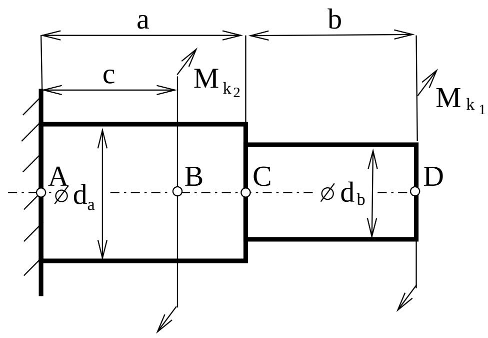
Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

5.3 Řešené příklady

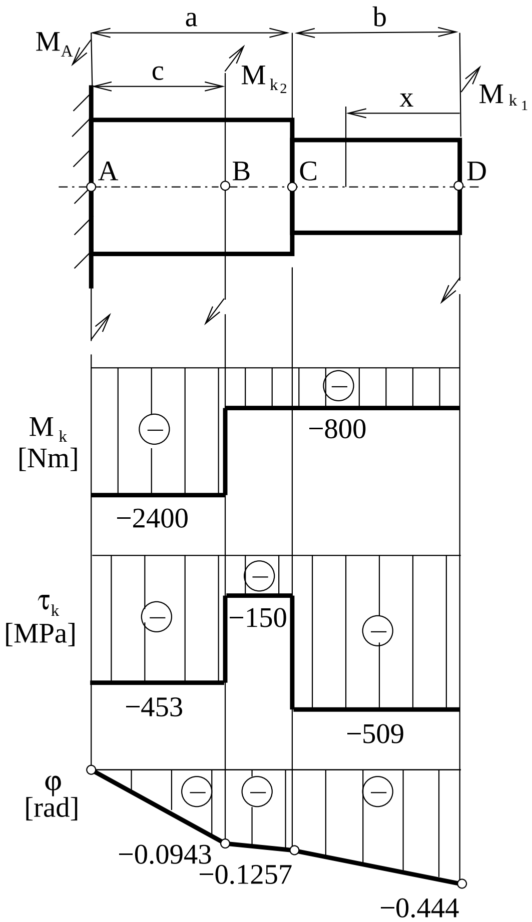
Příklad 1:

U prutu kruhového průřezu o průměrech d_a a d_b, který je zatížen kroutícími momenty M_{k_1} a M_{k_2} ($M_{k_2} = 2M_{k_1}$), viz obr. 1, vypočítejte reakční účinek v uložení prutu, vyšetřete a zakreslete rozložení vnitřního momentu M_k, smykového napětí τ_k a úhlu natočení φ, je-li dáno:
$a = b = 0.5\,\mathrm{m}$, $c = 0.25\,\mathrm{m}$, $d_a = 30\,\mathrm{mm}$, $d_b = 20\,\mathrm{mm}$, $M_{k_1} = 800\,\mathrm{Nm}$, $G = 0.8 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$.



Obrázek 1

Řešení:



Obrázek 2

Jako první vyšetříme reakční účinek, který vzniká ve vetknutí prutu. Vzhledem k tomu, že prut je namáhán pouze kroutícími momenty, jejichž vektory leží na ose prutu, vzniká ve vetknutí pouze reakční točivý moment M_A. Jeho točivý směr volme např. v souladu s obr. 2. Velikost vypočítáme s pomocí momentové podmínky rovnováhy k ose prutu

$$M_A - M_{k_1} - M_{k_2} = 0\,, \tag{1}$$

resp. po úpravě

$$M_A = M_{k_1} + M_{k_2} = 3M_{k_1} = 2400\,\mathrm{Nm}\,. \tag{2}$$

V dalším kroku řešení vyšetříme rozložení vnitřních účinků vznikajících v libovolném řezu v důsledku působení vnějšího zatížení. Vzhledem k charakteru zatížení bude v libovolném řezu kolmém na osu prutu vznikat pouze vnitřní kroutící moment M_k. Jeho velikost určíme metodou řezu z podmínky rovnováhy mezi ním a vnějšími účinky (momenty) po jedné straně řezu.

