Materiály ke 2. přednášce z předmětu KME/MECHB

Zpracoval: **Ing. Jan Vimmr, Ph.D.**

Křivočarý pohyb hmotného bodu v rovině

Pokud je trajektorií hmotného bodu rovinná křivka, hovoříme o křivočarém pohybu hmotného bodu v rovině. Nejprve se zabývejme **pohybem hmotného bodu** L **po kružnici** o poloměru R.

Pohyb hmotného bodu po kružnici

Zavedeme pravotočivý kartézský souřadnicový systém Oxy v rovině tak, že jeho počátek O ztotožníme se středem kružnice k o poloměru R. **Poloha hmotného bodu** L, který se pohybuje po této kružnici, je v obecném čase t určena **polohovým vektorem** $\vec{r}_L(t)$, pro který podle obr. 1 platí

$$\vec{r}_L(t) = \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{bmatrix} = R\underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}}_{\vec{n}} = R\,\vec{n}\,, \qquad (1)$$

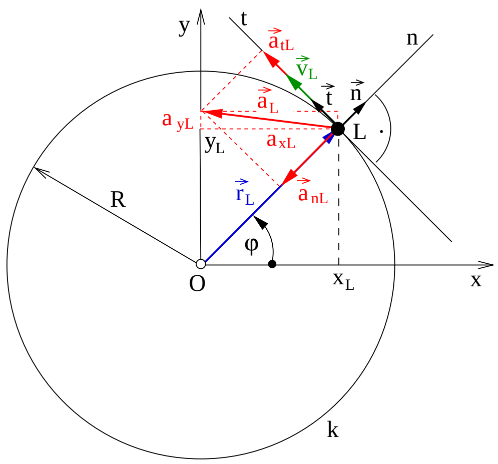
kde velikost polohového vektoru $|\vec{r}_L|$ je samozřejmě rovna poloměru R kružnice, t.j. $|\vec{r}_L| \equiv R$, protože $\vec{n} = [\cos\varphi, \sin\varphi]^T$ je **jednotkový vektor vnější normály** ke kružnici k.

Zaveďme dále **úhlovou rychlost** ω $[\mathrm{rad\,s^{-1}} \equiv \mathrm{rad/s}]$, která popisuje rychlost změny úhlu natočení φ, vztahem

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\varphi}$$

a **úhlové zrychlení** α $[\mathrm{rad\,s^{-2}} \equiv \mathrm{rad/s^2}]$, které popisuje rychlost změny úhlové rychlosti ω, vztahem

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\omega} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \equiv \ddot{\varphi}\,.$$



Obr. 1.

Rychlost bodu L pohybujícího se po kružnici k dostaneme derivací polohového vektoru $\vec{r}_L(t)$ vyjádřeného rovnicí (1) podle času t

$$\vec{v}_L = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_L(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}x_L}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y_L}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} v_{xL} \\ v_{yL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R\sin\varphi\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \\ R\cos\varphi\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = R\,\omega\underbrace{\begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}}_{\vec{t}} = v_L\,\vec{t}\,, \qquad (2)$$

kde pro velikost vektoru rychlosti $|\vec{v}_L|$ bodu L platí $|\vec{v}_L| \equiv v_L = \sqrt{v_{xL}^2 + v_{yL}^2} = R\,\omega$, neboť $\vec{t} = [-\sin\varphi, \cos\varphi]^T$ je **jednotkový vektor tečny** ke kružnici k. Snadno totiž ověříme, že vektor $\vec{t}$ je kolmý na jednotkový vektor normály $\vec{n}$, neboť $\vec{t}\cdot\vec{n} = -\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi = 0$, což je podmínka kolmosti dvou vektorů. (Z matematiky víte, že **skalární součin dvou na**

sebe kolmých vektorů je roven nule). Uvědomte si dále, že ze vztahu (2) tedy vyplývá, že **vektor rychlosti** $\vec{v}_L$ bodu L **leží** v každém časovém okamžiku **na tečně ke kružnici** k, obr. 1.

