

Materiály ke 12. přednášce z předmětu KME/MECHB

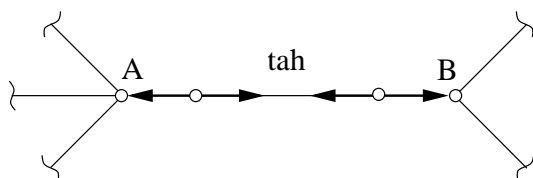
Zpracoval: Ing. Jan Vimmr, Ph.D.

Prutové soustavy

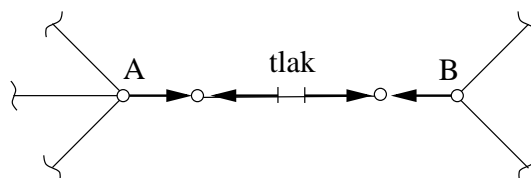
Prutové soustavy představují speciální soustavy těles, které se uplatňují při navrhování velkorozměrových nosných konstrukcí v mostním a pozemním stavitelství. Umožňují ekonomickou konstrukci např. mostů, jeřábů, stožárů a střešních konstrukcí. Prutová soustava je tvořena pruty (štíhlá tělesa), které jsou spojeny svými konci ve styčnicích. Podle počtu prutů spojených ve styčnicích rozlišujeme styčnice **dvojné**, **trojné** a **vícenásobné**.

Teoreticky definovaná prutová soustava představující **mechanický (výpočtový) model prutové soustavy**, je složena z nehmotných nezatížených binárních členů se dvěma rotačními vazbami, obr. 1, navzájem spojených svými konci ve styčnicích, které považujeme za ideální klouby. Vnější zatížení takové soustavy je pouze styčnickové, t.j. akční síly působí na soustavu ve styčnicích. Tyto vlastnosti mechanického modelu prutové soustavy zaručují, že jednotlivé pruty soustavy přenášejí pouze síly, jejichž nositelky leží na spojnici středů čepů rotačních vazeb. Pokud jsou **pruty přímé**, přenášejí tzv. **osové síly**, které vyvozují v prutech tah nebo tlak.

Uvolníme-li prutovou vazbu mezi styčnice *A* a *B* přenášející **tah**, vznikne v prutu pár vnitřních sil, které styčnice *A* a *B* k sobě přitahují, obr. 1. Kdyby byl prut namáhán na **tlak**, budou vnitřní síly v prutu styčnice *A* a *B* od sebe odtlačovat, obr. 2.



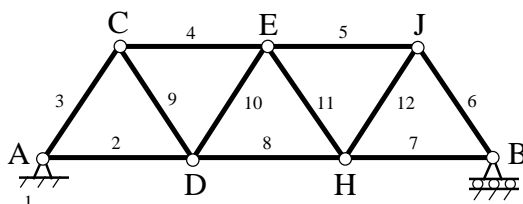
Obr. 1.



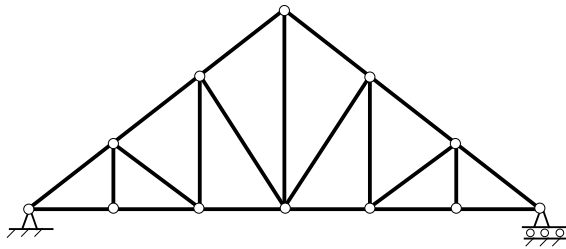
Obr. 2.

Podle prostorového uspořádání prutů dělíme mechanické modely prutových soustav na **rovinné** a **prostorové**. Výklad dále omezíme pouze na rovinné prutové soustavy.