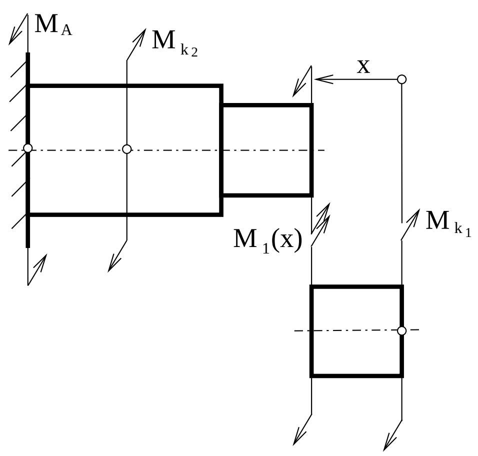
Díky tomu, že se vnější zatížení podél prutu mění, nebude zřejmě možné hledaný vnitřní moment M_k popsat podél osy prutu stejnou funkcí.

Za tímto účelem je vhodné rozdělit prut na příslušný počet částí tak, aby v každé části byl vnitřní moment popsán jedinou funkcí. Stejná úvaha bude nutná i při vyšetřování smykového napětí τ_k, kdy ale samozřejmě počet částí, na kterých bude napětí popsáno jedinou funkcí, nemusí obecně souhlasit s počtem částí v případě kroutícího momentu M_k. V tomto případě je při vyšetřování M_k a τ_k vhodné díky proměnnému zatížení i průřezu prutu rozdělit prut na 3 části (část AB, BC a CD, obr. 2).

Nyní tedy z podmínek rovnováhy mezi vnitřním účinkem v daném řezu a vnějšími účinky po jedné straně řezu stanovíme funkce M_1 až M_3, jež popisují vnitřní moment (kroutící) v jednotlivých polích prutu. Poloha obecného řezu, v němž budeme formulovat příslušné podmínky rovnováhy, bude přitom dána souřadnicí x, kterou v každém poli kótujme například z volného konce prutu, viz obr. 2.

Pole I: $x \in \langle 0, b \rangle$.

Veďme řez v obecném místě x a zakresleme smysl točivého vnitřního momentu M_1 tak, aby jeho vektor měl směr totožný se směrem vnější normály plochy řezu (viz obr. 3). Nyní formulujeme podmínku rovnováhy pro levou nebo pravou část prutu, přičemž z obou podmínek musíme získat stejnou funkci $M_1(x)$.



Obrázek 3

Podmínka rovnováhy na levé části prutu:

$$M_A - M_{k_2} + M_1(x) = 0\,, \tag{3}$$

resp. po úpravě

$$M_1(x) = M_{k_2} - M_A = 1600 - 2400 = -800\,\mathrm{Nm}\,. \tag{4}$$

Podmínka rovnováhy na pravé části prutu:

$$M_{k_1} + M_1(x) = 0 \tag{5}$$

a po úpravě

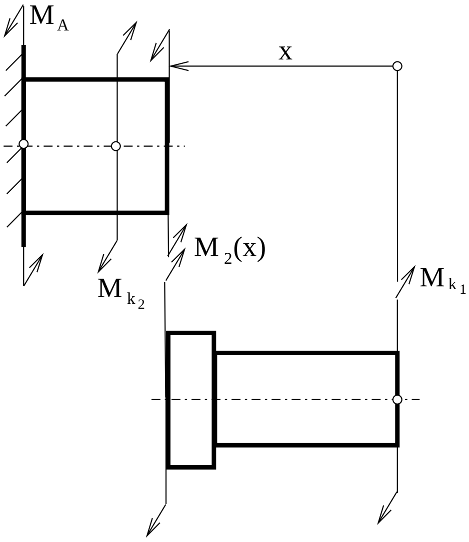
$$M_1(x) = -M_{k_1} = -800\,\mathrm{Nm}\,. \tag{6}$$

Je zřejmé, že pomocí obou podmínek rovnováhy získáme shodně $M_1(x) = -800\,\mathrm{Nm}$. Analogickým způsobem vyšetříme vnitřní momenty ve zbývajících dvou částech prutu.

