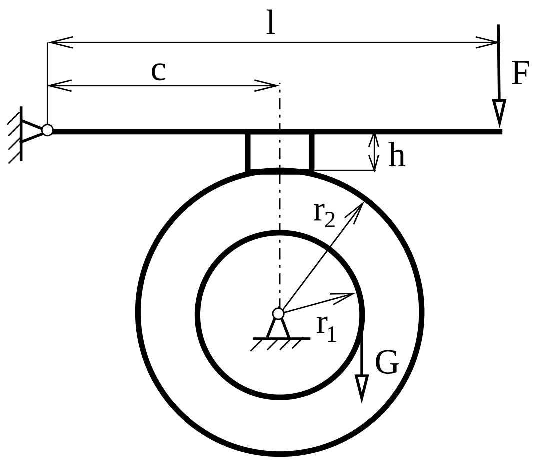
Materiály ke 13. cvičení z předmětu KME/MECHB

Zpracoval: **doc. RNDr. Zdeněk Hlaváč, CSc.**

Statické řešení rovinných mechanismů

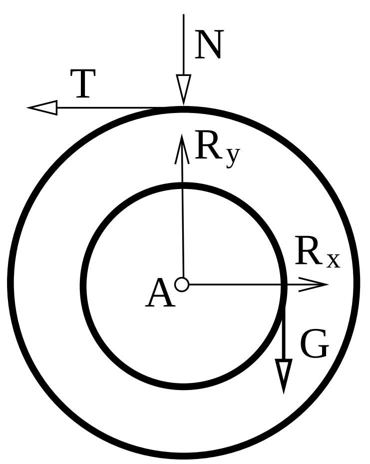
Špalíková brzda (analytické a grafické řešení)



Příklad: Kolo poloměru r_2 je společně s hřídelem poloměru r_1 uloženo jako jedno těleso ideální rotační vazbou k rámu. Na hřídel je navinuto lano, ke kterému je připojeno břemeno tíhy G. Ke kolu přiléhá s vodorovnou pákou délky l pevně spojený špalík tloušťky h. Poloha špalíku vůči středu rotační vazby páky k rámu je popsána parametrem c viz obrázek. Koeficient tření mezi špalíkem a obvodem kola je f. Určete početně i graficky velikost svislé síly F na konci páky pro rovnoměrné spouštění břemene. Určete rovněž reakce ve vazbách.

Dáno: r_1 =0,2m, r_2 =0,5m, h =0,05m, c =0,8m, l =2m, $f = 0,6$, G =200N.

Řešení: Popišme nejprve **analytické řešení.** Uvolníme nejdříve kolo s hřídelem. V rotační vazbě připojíme reakci $\vec{R}$ rozloženou na složky R_x a R_y. Smysly jejich působení volíme podle obrázku. V reálné obecné vazbě mezi obvodem kola a špalíkem připojíme normálovou reakci $\vec{N}$ a třecí sílu $\vec{T}$ o velikosti $T = fN$. Smysl síly $\vec{N}$ je v početním řešení možno volit. Zvolili jsme jej dolů, tak jak ve skutečnosti bude působit. Třecí síla působí ve směru tečny, smyslem proti pohybu (kolo se při spouštění břemene otáčí v záporném smyslu). Pro obecnou rovinnou soustavu sil $\vec{R_x}$, $\vec{R_y}$, $\vec{N}$, $\vec{T}$, $\vec{G}$, která je v rovnováze, píšeme složkovou podmínku do vodorovného směru (x), do svislého směru (y) a momentovou podmínku ke středu A kola. Dostaneme



$$\text{x} : R_x - fN = 0 \tag{1}$$

$$\text{y} : R_y - N - G = 0 \tag{2}$$

$$\text{A} : fNr_2 - Gr_1 = 0 \tag{3}$$

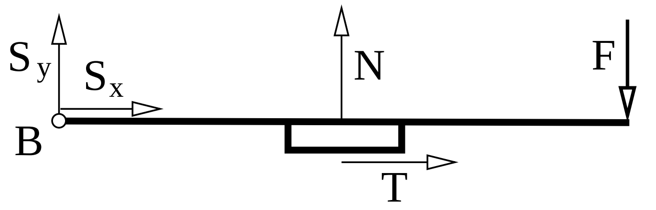
Tato soustava rovnic je řešitelná aniž bychom uvolňovali páku. Z (3) plyne

$$N = \frac{r_1}{fr_2}G \tag{4}$$

a dosazením do (1) a (2) pak

$$R_x = fN = \frac{r_1}{r_2}G\,;\; R_y = N + G = (1 + \frac{r_1}{fr_2})G \tag{5}$$