Zrychlení bodu L pohybujícího se po kružnici k získáme derivací vektoru rychlosti $\vec{v}_L$ vyjádřeného rovnicí (2) podle času t

$$\vec{a}_L = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_L}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}v_{xL}}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}v_{yL}}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{xL} \\ a_{yL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R\cos\varphi\,(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t})^2 - R\sin\varphi\,\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \\ -R\sin\varphi\,(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t})^2 + R\cos\varphi\,\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \end{bmatrix} =$$

$$= -R\,\omega^2 \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}}_{\vec{n}} + R\,\alpha \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}}_{\vec{t}} = -a_{nL}\,\vec{n} + a_{tL}\,\vec{t}, \tag{3}$$

odkud je vidět, že vektor zrychlení $\vec{a}_L$ bodu L je dán součtem dvou vektorů

$$\vec{a}_L = \vec{a}_{tL} + \vec{a}_{nL}\,. \tag{4}$$

Vektor $\vec{a}_{tL} = a_{tL}\,\vec{t} \equiv R\,\alpha\,\vec{t}$ představuje tzv. **tečné zrychlení**, které v každém časovém okamžiku **leží na tečně ke kružnici** k a pro jeho velikost platí, že $|\vec{a}_{tL}| = \underline{a_{tL} = R\,\alpha}$. Vektor $\vec{a}_{nL} = -a_{nL}\,\vec{n} \equiv -R\,\omega^2\,\vec{n}$ představuje tzv. **normálové zrychlení**, které v každém časovém okamžiku **leží na normále ke kružnici** k a vždy směřuje do středu O kružnice k, obr. 1. Směr vektoru normálového zrychlení je díky znaménku mínus opačný než je orientace jednotkového vektoru vnější normály $\vec{n}$, resp. polohového vektoru $\vec{r}_L$ bodu L. Proto normálovému zrychlení často říkáme **dostředivé zrychlení** a pro jeho velikost platí, že $|\vec{a}_{nL}| = \underline{a_{nL} = R\,\omega^2}$. Vektor výsledného zrychlení $\vec{a}_L$ bodu L splňuje vztah (4) a je zakreslen v obr. 1. Protože vektory tečného a normálového zrychlení jsou na sebe kolmé, platí pro velikost výsledného zrychlení $|\vec{a}_L|$ bodu L podle obr. 1

$$|\vec{a}_L| \equiv a_L = \sqrt{a_{tL}^2 + a_{nL}^2} \equiv \sqrt{a_{xL}^2 + a_{yL}^2} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}\,. \tag{5}$$

Shrnutí:

- Vektor rychlosti $\vec{v}_L$ bodu L leží v každém časovém okamžiku na tečně ke kružnici k a pro jeho velikost platí, že $\underline{v_L = R\,\omega}$, obr. 1.
- Vektor výsledného zrychlení $\vec{a}_L$ bodu L je dán součtem vektoru tečného zrychlení $\vec{a}_{tL}$ a vektoru dostředivého zrychlení $\vec{a}_{nL}$ podle vztahu (4), obr. 1. Pro jeho velikost platí vztah (5).
- Vektor tečného zrychlení bodu L leží vždy na tečně ke kružnici k a pro jeho velikost platí, že $\underline{a_{tL} = \frac{\mathrm{d}v_L}{\mathrm{d}t} = R\,\alpha}$, obr. 1.
- Vektor dostředivého zrychlení bodu L leží vždy na normále ke kružnici k a pro jeho velikost platí, že $\underline{a_{nL} = R\,\omega^2 \equiv \frac{v_L^2}{R}}$, obr. 1.

Poznámka: V případě **rovnoměrného pohybu** hmotného bodu L po kružnici k je obvodová rychlost $v_L = R\,\omega = \mathrm{konst.}$ Z toho vyplývá, že úhlová rychlost $\omega = \mathrm{konst}$ a tudíž úhlové zrychlení $\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 0$. Potom **tečné zrychlení** a_{tL} bodu L **je nulové** ($a_{tL} = \frac{\mathrm{d}v_L}{\mathrm{d}t} = R\,\alpha = 0$) a **výsledné zrychlení** a_L bodu L **je dáno pouze hodnotou dostředivého zrychlení** $a_{nL} = R\,\omega^2 = \frac{v_L^2}{R}$.

Uvědomte si tedy, že v případě rovnoměrného pohybu bodu L po kružnici k není výsledné zrychlení a_L bodu L nulové jako tomu bylo v případě rovnoměrného přímočarého pohybu!