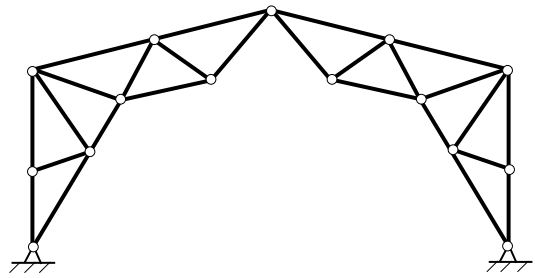
Aby bylo vyhověno požadavkům teoreticky definované prutové soustavy, musí se pruty navrhovat dostatečně tuhé. Na následujících obrázcích jsou znázorněny příklady mechanických modelů rovinných prutových soustav. Prutová konstrukce mostu je na obr. 3, mechanický model prutové konstrukce střechy je na obr. 4, model příhradového trojkloubového nosníku haly je na obr. 5, prutová konstrukce stožáru je na obr. 6 a mechanický model prutové konstrukce jeřábu je na obr. 7. Pruty budeme označovat čísly a jednotlivé styčnice velkými písmeny, obr. 3. Základní rám budeme podle zvyklostí značit číslicí 1.



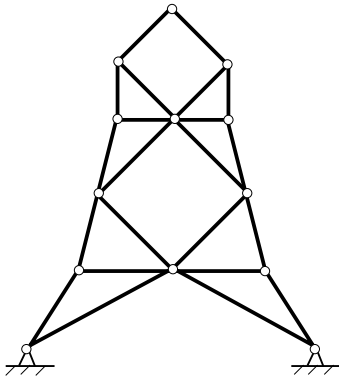
Obr. 3.



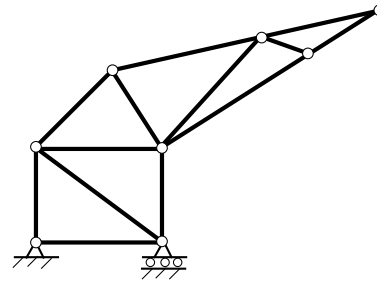
Obr. 4.



Obr. 5.

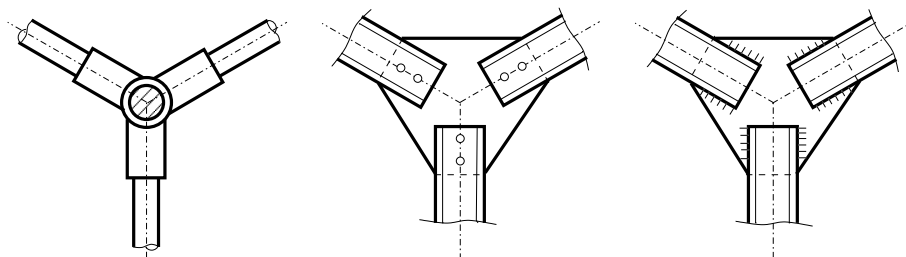


Obr. 6.



Obr. 7.

Praktické provedení prutových konstrukcí se od teoretického předpokladu především liší ve způsobu připojování prutů, neboť se neprovádí ideálními klouby. Skutečné spojení prutů, resp. konstrukční provedení styčníků může být kloubové, nýtované (šroubované) nebo svařované, obr. 8. Kloubové provedení se prakticky používá velmi zřídka a navíc nelze u něj vyloučit tření. Skutečné spojení prutů musí být provedeno tak, aby se osy všech spojených prutů protínaly v jednom bodě, obr. 8. Praxe ukázala, že při splnění tohoto požadavku a za předpokladu dostatečně dlouhých prutů můžeme skutečné spoje (nýtovaná a svařovaná spojení) modelovat jako ideální (hladké) klouby.



Obr. 8.

Rovinná prutová soustava je staticky určitá, je-li počet neznámých silových veličin soustavy roven počtu rovnovážných rovnic, z nichž je možné tyto veličiny vypočítat. U prutové soustavy jsou neznámými veličinami síly v jednotlivých prutech a složky vnějších reakcí. Počet rovnovážných rovnic se rovná dvojnásobnému počtu styčníků, protože síly působící na uvolněný styčník představují rovinnou soustavu sil o společném působišti, pro kterou píšeme dvě složkové silové podmínky rovnováhy. Odsud vyplývá, že **nutná podmínka statické určitosti rovinných prutových soustav** je

$$n = 2s - p - \sigma = 0, \quad (1)$$

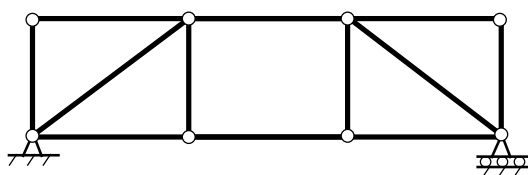
kde s je počet styčniců, p je počet prutů soustavy, σ je počet neznámých složek vnějších reakcí a n vyjadřuje počet stupňů volnosti rovinné prutové soustavy, který může být rovněž určen podle známé vazbové rovnice