Pole II: $x \in \langle b, a + b - c \rangle$.

Podmínka rovnováhy na levé části prutu:

$$M_A - M_{k_2} + M_2(x) = 0\,, \tag{7}$$



Obrázek 4

přičemž tato podmínka byla sestavena ve shodě s obr. 4. Po vyjádření vnitřního momentu dostáváme

$$M_2(x) = M_{k_2} - M_A = 1600 - 2400 = -800\,\mathrm{Nm}\,. \quad (8)$$

Podmínka rovnováhy na pravé části prutu:

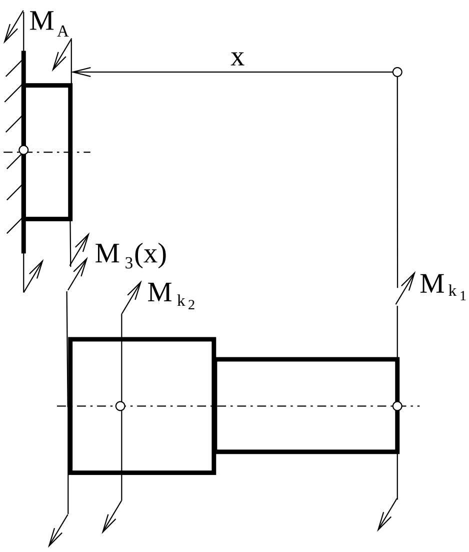
$$M_{k_1} + M_2(x) = 0 \quad (9)$$

a po úpravě

$$M_2(x) = -M_{k_1} = -800\,\mathrm{Nm}\,. \quad (10)$$

Přesto, že vnitřní moment mohl být v částech I a II popsán jedinou funkcí, v případě napětí to již platit nebude. Proto, čistě formálně, byl i vnitřní moment popsán v těchto částech samostatně.

Pole III: $x \in \langle a + b - c, a + b\rangle$.



Obrázek 5

Podmínka rovnováhy na levé části prutu (viz obr. 5):

$$M_A + M_3(x) = 0 \quad (11)$$

a po úpravě

$$M_3(x) = -M_A = -2400\,\mathrm{Nm}\,. \quad (12)$$

Podmínka rovnováhy na pravé části prutu:

$$M_{k_1} + M_{k_2} + M_3(x) = 0 \quad (13)$$

a po úpravě

$$\begin{aligned} M_3(x) &= -M_{k_1} - M_{k_2} = \\ &= -800 - 1600 = -2400\,\mathrm{Nm}\,. \end{aligned} \quad (14)$$

Výsledné rozložení vnitřního momentu M_k je zakresleno na obr. 2 [1]. Poznamenejme ještě, že zápis vnitřních momentů jako funkcí proměnné x, tj. $M_1(x)$ až $M_3(x)$, je v tomto případě pouze formální, neboť, jak jsme si ověřili, vnitřní moment je vždy na daném intervalu roven příslušné konstantě, tj. $M_1(x) = M_1 = -800\,\mathrm{Nm}$, $M_2(x) = M_2 = -800\,\mathrm{Nm}$ a $M_3(x) = M_3 = -2400\,\mathrm{Nm}$.

[1] Upozorňujeme, že jednodušší alternativa řešení je zvolit postup od volného konce prutu a vyjít z obecné definice vnitřních silových účinků, kdy tento účinek se rovná součtu odpovídajících silových účinků po jedné straně řezu.