Uvolněním páky připojíme reakci $\vec{S}$ v rotační vazbě, kterou rozložíme do složek S_x a S_y. Smysly těchto složek volíme podle obrázku. Po uvolnění obecné vazby ke kolu připojíme normálovou reakci i třecí sílu opačných orientací než jak tyto síly působily na kolo (princip akce a reakce). Pro působící obecnou rovinnou soustavu sil $\vec{S_x}$, $\vec{S_y}$, $\vec{N}$, $\vec{T}$, $\vec{F}$ opět píšeme složkovou podmínku do vodorovného směru (x), složkovou podmínku do svislého směru (y) a momentovou podmínku k bodu B. Dostaneme je ve tvaru



$$x: S_x + fN = 0 \tag{6}$$

$$y: S_y + N - F = 0 \tag{7}$$

$$B: Nc + fNh - Fl = 0 \tag{8}$$

Z (8) kam dosadíme (4) vyplývá

$$F = N \cdot \frac{c+fh}{l} = \frac{r_1}{fr_2} \cdot \frac{c+fh}{l} \cdot G \tag{9}$$

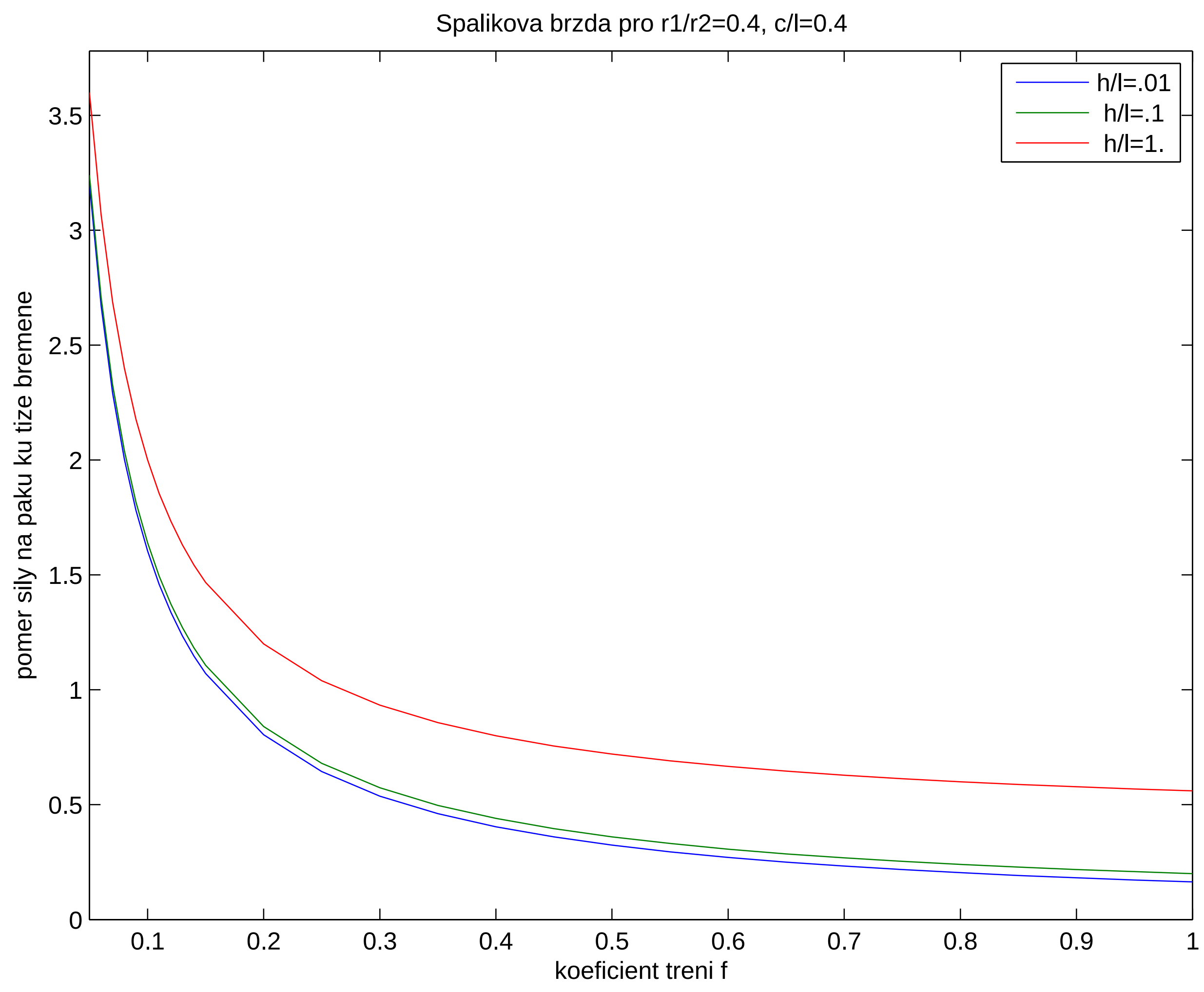
Z (6) a (7) potom

$$S_x = -fN = -\frac{r_1}{r_2} \cdot G\,; \;\; S_y = F - N = \frac{r_1}{fr_2} \cdot (-1 + \frac{c+fh}{l}) \cdot G \tag{10}$$

Pro číselné zadání dostaneme z (4) N =160N, z (5) potom R_x =80N, R_y =360N. Z (9) dále F =64,2N a z (10) nakonec S_x =-80N, S_y=-78N. Reakce S_x tedy ve skutečnosti míří vlevo a reakce S_y dolů. Reakce $\vec{S}$ v rotační vazbě páky proto míří do třetího kvadrantu. Pro kontrolu s grafickým řešením úlohy určíme ještě velikosti reakcí v rotačních vazbách. Máme