$$n = 3(m - 1) - 2(r + p + v) - 1o, \quad (2)$$

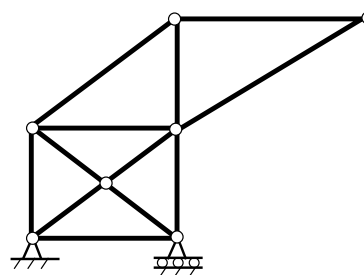
kde m vyjadřuje počet všech těles soustavy včetně rámu, r , p , v a o značí v tomto pořadí počet rovinných KD rotačních, posuvných, valivých a obecných. Poněvadž u staticky určitých prutových soustav nedochází ke změně poloh jejích jednotlivých členů, tvar soustavy se nemění. Říkáme, že **staticky určité prutové soustavy jsou i tvarově určité**. Aplikací podmínky (1) se přesvědčíme, že např. mechanický model prutové konstrukce mostu znázorněný na obr. 3 je staticky i tvarově určitá prutová soustava. V tomto případě je počet styčniců $s = 7$, počet prutů $p = 11$ a počet neznámých složek vnějších reakcí $\sigma = 3$. Dosazením do podmínky (1) dostáváme $n = 2 \cdot 7 - 11 - 3 = 0$. Při posuzování statické určitosti prutové soustavy mohou nastat výjimečné případy v důsledku zvláštního geometrického uspořádání prutů, kdy soustava splňuje podmínku statické určitosti (1), ale ve skutečnosti je celá pohyblivá, anebo může vykonávat jistý vymezený pohyb. Výjimečný případ nastává, když determinant soustavy rovnovážných rovnic, které sestavíme pro uvolněné styčnice prutové soustavy, se bude rovnat nule. V takovém případě vyjdou výpočtem některé síly v prutech, případně vnější reakce, nekonečně veliké.

Vyjde-li ze vztahu (1) $n > 0$, je prutová soustava pohyblivá a tudíž tvarově neurčitá. Počet rovnovážných rovnic je v takovém případě větší než počet neznámých. Příkladem jedenkrát tvarově neurčité ($n = 1$) rovinné prutové soustavy je soustava znázorněná na obr. 9. Tato prutová soustava je pohyblivá, neboť ve střední části této příhradové konstrukce chybí prut (příčka), který by zajistil její tvarovou určitost.

V případě, že $n < 0$, je prutová soustava sice tvarově určitá, ale vnitřně je staticky neurčitá. Znamená to, že počet neznámých silových veličin je větší, než je počet rovnovážných rovnic. Chybějící rovnice je nutno sestavit ve formě deformačních podmínek, což je úloha nauky o pružnosti a pevnosti. Příkladem tvarově určité, ale jedenkrát vnitřně staticky neurčité ($n = -1$) rovinné prutové soustavy je soustava znázorněná na obr. 10. V této prutové soustavě je zřejmě nadbytečný jeden z prutů.



Obr. 9.



Obr. 10.

Statické řešení rovinných prutových soustav

Cílem statického řešení rovinných prutových soustav je **vyšetření vnějších reakcí v uložení prutové soustavy a stanovení velikosti a smyslu sil přenášovaných jednotlivými pruty** při působení daných akčních sil. Prutové soustavy budeme řešit převážně analyticky.

Obecnou metodou statického řešení rovinných prutových soustav je **styčnicová metoda** (metoda rovnováhy styčniců). Podstata metody spočívá v uvolnění jednotlivých styčniců me-

