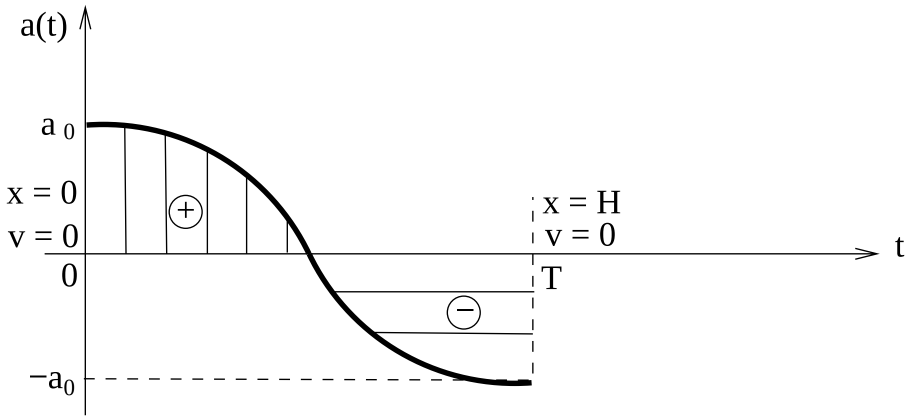
Materiály k 1. přednášce z předmětu KME/MECHB

Zpracoval: **Ing. Jan Vimmr, Ph.D.**

Vratné pohyby - technické aplikace

Příklad 2.: Řešte **souměrný vratný pohyb s kosinovým průběhem zrychlení** podle obrázku, je-li dána doba zdvihu T a zdvih H.

Dáno: T; H



Řešení: Předepsaný průběh zrychlení $a(t)$ je možné na celém časovém intervalu $< 0, T >$ popsat jedinou funkcí ve tvaru

$$a(t) = A\cos kt, \tag{1}$$

pro kterou platí okrajové podmínky

$$a(0) = a_0 = A, \quad a(T) = -a_0 = a_0\cos kT \Rightarrow \cos kT = -1 \Leftrightarrow kT = \pi \Rightarrow k = \frac{\pi}{T}.$$

Po dosazení do (1) dostáváme vztah

$$a(t) = a_0\cos kt, \quad \text{kde}\, k = \frac{\pi}{T}.$$

Hledané závislosti řešíme přímo, a to následovně:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_0^v dv = \int_0^t a_0\cos kt\, dt,$$

z čehož plyne

$$v(t) = a_0\frac{1}{k}\left[\sin kt\right]_0^t \Rightarrow v(t) = \frac{a_0}{k}\sin kt. \tag{2}$$

Závislost $x(t)$ dostaneme postupem

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \frac{a_0}{k}\sin kt\, dt \Rightarrow x(t) = \frac{a_0}{k^2}\left[-\cos kt\right]_0^t,$$

a odtud

$$x(t) = \frac{a_0}{k^2}\left(-\cos kt + 1\right) \Rightarrow x(t) = \frac{a_0}{k^2}\left(1 - \cos kt\right). \tag{3}$$

Rovnice (2) a (3) obsahují neznámou a_0, kterou určíme z okrajových podmínek vratného pohybu:

$$x(T) = H = \frac{a_0}{k^2}(1 - \cos kT) = a_0\frac{T^2}{\pi^2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{T}T\right) = 2\frac{a_0 T^2}{\pi^2},$$

čímž dostáváme konstantu $a_0 = \frac{\pi^2 H}{2T^2}$ (uvědomte si, že to je maximální hodnota zrychlení). Tuto hodnotu dosadíme do rovnic (1), (2) a (3) a tím dostáváme hledané závislosti předepsaného vratného pohybu

$$a(t) = \frac{\pi^2 H}{2T^2}\cos\frac{\pi}{T}t, \tag{4}$$

$$v(t) = \frac{\pi H}{2T}\sin\frac{\pi}{T}t, \tag{5}$$

$$x(t) = \frac{H}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{T}t\right). \tag{6}$$