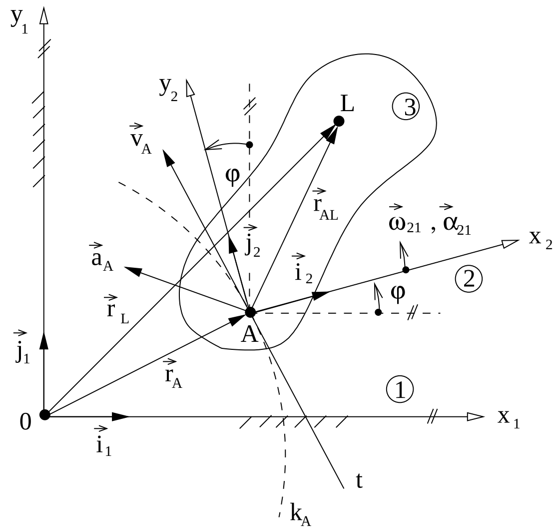
Materiály ke 4. přednášce z předmětu KME/MECHB

Zpracoval: **Ing. Jan Vimmr, Ph.D.**

Současné pohyby těles v rovině, obecný rozklad obecného rovinného pohybu

Předpokládejme, že těleso 3 se pohybuje v základním prostoru 0, x_1, y_1, obr. 1.



Obr. 1.

Obecný rovinný pohyb tělesa 3 vůči rámu 1 rozložíme obecným rozkladem na **unášivý pohyb neposuvný** (v našem případě obecný rovinný) prostoru 2 vůči rámu 1 a na **relativní pohyb** tělesa 3 vůči prostoru 2

$$31 = 32 + 21\,. \tag{1}$$

Podle obr. 1 platí

$$\vec{r}_L(t) = \vec{r}_A(t) \;\; + \underbrace{\vec{r}_{AL}(t)}_{\text{v prostoru 2}} \tag{2}$$

Při odvozování závislostí mezi kinematickými veličinami současných pohybů bodů a těles má významnou roli derivování vektorů v různých prostorech.

Věta: Derivace vektorové veličiny podle času v základním prostoru 1 je rovna součtu její derivace v pohyblivém prostoru 2 a vektorového součinu úhlové rychlosti tohoto prostoru a derivované veličiny, tedy

$$[\dot{\vec{r}}]_1 = [\dot{\vec{r}}]_2 + \vec{\omega}_{21} \times \vec{r}\,. \tag{3}$$

Důkaz: Nechť $\vec{r}(t)$ je vektorová veličina, kterou v pohybujícím se prostoru 2 s jednotkovými vektory $\vec{i}_2$, $\vec{j}_2$, $\vec{k}_2$ vyjádříme

$$\vec{r}(t) = r_{x_2}\,\vec{i}_2 + r_{y_2}\,\vec{j}_2 + r_{z_2}\,\vec{k}_2\,. \tag{4}$$

Derivací vztahu (4) podle času v prostoru 1 dostáváme

$$\begin{aligned} [\,\dot{\vec{r}}(t)\,]_1 &= \dot{r}_{x_2}\,\vec{i}_2 + r_{x_2}\,\dot{\vec{i}}_2 + \dot{r}_{y_2}\,\vec{j}_2 + r_{y_2}\,\dot{\vec{j}}_2 + \dot{r}_{z_2}\,\vec{k}_2 + r_{z_2}\,\dot{\vec{k}}_2 = \\ &= \underbrace{\dot{r}_{x_2}\,\vec{i}_2 + \dot{r}_{y_2}\,\vec{j}_2 + \dot{r}_{z_2}\,\vec{k}_2}_{} + r_{x_2}\,\dot{\vec{i}}_2 + r_{y_2}\,\dot{\vec{j}}_2 + r_{z_2}\,\dot{\vec{k}}_2 = \\ &= \qquad\quad [\dot{\vec{r}}]_2 \qquad\quad + r_{x_2}\,\dot{\vec{i}}_2 + r_{y_2}\,\dot{\vec{j}}_2 + r_{z_2}\,\dot{\vec{k}}_2\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Derivace jednotkových vektorů podle času mají význam rychlostí jejich koncových bodů, tedy

$$\dot{\vec{i}}_2 = \vec{\omega}_{21} \times \vec{i}_2\,, \qquad \dot{\vec{j}}_2 = \vec{\omega}_{21} \times \vec{j}_2\,, \qquad \dot{\vec{k}}_2 = \vec{\omega}_{21} \times \vec{k}_2\,. \tag{6}$$

