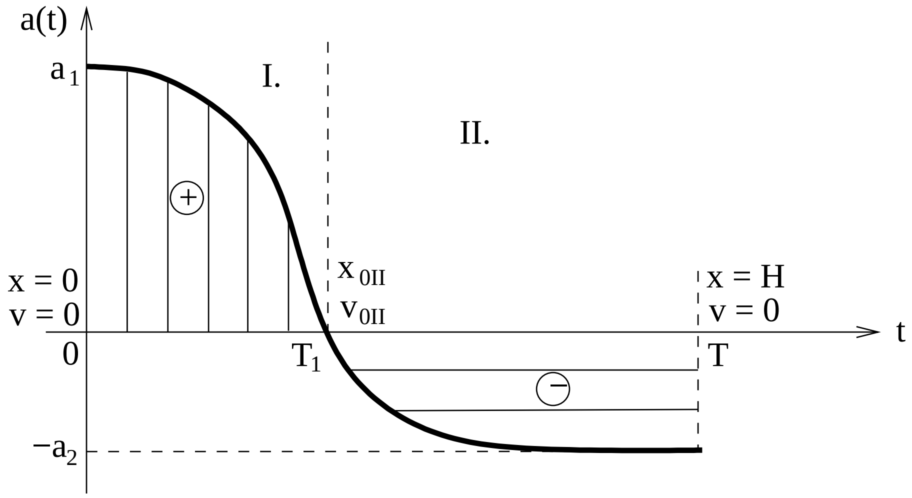
Materiály k 1. přednášce z předmětu KME/MECHB

Zpracoval: **Ing. Jan Vimmr, Ph.D.**

Vratné pohyby - technické aplikace

Příklad 4.: Řešte **nesouměrný vratný pohyb s kosinovým průběhem zrychlení** podle obrázku, je-li dána doba zdvihu T, zdvih H a doba zdvihu prvního úseku T_1.

Dáno: T; H; T_1



Řešení: Ze zadaného průběhu zrychlení je zřejmé, že nelze jeho průběh popsat jedinou funkcí na celém intervalu $< 0, T >$, neboť $|a_1| \neq |a_2|$. Vyšetřovaný vratný pohyb budeme proto řešit ve dvou úsecích. Na prvním úseku, tj. pro $t \in < 0, T_1 >$, můžeme časovou závislost zrychlení popsat funkcí

$$a_I(t) = a_1 \cos k_1 t,$$

která splňuje okrajové podmínky

$$a_I(0) = a_1, \quad a_I(T_1) = 0 = a_1 \cos k_1 T_1 \Rightarrow \cos k_1 T_1 = 0, \text{ protože } a_1 \neq 0,$$

což znamená, že

$$k_1 T_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow k_1 = \frac{\pi}{2T_1}.$$

Konkrétní funkce pro zrychlení na prvním úseku má tedy tvar

$$a_I(t) = a_1 \cos k_1 t, \quad \text{kde } k_1 = \frac{\pi}{2T_1}. \tag{1}$$

Z toho potom dostaneme

$$a_I(t) = \frac{dv_I}{dt} \Rightarrow \int_0^{v_I} dv_I = \int_0^t a_1 \cos k_1 t \, dt,$$

a tedy

$$v_I(t) = \frac{a_1}{k_1} \left[\sin k_1 t\right]_0^t \Rightarrow v_I(t) = \frac{a_1}{k_1} \sin k_1 t. \tag{2}$$

Dále platí

$$v_I(t) = \frac{dx_I}{dt} \Rightarrow \int_0^{x_I} dx_I = \int_0^t \frac{a_1}{k_1} \sin k_1 t \, dt,$$

z čehož získáme vztah pro $x_I(t)$ v prvním úseku

$$x_I(t) = \frac{a_1}{k_1^2} \left[-\cos k_1 t\right]_0^t \Rightarrow x_I(t) = \frac{a_1}{k_1^2}(1 - \cos k_1 t). \tag{3}$$

Na druhém úseku, tj. pro $t \in < T_1, T >$, lze popsat průběh zrychlení funkcí

$$a_{II}(t) = -a_2 \sin k_2(t - T_1)$$

s okrajovými podmínkami

$$a_{II}(T_1) = 0, \quad a_{II}(T) = -a_2 = -a_2 \sin k_2(T - T_1) \Rightarrow \sin k_2(T - T_1) = 1,$$

což je splněno, když

$$k_2(T - T_1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow k_2 = \frac{\pi}{2(T - T_1)}.$$

Funkce zrychlení na druhém úseku má tedy tvar

$$a_{II}(t) = -a_2 \sin k_2(t - T_1), \quad \text{kde}\, k_2 = \frac{\pi}{2(T - T_1)}. \tag{4}$$

Stejným postupem jako v prvním úseku potom dostáváme

$$a_{II}(t) = \frac{dv_{II}}{dt} \Rightarrow \int_{v_{0II}}^{v_{II}} dv_{II} = \int_{T_1}^{t} -a_2 \sin k_2(t - T_1)dt$$

a dále

$$v_{II}(t) = v_{0II} - \frac{a_2}{k_2}\left[-\cos k_2(t - T_1)\right]_{T_1}^{t} = v_{0II} - \frac{a_2}{k_2}\left[1 - \cos k_2(t - T_1)\right], \tag{5}$$

kde v_{0II} je počáteční rychlost na úseku II. Pro získání závislosti $x_{II}(t)$ nyní opět využijeme časovou derivaci rychlosti v_{II}