chanického modelu prutové soustavy a v analytickém nebo grafickém řešení rovnováhy sil, které působí na každý uvolněný styčník. Při analytickém řešení předpokládáme, že všechny pruty mechanického modelu prutové soustavy jsou namáhány na tah a podle toho volíme směry všech neznámých sil přenášených pruty. V každém uvolněném styčníku prutové soustavy působí rovinná soustava sil o společném působišti, a proto pro každý uvolněný styčník napíšeme dvě složkové silové podmínky rovnováhy, tzv. styčníkové rovnovážné rovnice. Pro s styčníků mechanického modelu rovinné prutové soustavy dostáváme soustavu $2s$ lineárních algebraických rovnic pro $2s$ neznámých, která má až na výjimečné případy nenulový determinant, a tudíž je jednoznačně řešitelná. Protože podle (1) platí $2s = p + \sigma$, je mezi těmito $2s$ neznámými p sil přenášených pruty a σ vnějších reakcí. Postup při analytickém řešení prutových soustav styčníkovou metodou si ukážete na cvičení.

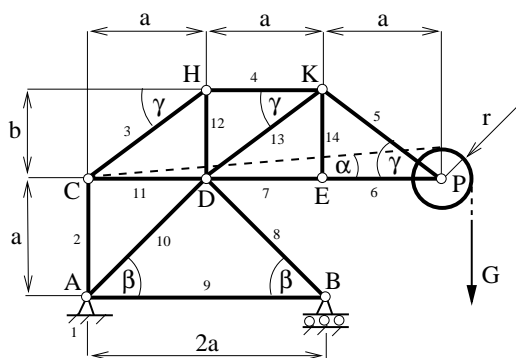
Chceme-li určit síly jen v některých prutech rovinné prutové soustavy, použijeme **průsečnou metodu**. Princip průsečné metody spočívá v následující úvaze. Je-li v rovnováze celá prutová soustava, musí být v rovnováze i její části vzniklé rozdělením soustavy myšleným řezem. To znamená, že v rovnováze musí být síly v přerušovaných prutech, akční síly a vnější reakce působící na každou oddělenou část prutové soustavy. Tyto síly tvoří obecnou rovinnou soustavu sil, pro kterou píšeme tři podmínky rovnováhy, z nichž alespoň jedna musí být momentová. Síly v přerušovaných prutech mohou tedy představovat právě tři neznámé veličiny. Z uvedeného plyne, že průsečnou metodu lze použít u prutových soustav, které můžeme ve zvoleném místě rozdělit myšleným řezem na dvě části přerušením tří prutů, které neprocházejí jedním bodem. Použití průsečné metody si rovněž ukážete na cvičení.

K uvedeným metodám analytického řešení prutových soustav lze poznamenat, že styčníková metoda je univerzální, vhodná pro řešení libovolné staticky určité prutové soustavy. Průsečnou metodu lze použít k rychlému výpočtu sil ve zvolených prutech nebo ke kontrole předchozího řešení tam, kde lze prutovou soustavu rozdělit **vhodným** myšleným řezem na dvě části.

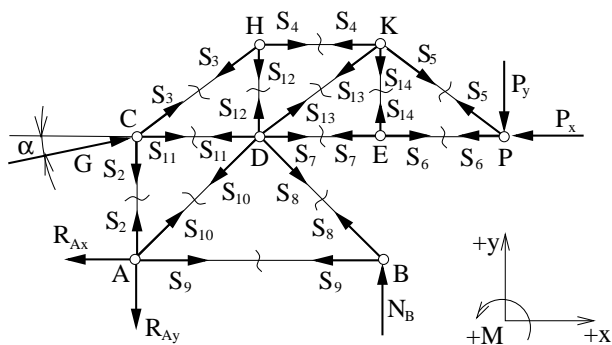
Příklad: Mechanický model rovinné prutové konstrukce jeřábu, obr. 11, je zatížen tíhou G břemene zavěšeného na laně, které je přehozeno přes kladku o poloměru r . Určete vnější reakce v uložení prutové konstrukce jeřábu a osově síly v jednotlivých prutech.

Dáno: $G = 400 \text{ N}$; $a = 1,5 \text{ m}$; $b = 0,9 \text{ m}$; $r = 0,3 \text{ m}$

Řešení: Označme jednotlivé styčníky prutové konstrukce jeřábu písmeny $A - P$ a očíslijme všechny pruty čísly 2 – 14 podle obr. 11. Základní rám značíme číslicí 1.