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 368,78\text{N}\,; \;\; S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = 111,73\text{N}$$

Poznámka: Z výrazu (9) plyne, že poměr $\frac{F}{G}$ závisí pouze na koeficientu tření f a na poměrech $\frac{r_1}{r_2}$, $\frac{c}{l}$ a $\frac{h}{l}$. Bylo zpracováno programové vybavení, prostřednictvím kterého lze závislosti na f a na poměru $\frac{h}{l}$ znázornit. Jsou uvedeny na obrázku níže.



Pro **grafické řešení** je potřeba pracovat s výslednými reakcemi $\vec{R}$ v rotační vazbě kola a $\vec{S}$ v rotační vazbě páky k rámu. Rovněž budeme pracovat se součtem $\vec{N}+\vec{T}$ normálové reakce a třecí síly. Nositelka této síly prochází podpěrou mezi špalíkem a kolem a je odkloněna od svislého směru (směru normálové reakce v podpěře v ideálním případě) o třecí (frikční) úhel φ, pro který platí

$$\varphi = \arctan f = \arctan 0,6 = 31^o$$

Smysl odchýlení nositelky součtu $\vec{N} + \vec{T}$ od svislice určíme podle smyslu pohybu a podle smyslu působení reakce $\vec{N}$ v ideálním případě. Není-li smysl ideální reakce $\vec{N}$ patrný z názoru, je třeba úlohu nejprve vyřešit bez tření. V našem případě už tento smysl je znám z početního řešení, takže víme, že **na kolo** působí dolů. Třecí síla **na kolo** působí vlevo (proti smyslu pohybu). Odtud vyplývá smysl odchýlení nositelky $\vec{N} + \vec{T}$ o 31^o od svislice, viz obrázek.

