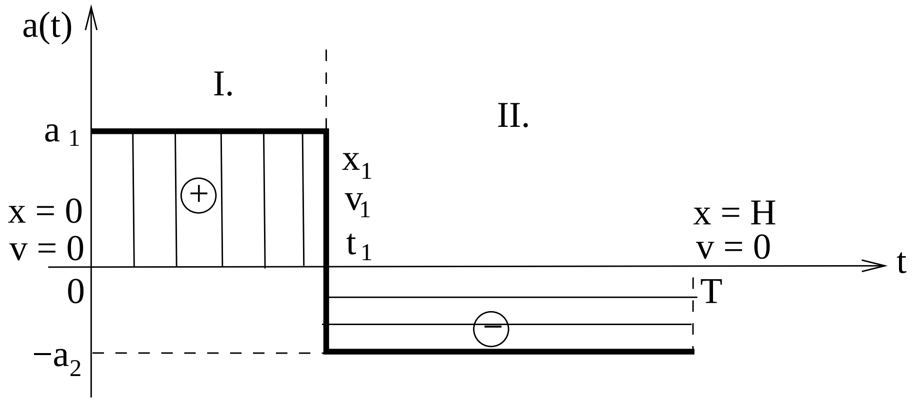
Materiály k 1. přednášce z předmětu KME/MECHB

Zpracoval: **Ing. Jan Vimmr, Ph.D.**

Vratné pohyby - technické aplikace

Příklad 3.: Řešte **nesouměrný vratný pohyb se zadaným konstantním průběhem zrychlení** podle obrázku, je-li dána doba zdvihu T, zdvih H a poměr $\lambda = a_1/a_2$.

Dáno: T; H; λ



Řešení: Ze zadaného průběhu zrychlení je zřejmé, že ho nelze popsat jedinou funkcí na celém intervalu $< 0, T >$, a proto tento pohyb budeme řešit na dvou úsecích. V prvním úseku, tj. pro $t \in < 0, t_1 >$, platí pro zrychlení vztah $a_I = a_1$. Z toho potom dostáváme

$$a_1 = \frac{dv_I}{dt} \Rightarrow \int_0^{v_I} dv = \int_0^t a_1 dt \Rightarrow v_I(t) = a_1 t. \tag{1}$$

Vztah pro $x_I(t)$ vyjádříme následovně

$$v_I = \frac{dx_I}{dt} \Rightarrow \int_0^{x_I} dx = \int_0^t a_1 t\, dt \Rightarrow x_I(t) = \frac{1}{2} a_1 t^2. \tag{2}$$

Pokud dále vezmeme v úvahu okrajové podmínky na konci prvního časového intervalu, můžeme psát

$$v_I(t_1) = v_1 = a_1 t_1, \quad x_I(t_1) = x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2. \tag{3}$$

Nyní provedeme stejný postup i na druhém časovém úseku, tj. pro $t \in < t_1, T >$, kde pro zrychlení platí $a_{II} = -a_2$. Tím dostáváme

$$-a_2 = \frac{dv_{II}}{dt} \Rightarrow \int_{v_1}^{v_{II}} dv = \int_{t_1}^t -a_2 dt \Rightarrow v_{II}(t) = v_1 - a_2(t - t_1). \tag{4}$$

Dále platí, že

$$v_{II} = \frac{dx_{II}}{dt} \Rightarrow \int_{x_1}^{x_{II}} dx = \int_{t_1}^t (v_1 - a_2(t - t_1))dt = \int_{t_1}^t v_1 dt - \int_{t_1}^t a_2 t\, dt + \int_{t_1}^t a_2 t_1 dt \tag{5}$$

a po integraci získáváme vztah

$$x_{II}(t) = x_1 + v_1(t - t_1) - \frac{a_2}{2}(t^2 - t_1^2) + a_2 t_1 (t - t_1). \tag{6}$$

Vidíme, že v rovnicích (1), (2), (4) a (6) vystupují dosud neznámé hodnoty a_1, a_2 a t_1. Tyto hodnoty nyní dopočteme z okrajových podmínek. Uvážíme-li okrajové podmínky na konci druhého časového intervalu, lze psát

$$v_{II}(T) = 0 = v_1 - a_2(T - t_1) \Rightarrow v_1 = a_2(T - t_1) \Rightarrow a_1 t_1 = a_2(T - t_1), \tag{7}$$

$$x_{II}(T) = H = x_1 + v_1(T - t_1) - \frac{a_2}{T^2 - t_1^2} + a_2 t_1 (T - t_1),$$

kam můžeme dosadit z (3) a dalšími úpravami získáme

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + a_1 t_1 T - a_1 t_1^2 - \frac{a_2}{2}T^2 + \frac{a_2}{2}t_1^2 + a_2 t_1 T - a_2 t_1^2 = \\ &= -\frac{1}{2}a_1 t_1^2 + a_1 t_1 T - \frac{1}{2}a_2 t_1^2 - \frac{a_2}{2}T^2 + a_2 t_1 T = \\ &= -\frac{1}{2}t_1^2(a_1 + a_2) + t_1 T(a_1 + a_2) - \frac{a_2}{2}T^2, \end{aligned}$$

odkud

$$H = (a_1 + a_2)t_1(T - \frac{t_1}{2}) - \frac{a_2}{2}T^2. \tag{8}$$

Pokud dále vezmeme v úvahu vztah

$$a_1 = \lambda a_2, \tag{9}$$

dostáváme soustavu 3 rovnic (7), (8) a (9) pro 3 neznámé a_1, a_2 a t_1. Rovnici (9) dosadíme do rovnice (7) a vyjádříme t_1

$$\lambda a_2 t_1 = a_2(T - t_1) = a_2 T - a_2 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{T}{\lambda + 1}. \tag{10}$$

Hodnotu t_1 společně s rovnicí (9) nyní dosadíme do rovnice (8)

$$\begin{aligned} H &= (a_2 + \lambda a_2)\frac{T}{\lambda + 1}\left(T - \frac{T}{2(\lambda + 1)}\right) - \frac{a_2}{2}T^2 = a_2(\lambda + 1)\frac{T}{\lambda + 1}\left(\frac{2T(\lambda + 1) - T}{2(\lambda + 1)}\right) - \\ &- \frac{a_2}{2}T^2 = T^2 a_2 \frac{2(\lambda + 1) - 1}{2(\lambda + 1)} - \frac{a_2}{2}T^2 = \frac{a_2 T^2}{2}\left(\frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1} - 1\right) = \\ &= \frac{a_2 T^2}{2}\left(\frac{2\lambda + 1 - \lambda - 1}{\lambda + 1}\right) = \frac{a_2 T^2}{2}\frac{\lambda}{\lambda + 1} \end{aligned}$$

a konečně získáváme

$$a_2 = \frac{2H(\lambda + 1)}{\lambda T^2}. \tag{11}$$

Tím jsme si vyjádřili hodnoty a_1, a_2 a t_1 a jejich dosazením do vztahů (1), (2), (4) a (6) získáme konečné vztahy pro $v_I(t)$, $x_I(t)$, $v_{II}(t)$ a $x_{II}(t)$.