžištním (centrálním) osám rovnoběžných se souřadnicovými osami y, z musíme nejprve znát polohu těžiště T trojúhelníku. Je obecně známo, že v tomto případě je těžiště v jedné třetině jeho výšky, tj. platí

$$z_T = \frac{b}{3}\,, \qquad y_T = \frac{h}{3}\,, \tag{6}$$

viz obr. 3. Přesto si na tomto místě ukažme obecný postup výpočtu polohy těžiště alespoň jedné ze souřadnic, např. y_T. Lineární moment k ose z je

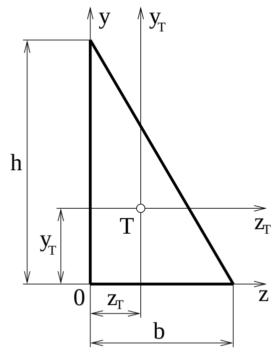
$$U_z = Ay_T = \int_A y\, dA_1 = \int_0^h yb(y)dy = \int_0^h y\frac{b}{h}(h-y)dy = \frac{b}{h}\int_0^h (hy - y^2)dy = \frac{bh^2}{6}\,. \quad (7)$$

Plochu A vypočteme z definice jako

$$A = \int_A dA_1 = \int_0^h b(y)dy = \frac{b}{h}\int_0^h (h-y)dy = \frac{bh}{2}\,. \quad (8)$$

V obou případech byl uvažovám diferenciál plochy ve shodě s obr. 2(a). Po vyjádření y_T ze (7) a dosazením za lineární moment a plochu dostáváme

$$y_T = \frac{bh^2/6}{bh/2} = \frac{h}{3}\,.$$



Obr. 3

Obdobně se vypočítá souřadnice z_T pomocí lineárního momentu k ose y.

Kvadratické momenty a deviační moment k centrálním osám z_T a y_T, obr. 3, které jsou rovnoběžné s osami z a y, vypočteme pomocí Steinerovy věty

$$J_{z_T} = J_z - Ay_T^2 = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36}\,,\quad J_{y_T} = J_y - Az_T^2 = \frac{hb^3}{12} - \frac{bh}{2}\left(\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{hb^3}{36}\,,$$

$$D_{z_Ty_T} = D_{zy} - Az_Ty_T = \frac{b^2h^2}{24} - \frac{bh}{2}\frac{b}{3}\frac{h}{3} = -\frac{b^2h^2}{72}\,. \quad (9)$$

Vezmeme-li v úvahu konkrétní rozměry trojúhelníku ze zadání, můžeme vztahy z (9) přepsat, např. pomocí parametru b, jako

$$J_{z_T} = \frac{b(2b)^3}{36} = \frac{2b^4}{9}\,,\qquad J_{y_T} = \frac{2bb^3}{36} = \frac{b^4}{18}\,,\qquad D_{z_Ty_T} = -\frac{b^2(2b)^2}{72} = -\frac{b^4}{18}\,. \quad (10)$$

Nyní již můžeme vypočítat hlavní centrální kvadratické momenty podle vztahu

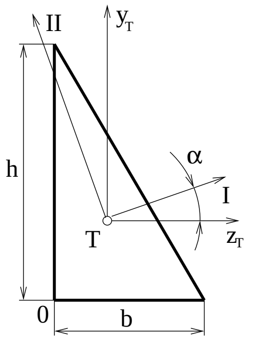
$$J_{max/min} = \frac{J_{z_T} + J_{y_T}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{z_T} - J_{y_T}}{2}\right)^2 + (D_{z_Ty_T})^2}\,. \quad (11)$$

Dosazením do tohoto vztahu z (10) a po úpravě dostáváme

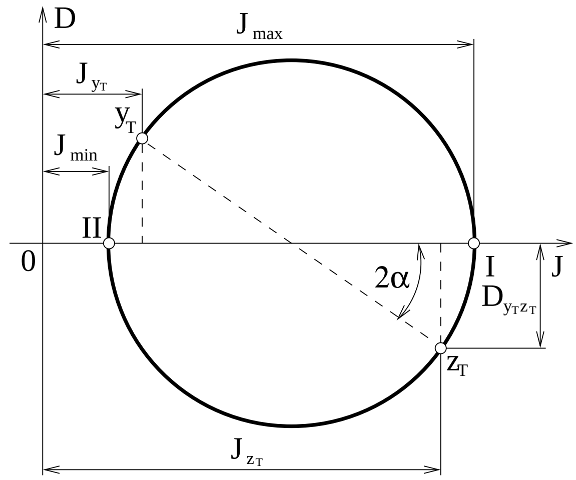
$$J_{max} = \frac{5+\sqrt{13}}{36}b^4 \doteq 0.239b^4\,,\qquad J_{min} = \frac{5-\sqrt{13}}{36}b^4 \doteq 0.039b^4\,. \quad (12)$$

Polohu hlavních centrálních os určíme pomocí úhlu

$$\alpha = \frac{1}{2}\arctan\left|\frac{2D_{z_Ty_T}}{J_{z_T} - J_{y_T}}\right| = \frac{1}{2}\arctan\left|\frac{-2\frac{b^4}{18}}{\frac{2b^4}{9} - \frac{b^4}{18}}\right| = \frac{1}{2}\arctan\frac{2}{3} \doteq 16.8°, \quad (13)$$



Obr. 4



Obr. 5

který svírá osa maximálního kvadratického momentu I s výchozí osou z_T, $(J_{z_T} > J_{y_T})$. Osa I musí navíc s ohledem na velikost deviačního momentu $(D_{z_T y_T} < 0)$ procházet prvním a třetím kvadrantem, které jsou vymezeny souřadnicovými osami z_T a y_T. Poloha hlavních centrálních os je potom vidět na obr. 4. Připomeňme ještě, že smysl vynášení úhlu v Culmannově kružnici je shodný se smyslem vynášení úhlu mezi jednotlivými, navzájem pootočenými, souřadnicovými systémy, viz obr. 4 a obr. 5.