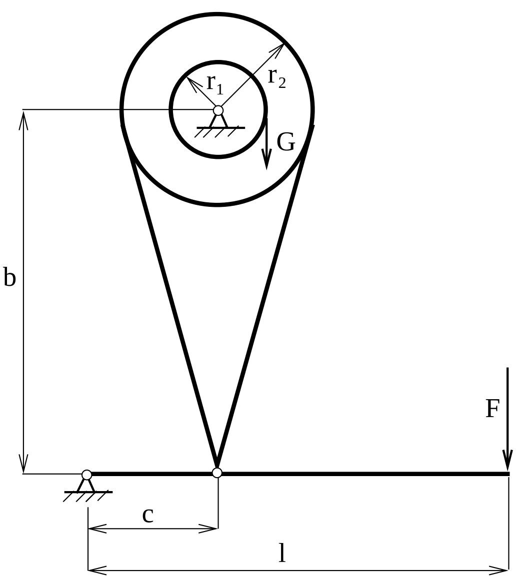
Materiály ke 13. cvičení z předmětu KME/MECHB

Zpracoval: **doc. RNDr. Zdeněk Hlaváč, CSc.**

Statické řešení rovinných mechanismů

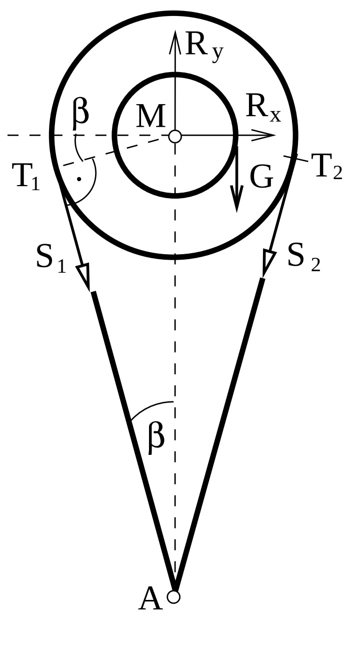
Pásová brzda (analytické řešení)



Příklad: Kolo poloměru r_2 je společně s hřídelem poloměru r_1 uloženo jako jedno těleso ideální rotační vazbou k rámu. Na hřídel je navinuto lano, ke kterému je připojeno břemeno tíhy G. Kolo je opásáno pásem upevněným ve vzdálenosti b od jeho středu k vodorovné páce viz obrázek. Koeficient tření mezi obvodem kola a pásem je f. Páka délky l je rotačně uložena k rámu v místě vzdáleném c od místa upevnění pásu viz obrázek. Určete velikost svislé síly F působící na konci páky pro rovnoměrné spouštění břemene. Určete rovněž reakce ve vazbách soustavy.

Dáno: r_1 =0,2m; r_2 =0,5m; b =1m; c =0,8m; l =2m; f =0,2; G =200N.

Řešení: Úlohu budeme řešit početně, využitím metody uvolňování. Uvolněním kola s hřídelem od rotační vazby k rámu připojíme reakci $\vec{R}$ touto vazbou přenášenou, kterou rozložíme na vodorovnou složku R_x a svislou složku R_y. Smysly těchto složek lze libovolně volit. Volíme je tedy vpravo (R_x) a vzhůru (R_y). Přerušení vazby k páce prostřednictvím pásu nahradíme osovými silami S_1 (v levé větvi) a S_2 (v pravé větvi). V rovnováze se pak nachází obecná rovinná soustava sil $\vec{R_x}$, $\vec{R_y}$, $\vec{G}$, $\vec{S_1}$, $\vec{S_2}$, pro kterou píšeme 3 podmínky rovnováhy (z nichž alespoň jedna musí být momentová). Formulujeme tedy složkovou podmínku do vodorovného směru (x), do svislého směru (y) a momentovou podmínku ke středu M kola. Dostaneme



$$\text{x}: R_x + (S_1 - S_2)\sin\beta = 0 \tag{1}$$

$$\text{y}: R_y - (S_1 + S_2)\cos\beta - G = 0 \tag{2}$$

$$\text{M}: (S_1 - S_2)r_2 - Gr_1 = 0 \tag{3}$$

Pro zavedený úhel β sklonu větví pásu od svislice vzhledem k pravoúhlým trojúhelníkům $AMT_{1,2}$ platí

$$\sin\beta = \frac{r_2}{b} \tag{4}$$

Mezi silami v jednotlivých větvích pásu platí známý výraz pro smýkání vláken po drsné křivce. Při spouštění břemene dochází k rotaci kola vůči pevnému pásu zřejmě v záporném smyslu. Situace je tedy stejná, jako kdyby vůči pevnému kolu docházelo ke smýkání pásu v kladném smyslu (relativita pohybu). Tento stav je modelovou situací pro užití vztahu pro smýkání vláken. Platí tedy

$$S_1 = S_2 \mathrm{e}^{f\alpha}\,, \tag{5}$$

kde α [rad] je úhel opásání. Vzhledem k rovnosti velikosti úhlů s kolmými rameny a k symetrii náčrtu podle osy AM platí pro úhel α zřejmě vztah

$$\alpha = 2(\frac{\pi}{2} + \beta) \tag{6}$$

Aniž bychom uvolňovali páku, je soustava rovnic (1), (2), (3) a (5) řešitelná pro neznámé S_1, S_2, R_x, R_y. Dosazením (5) do (3) získáme

$$S_2(\mathrm{e}^{f\alpha} - 1)r_2 = Gr_1 \Rightarrow\ S_2 = \frac{r_1}{r_2(\mathrm{e}^{f\alpha} - 1)}G \tag{7}$$