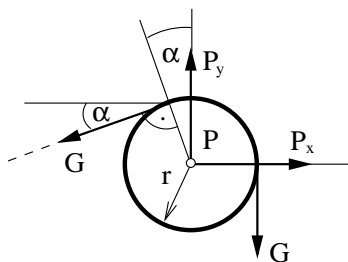


Obr. 11.



Obr. 12.

Vzhledem k tomu, že lano je uchyceno ke styčníku C , bude v tomto styčníku působit vnější tahová síla G , obr. 12, kterou je lano napínáno. Nezapomeňte proto na tuto sílu! Uvolněním kladky určíme velikosti složek P_x a P_y síly \vec{P} působící ve styčníku P , která vyjadřuje účinek prutové soustavy na kladku.



Napišeme dvě složkové silové podmínky rovnováhy do směřů os x a y

$$\sum_i F_{ix} = 0: P_x - G \cos \alpha = 0, \quad (3)$$

$$\sum_i F_{iy} = 0: P_y - G - G \sin \alpha = 0, \quad (4)$$

ze kterých plyne, že $P_x = G \cos \alpha$ a $P_y = G(1 + \sin \alpha)$. Všimněte si, že momentová podmínka rovnováhy, $rG - rG = 0$, napsaná nejuvhodněji k bodu P nepřináší v tomto případě samozřejmě nic nového. Je splněna automaticky. Pro zatím neurčený úhel α podle obr. 11 platí

$$\sin \alpha = \frac{r}{3a} \Rightarrow \alpha = \arcsin \left(\frac{r}{3a} \right). \quad (5)$$

Účinek síly \vec{P} kladky na prutovou konstrukci jeřábu je potom podle principu akce a reakce opačný, obr. 12. To znamená, že síla $-\vec{P}$ představuje výslednici sil v laně. Mechanický model prutové konstrukce jeřábu je tedy zatížen styčníkovými silami G , $P_x = G \cos \alpha$ a $P_y = G(1 + \sin \alpha)$ působícími ve styčnicích C a P podle obr. 12. Uvolněním prutové soustavy od základního rámu 1 získáme tři složky vnějších reakcí R_{Ax} , R_{Ay} a N_B , které zakreslíme do obr. 12. Vazba A je rotační a uložení prutové soustavy v bodě B považujeme za obecnou KD.

Dále zkontrolujeme statickou určitost zadané rovinné prutové soustavy. Dosazením do podmínky (1) dostáváme, že $n = 2 \cdot 8 - 13 - 3 = 0$, neboť v našem případě platí, že počet styčniců $s = 8$, počet prutů soustavy $p = 13$ a počet neznámých složek vnějších reakcí, které jsme dostali uvolněním prutové soustavy od rámu, je $\sigma = 3$. Prutová soustava má 0° volnosti, je tedy staticky a tvarově určitá a tudíž je staticky řešitelná. Tvarově určitá prutová konstrukce jeřábu představuje tzv. prutové těleso staticky určitě uložené k základnímu rámu. Počet stupňů volnosti rovinné prutové soustavy můžeme rovněž určit pomocí vztahu (2). Jeho aplikací opět zjistíme, že $n = 3(14 - 1) - 2(19 + 0 + 0) - 1 = 0$. Uvědomte si však, že ve styčníku A musíme počítat tři rotační KD (jednu pro spojení prutů 2 a 10, jednu pro připojení prutu 9 ke KD spojující pruty 2 a 10 a jednu pro připojení těchto dvou KD spojujících pruty 2, 10 a 9 k základnímu rámu 1), ve styčníku B musíme počítat jednu rotační KD, která spojuje pruty 8 a 9, a jednu obecnou KD, která připojuje rotační KD spojující pruty 8 a 9 k základnímu rámu. Podobně ve styčnicích C , H a E počítáme po dvou rotačních KD, ve styčníku D počítáme pět rotačních KD, ve styčníku K tři rotační KD a ve styčníku P počítáme jednu rotační KD.

Cílem statického řešení mechanického modelu rovinné prutové soustavy, obr. 12, je v souladu se zadáním vyšetřit vnější reakce ve vazbách A a B a určit osové síly v jednotlivých prutech. Použijeme styčníkovou metodu. Jednotlivé styčníky uvolníme přímo v obrázku mechanického modelu prutové konstrukce jeřábu s tím, že ve všech prutech předpokládáme tahové namáhání, obr. 12. Pro každý uvolněný styčník napíšeme dvě složkové silové podmínky rovnováhy do osy x a y .