Dříve než začneme s faktickým řešením, je třeba zvolit měřítka délek a sil. Jako měřítko délek volíme 1cm na náčrtu odpovídá 20cm ve skutečnosti. Jako měřítko sil volíme 1cm na náčrtu odpovídá 40N.

Uvolňovat začínáme od tělesa, na které působí známá akční síla, tedy od kola. Na něj působí: akce $\vec{G}$, reakce $\vec{R}$ v rotační vazbě a reakce $\vec{N} + \vec{T}$ v reálné obecné vazbě. Aplikujeme tedy dvě grafické podmínky rovnováhy tří sil:

1) Jejich nositelky procházejí společným bodem. Nositelka $\vec{G}$ je známa ze zadání, nositelka $\vec{N} + \vec{T}$ je rovněž známa (prochází podpěrou skloněna o úhel 31^o v naznačeném smyslu). Jejich společným bodem Z musí procházet i nositelka reakce $\vec{R}$. Zároveň ale musí procházet i středem A rotační vazby. Nositelka reakce $\vec{R}$ je tedy určena body A a Z.

2) Jejich rovnoběžně přesunuté vektory uložené za sebe tvoří uzavřený trojúhelník. Protože u akce $\vec{G}$ známe i velikost, zkonstruujeme tento trojúhelník podle věty "úhel, strana, úhel", viz obrázek. V trojúhelníku vzniknou jako ostatní strany v měřítku sil velikosti (včetně smyslu) reakcí $\vec{R}$ a $\vec{N} + \vec{T}$ působících **na kolo**.

Uvolníme-li páku, působí na ni opět tři síly: akce $\vec{F}$ neznámé velikosti, reakce $\vec{S}$ v rotační vazbě a reakce $-(\vec{T}+\vec{N})$ známá z uvolnění kola, jež však zde má opačný smysl (princip akce a reakce). Pro tyto síly musí platit podmínky jejich grafické rovnováhy.

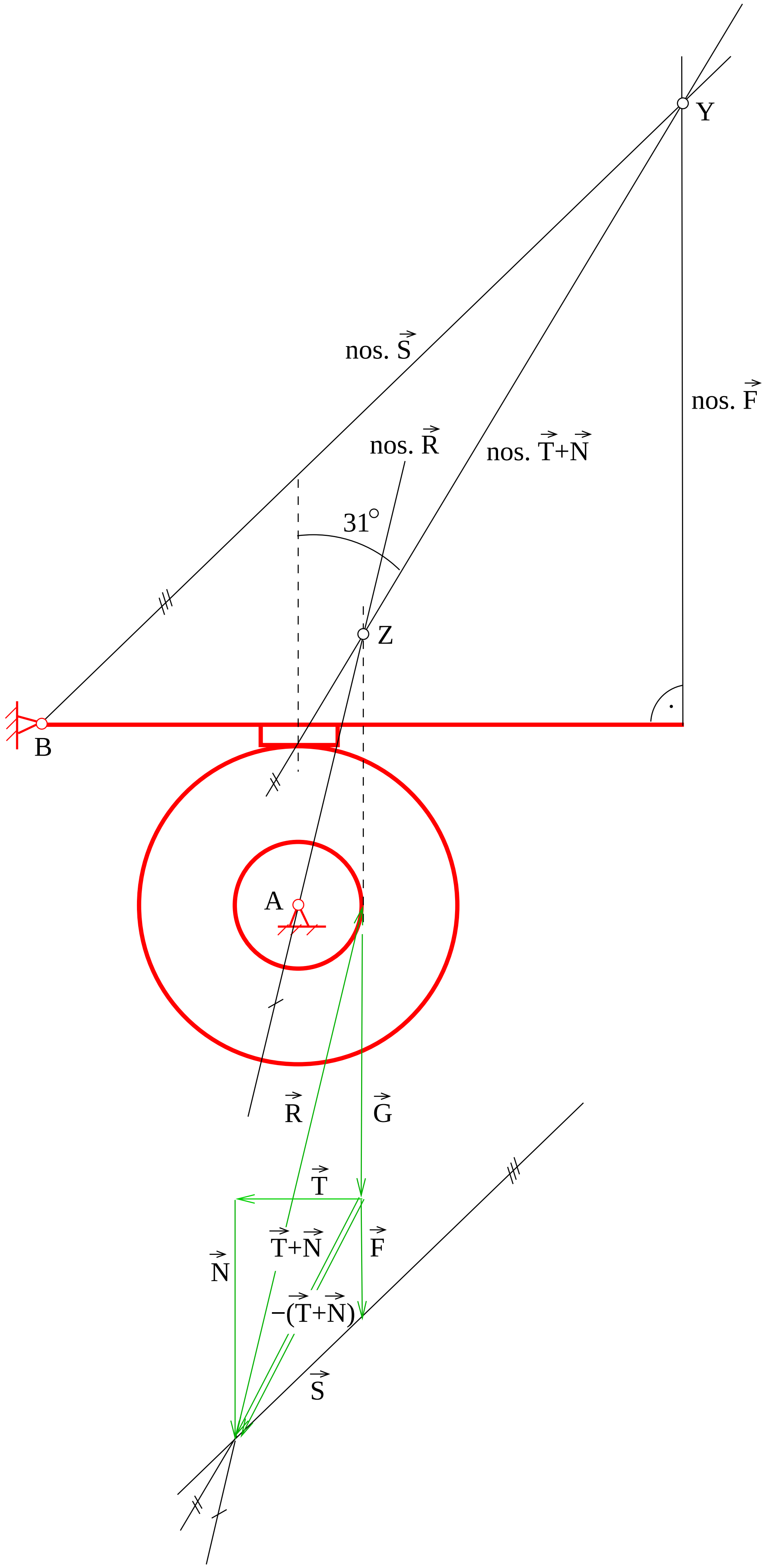
1) Jejich nositelky procházejí společným bodem. Ovšem nositelka $\vec{F}$ je známa ze zadání a nositelka $-(\vec{N} + \vec{T})$ je stejná jako nositelka $(\vec{N} + \vec{T})$ a tedy je známa z uvolnění kola. Jejich společným bodem Y musí procházet i nositelka reakce $\vec{S}$. Zároveň ale musí procházet i středem rotační vazby B. Body B a Y tedy určují nositelku reakce $\vec{S}$.

