7) Řešte přímočarý pohyb, je-li zrychlení danou funkcí rychlosti $a = a(v)$ při počátečních podmínkách $v(0) = v_0$, $x(0) = 0$. Aplikujte obecné poznatky na zvoleném příkladě.

Pro určení závislosti $v(t)$ dosadíme $a = \frac{dv}{dt}$. Potom $\frac{dv}{dt} = a(v)$ je diferenciální rovnice prvního řádu se separovatelnými proměnnými. Separací proměnných a integrací určíme

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a(v)} = \int_0^t dt = t \ . \qquad (*)$$

Podaří-li se kvadraturami určit neurčitý integrál $\int \frac{dv}{d(v)} = A(v)$ (záleží na tvaru funkce a), získáme odtud

$$A(v) = A(v_0) + t \ .$$

Jestliže B je inverzní funkce k A dostaneme výsledek

$$v(t) = B(t + A(v_0)) \ . \qquad (1)$$

Pro určení závislosti $v(x)$ dosadíme $a = v\frac{dv}{dx}$. Potom $v\frac{dv}{dx} = a(v)$ je opět diferenciální rovnice prvního řádu se separovatelnými proměnnými. Separací a integrací určíme

$$\int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{a(v)} = \int_0^x dx = x \ . \qquad (**)$$

Podaří-li se kvadraturami určit neurčitý integrál $C(v) = \int \frac{vdv}{a(v)}$ získáme odtud

$$C(v) = C(v_0) + x \ .$$

Jestliže D je inverzní funkce k C, dostáváme výsledek

$$v(x) = D(x + C(v_0)) \ . \qquad (2)$$

Srovnáním (1) a (2)

$$B(t + A(v_0)) = D(x + C(v_0))$$

odkud

$$x(t) = -C(v_0) + C(B(t + A(v_0))) \ .$$

Poznámka: Je-li funkce $a(v)$ například lineární v kvadrátu v (např. $a(v) = a_0 - k\,v^2$), vyplatí se místo $a = v\dfrac{dv}{dx}$ dosazovat $a = \dfrac{1}{2}\dfrac{dv^2}{dx}$.

Jako příklad uveďme funkci $a(v) = a_0 - k\,v$, kde a_0, k jsou dané kladné konstanty. Rovnice (*) má tvar

$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a_0 - kv}$$

Substitucí $w = a_0 - kv$ určíme, že $\int \dfrac{dv}{a_0 - kv} = -\dfrac{1}{k}\int \dfrac{dw}{w} = -\dfrac{1}{k}\ln|w| = -\dfrac{1}{k}\ln|\,a_0 - kv\,|$. Proto

$$t = -\frac{1}{k}\left[\ln|a_0 - kv| - \ln|a_0 - kv_0|\right] \ .$$

Odtud

$$-kt = \ln\left|\frac{a_0 - kv}{a_0 - kv_0}\right| \ .$$

Inverzní funkce k přirozenému logaritmu je exponenciála. Proto

$$\frac{a_0 - kv}{a_0 - kv_0} = e^{-kt} \ ,$$

odkud

$$v = \frac{1}{k}\left[a_0 - (a_0 - kv_0)\,e^{-kt}\right] \ . \tag{3}$$

Rovnice (**) má pro náš případ tvar

$$x = \int_{v_0}^{v} \frac{v\ dv}{a_0 - kv} \ . \tag{4}$$

Pro výpočet neurčitého integrálu provedeme následující úpravu

$$\frac{v}{a_0 - kv} = -\frac{1}{k}\frac{(-kv + a_0 - a_0)}{a_0 - kv} = -\frac{1}{k}\left(1 - \frac{a_0}{a_0 - kv}\right) \ .$$

Proto

$$\int \frac{v\ dv}{a_0 - kv} = -\frac{1}{k}\left[\int dv - a_0\int \frac{dv}{a_0 - kv}\right] .$$

Integrál v menšenci je triviální, v menšiteli provedeme substituci $w = a_0 - kv$. Dostaneme

$$\int \frac{v\ dv}{a_0 - kv} = -\frac{1}{k}\left(v + \frac{a_0}{k} \ln\left(a_0 - kv\right) \right) .$$

Dosazením do (4) pak máme po dílčí úpravě

$$x = -\frac{1}{k}\left(v - v_0 + \frac{a_0}{k} \ln\left(\frac{a_0 - kv}{a_0 - kv_0} \right) \right) .$$

Inverzní funkci k této transcendentní funkci se nám nepodaří určit. Exaktně tedy závislost $v(x)$ neurčíme. Závislost $x(t)$ je ale možno zjistit integrací (3). Dostáváme

$$x(t) = \frac{1}{k}\int_0^t \left[a_0 - (a_0 - kv_0)e^{-kt}\right]dt = \frac{1}{k}\left[a_0\, t + \frac{a_0 - kv_0}{k} e^{-kt}\Big|_0^t \right] = \frac{1}{k}\left[a_0\, t + \frac{a_0 - kv_0}{k}\left(e^{-kt} - 1\right)\right].$$