Z (1) a (2) potom plyne

$$R_x = S_2(1 - \mathrm{e}^{f\alpha})\sin\beta\,;\ \ R_y = G + S_2(1 + \mathrm{e}^{f\alpha})\cos\beta \tag{8}$$

Pro $\sin\beta$ platí vztah (4), pro $\cos\beta$ podle Pythagorovy věty platí vztah

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{b^2 - r_2^2}}{b} \tag{9}$$

Pro číselné zadání dostaneme ze (4) a (9)

$$\sin\beta = 0,5 \Rightarrow\ \beta = \frac{\pi}{6}\,;\ \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

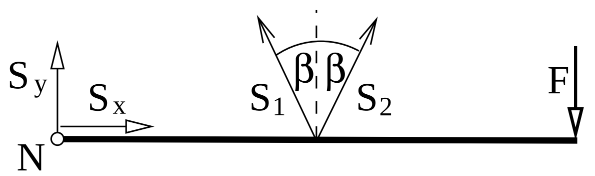
Podle (6) potom

$$\alpha = 2(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = \frac{4}{3}\pi$$

Odtud

$$\mathrm{e}^{f\alpha} = \mathrm{e}^{\frac{4}{15}\pi} \doteq 2,31118$$

Podle (7) potom S_2 =60,01N a podle (5) S_1 =141,01N. Podle (8) potom R_x =-40N a R_y =374,95N. Je tedy zřejmé, že složka R_x míří ve skutečnosti doleva, takže reakce $\vec{R}$ v rotační vazbě kola míří do druhého kvadrantu.



Uvolněním páky od rotační vazby k rámu připojíme jí přenášenou reakci $\vec{S}$, kterou rozložíme na vodorovnou složku S_x a svislou složku S_y, se smysly zvolenými doprava (S_x) a vzhůru (S_y).

Přerušením pásu připojíme podle principu akce a reakce síly $\vec{S_1}$ a $\vec{S_2}$ opačné orientace než u kola. V rovnováze pak bude obecná rovinná soustava sil $\vec{S_x}$, $\vec{S_y}$, $\vec{S_1}$, $\vec{S_2}$, $\vec{F}$, pro kterou zapíšeme klasické schema tří podmínek rovnováhy. Dostaneme rovnice

$$\mathrm{x} : S_x + (S_2 - S_1)\sin\beta = 0 \tag{10}$$

$$\mathrm{y} : S_y + (S_1 + S_2)\cos\beta - F = 0 \tag{11}$$

$$\mathrm{N} : (S_1 + S_2)c \cdot \cos\beta - Fl = 0 \tag{12}$$

Dosazením (5), (7) a (9) do (12) dostaneme

$$F = \frac{c}{l} \cdot \frac{\sqrt{b^2 - r_2^2}}{b} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{f\alpha} + 1}{\mathrm{e}^{f\alpha} - 1} \cdot G \tag{13}$$

Z (10) a (11) potom je

$$S_x = (S_1 - S_2)\sin\beta = \frac{r_1}{b}\cdot G \qquad (14)$$

$$S_y = F - (S_1 + S_2)\cos\beta = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\sqrt{b^2 - r_2^2}}{b}\cdot\frac{e^{f\alpha}+1}{e^{f\alpha}-1}\cdot(\frac{c}{l}-1)\cdot G \qquad (15)$$

Pro číselné zadání dostaneme z (13) F =69,98N. Z (14) a (15) potom S_x =40N a $S_y = -104,97$ N. Je tedy zřejmé, že složka reakce R_y míří ve skutečnosti dolů, takže reakce $\vec{S}$ v rotační vazbě páky míří do čtvrtého kvadrantu.

Poznámka: Při řešení úlohy byla zanedbána tíha kola s hřídelem. Pokud bychom ji uvažovali, projevila by se pouze zvýšením složky reakce R_y.

Poznámka: Z výrazů (9) a (13) plyne, že poměr $\frac{F}{G}$ závisí pouze na koeficientu tření f a na poměrech $\frac{r_1}{r_2}$, $\frac{c}{l}$ a $\frac{r_2}{b}$. Zatímco závislost na prvních dvou poměrech je lineární (a tudíž předvídatelná), závislost na f a $\frac{r_2}{b}$ je složitější. Bylo zpracováno programové vybavení, prostřednictvím kterého lze tyto závislosti znázornit. Jsou uvedeny na obrázku níže.