V následujícím kroku stanovíme velikosti smykového napětí τ_k v jednotlivých částech prutu. Toto napětí je stanoveno vždy na největším poloměru prutu, kde je jeho hodnota v rámci řezu také největší.

Pole I: $x \in \langle 0, b \rangle$

$$\tau_{k_1}(x) = \frac{M_1(x)}{W_{k_b}} = \frac{16 M_1}{\pi d_b^3} = \frac{16 \cdot (-800)}{\pi \cdot 0.02^3} \doteq -509\,\mathrm{MPa}\,. \tag{15}$$

Pole II: $x \in \langle b, a+b-c \rangle$

$$\tau_{k_2}(x) = \frac{M_2(x)}{W_{k_a}} = \frac{16 M_2}{\pi d_a^3} = \frac{16 \cdot (-800)}{\pi \cdot 0.03^3} \doteq -150\,\mathrm{MPa}\,. \tag{16}$$

Pole III: $x \in \langle a+b-c, a+b \rangle$

$$\tau_{k_3}(x) = \frac{M_3(x)}{W_{k_a}} = \frac{16 M_3}{\pi d_a^3} = \frac{16 \cdot (-2400)}{\pi \cdot 0.03^3} \doteq -453\,\mathrm{MPa}\,. \tag{17}$$

Rozložení napětí τ_k je opět zakresleno do obr. 2. Poznamenejme ještě, že znaménko smykového napětí pozbývá z hlediska pevnosti materiálu smyslu, pouze nám umožňuje uvědomit si, v jakém smyslu je prut okolo své osy kroucen. Proto v případech, kde potřebujeme aplikovat pevnostní podmínku, pracujeme pouze s velikostí tohoto napětí. V našem příkladě bychom tedy stanovili velikost maximálního smykového napětí (napětí v krutu) jako

$$\tau_{k_{max}} = \max_i \{|\tau_{k_i}|\} \qquad \text{pro} \qquad i = 1, 2, 3\,. \tag{18}$$

Na závěr řešení vyšetříme úhel natočení podél prutu. Charakter úhlu natočení podél osy prutu stanovíme pomocí určení natočení prutu v charakteristických řezech označených body A, B, C a D. Vzhledem k tomu, že mezi těmito řezy je vnitřní kroutící moment konstantní (viz vyšetření momentů M_1 až M_3) a prut má konstantní průřez i mechanické vlastnosti, bude zkrut mezi těmito body konstantní a tudíž bude zkroucení mezi těmito body rozloženo lineárně. Pro velikosti zkrutu v jednotlivých intervalech můžeme psát

Pole I: $x \in \langle 0, b \rangle$

$$\vartheta_1 = \frac{M_1(x)}{J_{p_b} G} = \frac{32 M_1}{\pi d_b^4 G} = \frac{32 \cdot (-800)}{\pi \cdot 0.02^4 \cdot 0.8 \cdot 10^{11}} \doteq -0.6366\,\mathrm{rad\ m^{-1}}\,. \tag{19}$$

Pole II: $x \in \langle b, a+b-c \rangle$

$$\vartheta_2 = \frac{M_2(x)}{J_{p_a} G} = \frac{32 M_2}{\pi d_a^4 G} = \frac{32 \cdot (-800)}{\pi \cdot 0.03^4 \cdot 0.8 \cdot 10^{11}} \doteq -0.1256\,\mathrm{rad\ m^{-1}}\,. \tag{20}$$

Pole III: $x \in \langle a+b-c, a+b \rangle$

$$\vartheta_3 = \frac{M_3(x)}{J_{p_a} G} = \frac{32 M_3}{\pi d_a^4 G} = \frac{32 \cdot (-2400)}{\pi \cdot 0.03^4 \cdot 0.8 \cdot 10^{11}} \doteq -0.3772\,\mathrm{rad\ m^{-1}}\,. \tag{21}$$