\mathbf{x} je vektor neznámých vnějších reakcí a osových sil v prutech

$$\mathbf{x} = [R_{Ax}, R_{Ay}, N_B, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}]^T$$

a \mathbf{b} je vektor pravých stran

$$\mathbf{b} = [0, 0, 0, 0, -G \cos \alpha, -G \sin \alpha, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, P_x, P_y]^T.$$

Řádkovými úpravami se lze přesvědčit, že matice \mathbf{A} má hodnotu $h(\mathbf{A}) = 15$. To znamená, že soustava rovnic (23) má jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, které určíme pomocí výpočtového systému MATLAB.

Získané výsledky: $R_{Ax} = 0$ N, $R_{Ay} = 240$ N, $N_B = 640$ N, $S_2 = 880$ N, $S_3 = 1658,6$ N, $S_4 = 1422,2$ N, $S_5 = 829,3$ N, $S_6 = -1110,2$ N, $S_7 = -1110,2$ N, $S_8 = -905,1$ N, $S_9 = 640$ N, $S_{10} = -905,1$ N, $S_{11} = -1821,3$ N, $S_{12} = -853,3$ N, $S_{13} = -829,3$ N, kde $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 240$ N. Protože výpočtem vyšly osově síly v prutech $S_6, S_7, S_8, S_{10}, S_{11}, S_{12}$ a S_{13} záporně, je jejich skutečný smysl opačný než jsme předpokládali a namáhání těchto prutů je tudíž **tlakové**.

Kontrola řešení: Neznámé složky vnějších reakcí \vec{R}_A a \vec{N}_B ve vazbách A a B mechanického modelu rovinné prutové konstrukce jeřábu, obr. 11, představují tři neznámé veličiny (R_{Ax} , R_{Ay} a N_B), obr. 12, které můžeme také vypočítat z podmínek pro rovnováhu akčních sil a vnějších reakcí na uvolněném prutovém tělese od základního rámu 1. Podle obr. 12 můžeme pro obecnou rovinnou soustavu akčních sil (G, P_x, P_y) a neznámých složek vnějších reakcí (R_{Ax}, R_{Ay}, N_B) napsat tři podmínky rovnováhy – dvě složkové silové do směrů os x a y a jednu momentovou k bodu A

$$\sum_i F_{ix} = 0: -R_{Ax} - P_x + G \cos \alpha = 0 \quad (24)$$

$$\sum_i F_{iy} = 0: -R_{Ay} - P_y + N_B + G \sin \alpha = 0 \quad (25)$$

$$\sum_i M_{iA} = 0: 2aN_B - aG \cos \alpha + aP_x - 3aP_y = 0 \quad (26)$$

Lze se snadno přesvědčit, že rovnice (24) – (26) jsou lineární kombinací rovnic (6) – (14) a (16) – (21). Tyto rovnice tudíž nedávají žádnou novou informaci o zadané prutové soustavě, ale můžeme je použít **ke kontrole složek vnějších reakcí** vypočtených řešením soustavy rovnic (23). Pokud vyřešíme soustavu rovnic (24) – (26) dostaneme pro neznámé složky vnějších reakcí:

$$R_{Ax} = G \cos \alpha - P_x = 0 \text{ N} \quad \dots \text{ plyne z podmínky (24) po dosazení za } P_x,$$

$$N_B = \frac{1}{2}(G \cos \alpha - P_x + 3P_y) = \frac{3}{2}G(1 + \sin \alpha) = 640 \text{ N} \quad \dots \text{ plyne z podmínky (26) po dosazení za } P_x \text{ a } P_y,$$

$$R_{Ay} = G \sin \alpha - P_y + N_B = \frac{1}{2}G(1 + 3 \sin \alpha) = 240 \text{ N} \quad \dots \text{ plyne z podmínky (25) po dosazení za } P_y \text{ a } N_B.$$

Vidíme, že jsme dostali stejné hodnoty jako řešením soustavy rovnic (23).