Dosazením vztahů (6) do rovnice (5) získáme

$$\begin{aligned} [\dot{\vec{r}}]_1 &= [\dot{\vec{r}}]_2 + r_{x_2}\,\vec{\omega}_{21} \times \vec{i}_2 + r_{y_2}\,\vec{\omega}_{21} \times \vec{j}_2 + r_{z_2}\,\vec{\omega}_{21} \times \vec{k}_2 = \\ &= [\dot{\vec{r}}]_2 + \vec{\omega}_{21} \times (r_{x_2}\,\vec{i}_2 + r_{y_2}\,\vec{j}_2 + r_{z_2}\,\vec{k}_2)\,, \end{aligned} \tag{7}$$

odkud po dosazení ze vztahu (4) konečně plyne rovnost, kterou jsme měli dokázat

$$[\dot{\vec{r}}]_1 = [\dot{\vec{r}}]_2 + \vec{\omega}_{21} \times \vec{r} \; .$$

■

Rychlost bodu L tělesa 3 získáme derivací vztahu (2) podle času (derivaci provádíme vždy v základním prostoru 1):

$$\vec{v}_L = [\,\dot{\vec{r}}_L\,]_1 = [\,\dot{\vec{r}}_A\,]_1 + [\,\dot{\vec{r}}_{AL}\,]_1 = \vec{v}_A + [\,\dot{\vec{r}}_{AL}\,]_2 + \vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_{AL} \;,$$

kde bylo použito vztahu (3) ve smyslu výše dokázané věty. Pro rychlost bodu L tělesa 3 tedy platí

$$\vec{v}_L = \underbrace{\left(\vec{v}_A + \vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_{AL}\right)}_{\vec{v}_{21}\text{...viz zákl. rozklad}} \quad + \quad \underbrace{[\,\dot{\vec{r}}_{AL}\,]_2}_{\vec{v}_{32}\text{...v prostoru 2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{v}_L \equiv \vec{v}_{31} = \vec{v}_{32} + \vec{v}_{21} \; . \tag{8}$$

Rychlosti skládáme podle zákona rovnoběžníka, viz vztah (8).

Zrychlení bodu L tělesa 3 získáme derivací vztahu (8) podle času (derivaci provádíme opět v základním prostoru 1):

$$\begin{aligned}
\vec{a}_L &= [\,\dot{\vec{v}}_L\,]_1 = [\,\dot{\vec{v}}_A\,]_1 + \dot{\vec{\omega}}_{21} \times \vec{r}_{AL} + \vec{\omega}_{21} \times [\,\dot{\vec{r}}_{AL}\,]_1 + [\,\dot{\vec{v}}_{32}\,]_1 = \\
&= \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{21} \times \vec{r}_{AL} + \vec{\omega}_{21} \times \left([\,\dot{\vec{r}}_{AL}\,]_2 + \vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_{AL}\right) + [\,\dot{\vec{v}}_{32}\,]_2 + \vec{\omega}_{21} \times \vec{v}_{32} = \\
&= \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{21} \times \vec{r}_{AL} + \vec{\omega}_{21} \times \underbrace{[\,\dot{\vec{r}}_{AL}\,]_2}_{\vec{v}_{32}} + \underbrace{\vec{\omega}_{21} \times (\vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_{AL})}_{-\vec{r}_{AL}\,\omega_{21}^2} + \underbrace{[\,\dot{\vec{v}}_{32}\,]_2}_{\vec{a}_{32}} + \vec{\omega}_{21} \times \vec{v}_{32} \;,
\end{aligned}$$

kde bylo použito vztahu (3) ve smyslu výše dokázané věty. Pro zrychlení bodu L tělesa 3 potom platí

$$\vec{a}_L = \underbrace{\vec{a}_A + \vec{\alpha}_{21} \times \vec{r}_{AL} - \vec{r}_{AL}\,\omega_{21}^2}_{\vec{a}_{21}\text{...viz zákl. rozklad}} + \vec{a}_{32} + \underbrace{2\,\vec{\omega}_{21} \times \vec{v}_{32}}_{\vec{a}_c} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a}_L \equiv \vec{a}_{31} = \vec{a}_{32} + \vec{a}_{21} + \vec{a}_c \; . \tag{9}$$

Zrychlení se neskládá podle zákona rovnoběžníka, viz vztah (9)! Coriolisovo zrychlení $\vec{a}_c$ je definováno podle (9) vztahem

$$\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega}_{21} \times \vec{v}_{32} \;, \qquad \text{resp.} \qquad \vec{a}_c = 2\,\vec{\omega}_{\text{unáš}} \times \vec{v}_{\text{rel}} \; . \tag{10}$$

Protože při pohybu tělesa 3 v rovině je vždy $\vec{\omega}_{21} \perp \vec{v}_{32}$, můžeme pro velikost Coriolisova zrychlení psát

$$a_c = 2\,\omega_{21}\,v_{32} \; . \tag{11}$$

Směr Coriolisova zrychlení určíme:

- buď podle pravidla pravé ruky
- nebo vektor rychlosti $\vec{v}_{32}$ otočíme o $\frac{\pi}{2}$ ve smyslu $\vec{\omega}_{21}$.