Dále je zřejmé, že natočení v řezu s bodem A, tj. ve vetknutí, je $\varphi_A = 0$. Úhel natočení (zkroucení) φ_B v řezu s bodem B určíme jako úhel natočení části AB (úhel zkroucení intervalu III), tj.

$$\varphi_B = \vartheta_3 c = -0.3772 \cdot 0.25 = -0.0943\,\text{rad} \doteq -5.40\,^\circ. \tag{22}$$

Úhel natočení v řezu s bodem C určíme jako součet úhlu natočení φ_B a úhel natočení části BC (úhel zkroucení intervalu II). Velikost úhlu je

$$\varphi_C = \varphi_B + \vartheta_2(a - c) = -0.0943 - 0.1256 \cdot 0.25 = -0.1257\,\text{rad} \doteq -7.20\,^\circ. \tag{23}$$

Nakonec vypočteme úhel natočení v řezu s bodem D (celkové zkroucení prutu) jako součet úhlu natočení φ_C a úhel natočení části CD (úhel zkroucení intervalu I)

$$\varphi_D = \varphi_C + \vartheta_1 b = -0.1257 - 0.6366 \cdot 0.5 = -0.444\,\text{rad} \doteq -25.44\,^\circ. \tag{24}$$

Výsledné rozložení úhlu natočení φ je znázorněno na obr. 2. Ještě podotkněme, že na znaménko úhlu natočení pohlížíme obdobně, jako v případě smykového napětí. Znaménko nám v tomto případě napovídá, že celý prut je zkrucován levotočivě. V případě tuhostní podmínky bychom pak hledali maximální zkrut analogicky jako maximální napětí v (18)

$$\vartheta_{max} = \max_i \{|\vartheta_i|\} \qquad \text{pro} \qquad i = 1, 2, 3\,. \tag{25}$$

Příklad 2:

Ocelový hřídel přenáší výkon $P = 59\,\text{kW}$ při otáčkách $250\,\text{min}^{-1}$. Vypočtěte průměr hřídele d, nemá-li být překročena hodnota dovoleného napětí $\tau_D = 40\,\text{MPa}$ a maximálního zkrutu $\vartheta_D = 0.5\,^\circ/\text{m}$. Modul pružnosti ocele ve smyku uvažujte $G = 0.8 \cdot 10^5\,\text{MPa}$.

Řešení: V prvním kroku výpočtu stanovme velikost kroutícího momentu, který ocelový hřídel přenáší. Jeho velikost určíme z výkonu P a úhlové rychlosti ω jako

$$M_k = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi n} = \frac{59 \cdot 10^3 \cdot 60}{2 \cdot \pi \cdot 250} \doteq 2254\,\text{Nm}\,. \tag{1}$$

Kroutící moment, který přenáší hřídel, musí být v rovnováze s vnitřními momenty působícími v jednotlivých řezech kolmých na osu hřídele. Metodou řezu snadno zjistíme, že tyto vnitřní momenty jsou rovny kroutícímu momentu M_k.

Hledaný průměr hřídele d musí, v souladu se zadáním, vyhovovat současně dvěma podmínkám, tj. podmínce

- pevnosti

$$\tau_D \geq \frac{M_k}{W_k}\,, \tag{2}$$

- tuhosti

$$\vartheta_D \geq \frac{M_k}{GJ_p}\,, \tag{3}$$

přičemž poměry

$$\frac{M_k}{W_k} \quad \text{a} \quad \frac{M_k}{GJ_p}$$

jsou podém celé délky osy hřídele neměnné. Ze vztahů (2) a (3) nyní vyjádřeme a dopočtěme velikost průměru hřídele. Po úpravě dostáváme dle podmínky

- pevnosti

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_k}{\pi\tau_D}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2254}{\pi \cdot 40 \cdot 10^6}} = 0.0659\,\mathrm{m} \doteq 66\,\mathrm{mm}\,, \tag{4}$$

- tuhosti

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_k}{\pi\vartheta_D G}} = \sqrt[4]{\frac{180 \cdot 32 \cdot 2254}{\pi^2 \cdot 0.5 \cdot 0.8 \cdot 10^{11}}} = 0.0757\,\mathrm{m} \doteq 76\,\mathrm{mm}\,. \tag{5}$$

Průměr ocelového hřídele musí tedy být větší nebo roven 76 mm.

