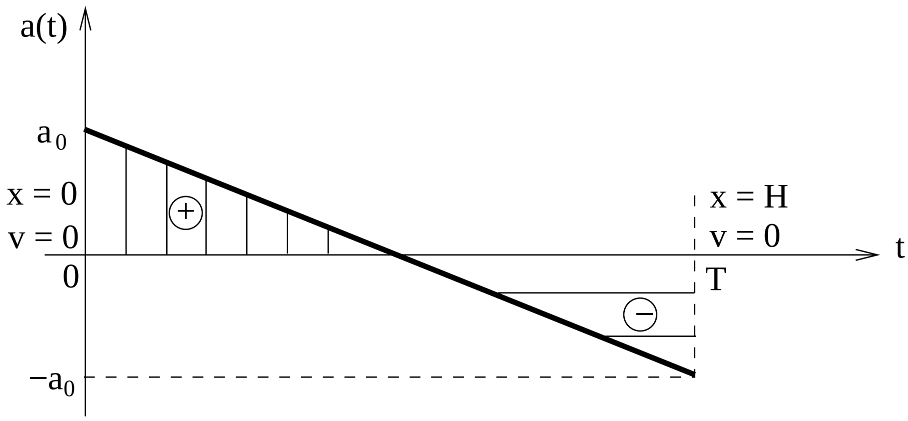
Materiály k 1. přednášce z předmětu KME/MECHB

Zpracoval: **Ing. Jan Vimmr, Ph.D.**

Vratné pohyby - technické aplikace

Příklad 1.: Řešte **souměrný vratný pohyb s přímkovým průběhem zrychlení** podle obrázku, t.j. vyšetřete kinematické závislosti $a(t)$, $v(t)$ a $x(t)$, je-li dána doba zdvihu T a zdvih H.

Dáno: T; H



Řešení: Předepsaný průběh zrychlení $a(t)$ je možné popsat jedinou funkcí na celém časovém intervalu $< 0, T >$. Lze vyjít ze směrnicového tvaru přímky

$$a = kt + q, \tag{1}$$

odkud po uvážení okrajových podmínek dostaneme

$$a(t = 0) = a_0 = q, \quad a(t = T) = -a_0 = kT + q \Rightarrow -2a_0 = kT \Rightarrow k = -\frac{2a_0}{T}.$$

Po dosazení těchto vztahů zpět do rovnice (1) dostáváme konkrétní tvar závislosti zrychlení na čase

$$a(t) = -\frac{2a_0}{T}t + a_0. \tag{2}$$

Hledané závislosti řešíme přímo, tedy nejprve

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{2a_0}{T}t + a_0 \Rightarrow \int_0^v dv = \int_0^t \left(-\frac{2a_0}{T}t + a_0\right) dt.$$

Po integraci dostáváme

$$v(t) = -\frac{a_0}{T}t^2 + a_0 t. \tag{3}$$

Dále víme, že platí

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{a_0}{T}t^2 + a_0 t \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \left(-\frac{a_0}{T}t^2 + a_0 t\right) dt.$$

Z toho integrací získáme vztah

$$x(t) = -\frac{a_0}{3T}t^3 + \frac{a_0}{2}t^2. \tag{4}$$

Rovnice (3) a (4) obsahují neznámou a_0, kterou určíme z okrajových podmínek vratného pohybu:

$$x(T) = H = \left(-\frac{T^2}{3} + \frac{T^2}{2}\right) a_0 = \frac{-2T^2 + 3T^2}{6} a_0 = \frac{T^2}{6} a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{6H}{T^2},$$

což dosadíme do vztahů (2), (3) a (4) a můžeme psát konečný tvar hledaných závislostí

$$\begin{aligned}
a(t) &= -\frac{12H}{T^3}t + \frac{6H}{T^2} \Rightarrow a(t) = \frac{6H}{T^2}\left(1 - \frac{2}{T}t\right), \\
v(t) &= -\frac{6H}{T^3}t^2 + \frac{6H}{T^2}t \Rightarrow v(t) = \frac{6H}{T^2}\left(1 - \frac{t}{T}\right)t, \\
x(t) &= -\frac{2H}{T^3}t^3 + \frac{3H}{T^2}t^2 \Rightarrow x(t) = \frac{H}{T^2}\left(3 - \frac{2}{T}t\right)t^2.
\end{aligned}$$