2) Jejich rovnoběžně přesunuté vektory uložené za sebe tvoří uzavřený trojúhelník. Protože sílu $-(\vec{N} + \vec{T})$ známe i co do velikosti a smyslu, lze tento trojúhelník konstruovat podle věty "úhel, strana, úhel", viz obrázek. V trojúhelníku se objeví velikosti i smysly sil $\vec{F}$ a $\vec{S}$. Při přepočtu v měřítku sil dostáváme

$$|\vec{R}| = 368\text{N}\,;\ |\vec{N} + \vec{T}| = 184\text{N}\,;\ |\vec{S}| = 124\text{N},\ ;\ |\vec{F}| = 64\text{N}$$

V mezích přesnosti rýsování tedy docházíme ke stejným výsledkům jako u početního řešení (včetně faktu, že síla $\vec{S}$ míří do třetího kvadrantu). Rozložíme-li sílu $\vec{N}+\vec{T}$ působící **na kolo** na svislou složku $\vec{N}$ a vodorovnou složku $\vec{T}$, je možno kontrolovat i tyto velikosti. Vychází $|\vec{N}| = 160\text{N}$ a $|\vec{T}| = 96\text{N}$. Protože výpočtem dostáváme $T = fN = 0,6 \cdot 160 = 96\text{N}$, dostáváme i zde shodu obou způsobů řešení.

Poznámka: S ohledem na zaplnění stránky textu nebylo možno dodržet deklarovaná měřítka délek a sil v obrázku.


Y
nos. $\vec{S}$
nos. $\vec{F}$
nos. $\vec{R}$
nos. $\vec{T}+\vec{N}$
31°
Z
B
A
$\vec{R}$
$\vec{G}$
$\vec{T}$
$\vec{N}$
$\vec{T}+\vec{N}$
$\vec{F}$
$-(\vec{T}+\vec{N})$
$\vec{S}$