Příklad 3:

Navrhněte průměry dutého hřídele D a d ($d/D = 0.8$), má-li při otáčkách $n = 100\,\mathrm{min}^{-1}$ přenášet výkon $P = 176.5\,\mathrm{kW}$. Dovolené napětí v krutu uvažujte $\tau_D = 21\,\mathrm{MPa}$.

Řešení: Zatěžující kroutící moment vypočteme jako

$$M_k = \frac{P}{2\pi n} \doteq 9550\,\frac{P\,[\mathrm{kW}]}{n\,\left[\mathrm{min}^{-1}\right]} = 9550\,\frac{176.5}{100} \doteq 16856\,\mathrm{Nm}\,. \tag{1}$$

Přenášený kroutící moment M_k musí být v rovnováze s vnitřním kroutícím momentem. Z této úvahy ale vyplývá, že jejich velikost je stejná. Na vnějším poloměru hřídele pak vzniká maxinální smykové napětí, jehož velikost má být maximálně rovna napětí τ_D. Před uplatněním této pevnostní podmínky upravme ještě průřezový modul v krutu

$$W_k = \frac{2}{D}\left[\frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right)\right] = \frac{\pi}{16}D^3\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right] = \frac{\pi}{16}D^3\left(1 - 0.8^4\right) = 0.0369\pi D^3\,. \tag{2}$$

Vyjádříme-li nyní z pevnostní podmínky průměr hřídele D, dostáváme

$$D = \sqrt[3]{\frac{M_k}{0.0369\,\pi\tau_D}} = \sqrt[3]{\frac{16856}{0.0369 \cdot \pi \cdot 21 \cdot 10^6}} \doteq 0.191\,\mathrm{m}\,. \tag{3}$$

S ohledem na provedený výpočet byl navržen vnější průměr hřídele $D = 195\,\mathrm{mm}$ a následně dopočten vnitřní průměr $d = 156\,\mathrm{mm}$.

KRUT A STŘIH

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

Příklad 4:

Prut o průměru $d = 10\,\mathrm{mm}$ a délce $l = 1.5\,\mathrm{m}$ přenáší kroutící moment $M_k = 10\,\mathrm{Nm}$. Jaké je maximální smykové napětí a úhel natočení? Jaké je napětí ve vzdálenosti $\rho = 4\,\mathrm{mm}$ od osy prutu? Při řešení uvažujte, že modul pružnosti v tahu E je roven $2.08 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$ a že Poissonova konstanta $\mu = 0.3$.

Řešení: Ze zadání vyplývá, že vnější účinky působí na prut na jeho koncích. Provedeme-li pak metodu řezu, snadno zjistíme, že vnitřní kroutící moment je velikostí roven zatěžujícímu momentu M_k.

Největší napětí při tomto způsobu namáhání vzniká na vnějším poloměru kruhového prutu a jeho velikost vypočteme pomocí vnitřního kroutící momentu působícího v daném řezu a tzv. modulu průřezu v krutu, tj.