$$v_{II}(t) = \frac{dx_{II}}{dt} \Rightarrow \int_{x_{0II}}^{x_{II}} dx_{II} = \int_{T_1}^{t} \left\{ v_{0II} - \frac{a_2}{k_2}\left[1 - \cos k_2(t - T_1)\right] \right\} dt,$$

z čehož plyne

$$x_{II}(t) = x_{0II} + v_{0II}(t - T_1) - \frac{a_2}{k_2}(t - T_1) + \frac{a_2}{k_2^2}\left[\sin k_2(t - T_1)\right]_{T_1}^{t}$$

a konečně

$$x_{II}(t) = x_{0II} + v_{0II}(t - T_1) - \frac{a_2}{k_2}\left[(t - T_1) - \frac{1}{k_2}\sin k_2(t - T_1)\right], \tag{6}$$

kde x_{0II} je počáteční zdvih v úseku II. Vidíme, že ve vztazích (2), (3), (5), (6) se vyskytují 4 neznámé a_1, a_2, v_{0II} a x_{0II}. Tyto neznámé určíme z okrajových podmínek vratného pohybu

$$x_I(T_1) = x_{0II} = \frac{a_1}{k_1^2}(1 - \cos k_1 T_1) = \frac{a_1}{\pi^2} 4T_1^2 (1 - \cos\frac{\pi}{2}) \Rightarrow x_{0II} = \frac{4T_1^2}{\pi^2} a_1, \tag{7}$$

$$v_I(T_1) = v_{0II} = \frac{a_1}{k_1}\sin k_1 T_1 = \frac{a_1}{\pi} 2T_1 \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow v_{0II} = \frac{2T_1}{\pi} a_1, \tag{8}$$

$$x_{II}(T) = H = \frac{4T_1^2}{\pi^2} a_1 + \frac{2T_1}{\pi} a_1 (T - T_1) - \frac{a_2}{\pi} 2(T - T_1)\left[(T - T_1) - \frac{2(T - T_1)}{\pi}\right], \tag{9}$$

$$v_{II}(T) = 0 = \frac{2T_1}{\pi} a_1 - \frac{a_2}{\pi} 2(T - T_1)\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right).$$

Z toho plyne

$$\frac{2T_1}{\pi} a_1 - \frac{a_2}{\pi} 2(T - T_1) = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 \frac{T - T_1}{T_1}. \tag{10}$$

Vztah (10) nyní dosadíme do rovnice (9)

$$H = \frac{4T_1^2}{\pi^2} a_2 \frac{T - T_1}{T_1} + \frac{2T_1}{\pi} a_2 \frac{(T - T_1)^2}{T_1} - \frac{2a_2}{\pi}(T - T_1)^2 + \frac{a_2}{\pi^2} 4(T - T_1)^2$$

a upravíme na

$$H = \frac{4a_2}{\pi^2}(T_1 + T - T_1)(T - T_1) = \frac{4a_2}{\pi^2}T(T - T_1).$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že

$$a_2 = \frac{\pi^2 H}{4T(T - T_1)}, \tag{11}$$

což dosadíme do vztahu (10) a upravíme na

$$a_1 = \frac{\pi^2 H}{4TT_1}. \tag{12}$$

Vztah (12) pak dosadíme do (7), resp. (8), a dostáváme

$$x_{0II} = \frac{4T_1^2}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2 H}{4TT_1} \Rightarrow x_{0II} = \frac{T_1}{T}H, \tag{13}$$

resp.

$$v_{0II} = \frac{2T_1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2 H}{4TT_1} \Rightarrow v_{0II} = \frac{\pi H}{2T}. \tag{14}$$

Vztahy (11), (12), (13) a (14) nyní dosadíme do (2), (3), (5), (6) a tím získáme konečnou podobu hledaných vztahů. Na prvním úseku, tj. pro $t \in < 0, T_1 >$ bude

$$v_I(t) = \frac{\pi^2 H}{4TT_1} \cdot \frac{2T_1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2T_1}t \Rightarrow v_I(t) = \frac{H\pi}{2T} \sin \frac{\pi}{2T_1}t,$$

$$x_I(t) = \frac{\pi^2 H}{4TT_1} \cdot \frac{4T_1^2}{\pi^2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2T_1}t\right) \Rightarrow x_I(t) = \frac{HT_1}{T} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2T_1}t\right).$$

Na druhém úseku, tj. pro $t \in < T_1, T >$, potom máme

$$v_{II}(t) = \frac{\pi H}{2T} - \frac{\pi^2 H}{4T(T - T_1)} \cdot \frac{2(T - T_1)}{\pi} \left[1 - \cos \frac{\pi(t - T_1)}{2(T - T_1)}\right]$$

a tedy

$$v_{II}(t) = \frac{\pi H}{2T} \cos \left(\frac{\pi}{2(T - T_1)}(t - T_1)\right). \tag{15}$$

Pro $x_{II}(t)$ bude platit

$$x_{II}(t) = \frac{HT_1}{T} + \frac{\pi H}{2T}(t - T_1) - \frac{\pi^2 H}{4T(T - 1)} \cdot \frac{2(T - T_1)}{\pi} \left[t - T_1 - \frac{1}{k_2} \sin k_2(t - T_1)\right],$$

což upravíme na

$$x_{II}(t) = \frac{T_1}{T}H + \frac{\pi H}{2T} \cdot \frac{2(T - T_1)}{\pi} \sin \frac{\pi(t - T_1)}{2(T - T_1)}$$

a konečně

$$x_{II}(t) = \frac{T_1}{T}H + \frac{T - T_1}{T}H \sin \left(\frac{\pi(t - T_1)}{2(T - T_1)}\right). \tag{16}$$