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k} = \frac{16 M_k}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 10 \cdot 10^3}{\pi \cdot 10^3} = 50.94\,\mathrm{Nmm}^{-2} \doteq 51\,\mathrm{MPa}\,. \tag{1}$$

Napětí na obecném poloměru lze pak vypočítat buď pomocí jednoduché úvahy vycházející z toho, že napětí se mění lineárně z nulové hodnoty na ose prutu až do hodnoty τ_k na vnějším poloměru,

$$\tau\left(\rho\right) = \tau_k \frac{2\rho}{d} = 51\,\frac{2 \cdot 4}{10} = 40.8\,\mathrm{MPa} \doteq 41\,\mathrm{MPa}\,, \tag{2}$$

nebo pomocí vztahu popisujícího rozložení napětí po průřezu prutu, viz níže. Vzhledem k tomu, že je dále počítán i úhel natočení, je výhodné předně vyčíslit polární moment setrvačnosti

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 10^4}{32} = 981.7\,\mathrm{mm}^4\,. \tag{3}$$

Napětí na obecném poloměru je tedy

$$\tau\left(\rho\right) = \frac{M_k}{J_p}\rho = \frac{10 \cdot 10^3}{981.7}\,4 \doteq 41\,\mathrm{MPa}\,. \tag{4}$$

Z (2) a (4) vidíme shodu mezi výsledky obou postupů.

S ohledem na konstantní vnitřní kroutící moment a konstantní průřez prutu a s ohledem na jeho homogenní mechanické vlastnosti je velikost zkrutu ϑ podél celého prutu stejná. Uvědomíme-li si, že pro modul pružnosti ve smyku platí

$$G = \frac{E}{2\left(1+\mu\right)} = \frac{2.08 \cdot 10^5}{2\left(1+0.3\right)} = 0.8 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}\,, \tag{5}$$

můžeme pak vzhledem ke konstantnímu ϑ psát pro vzájemný úhel natočení obou čel prutu

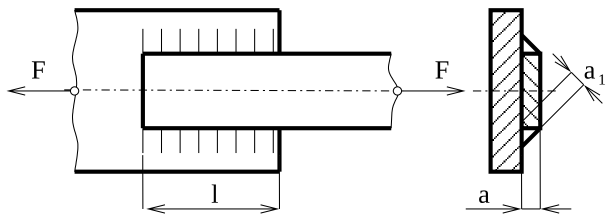
$$\varphi = \vartheta l = \frac{M_k l}{G J_p} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1.5 \cdot 10^3}{0.8 \cdot 10^5 \cdot 981.7} = 0.19\,\mathrm{rad} \doteq 10.89\,^\circ\,. \tag{6}$$

KRUT A STŘIH

Autoři: F. Plánička, M. Zajíček, V. Adámek

Příklad 5:

Určete potřebnou délku koutových svarů pro případ na obrázku, je-li dáno: $F = 5 \cdot 10^4\,\mathrm{N}$, $a = 15\,\mathrm{mm}$, $\tau_{Ds} = 30\,\mathrm{MPa}$.



Obrázek 1

Řešení: Z obrázku vyplývá, že svarový spoj je namáhán silou, která působí rovnoběžně (tečně) s nosnou plochou svarů. Budeme-li předpokládat, že oba koutové svary přenesou stejné zatížení, je tečná síla působící na jeden z nich

$$T = 0.5F\,. \tag{1}$$

Hodnotu napětí, kterou vypočteme, stanovme jako intenzitu napětí, tj. jako hodnotu středního napětí. Idealizujeme-li tvar koutového svaru podle obr. 1, lze nejmenší nosný průřez jednoho ze svarů stanovit podle vztahu

$$A = a_1 l = \frac{al}{\sqrt{2}} \doteq 0.71al \tag{2}$$

a následně také velikost smykového napětí

$$\tau = \frac{T}{A} = \frac{\sqrt{2}F}{2al}\,. \tag{3}$$

Dosazením do pevnostní podmínky

$$\tau_{Ds} \geq \tau \tag{4}$$

z (2) a (3) a její úpravou dostáváme

$$l \geq \frac{\sqrt{2}F}{2a\tau_{Ds}} = 0.71 \cdot \frac{5 \cdot 10^4}{15 \cdot 30} \doteq 79\,\mathrm{mm}\,. \tag{5}$$

Pro splnění pevnostní podmínky doporučujeme, aby délka svaru byla volena 80 mm.