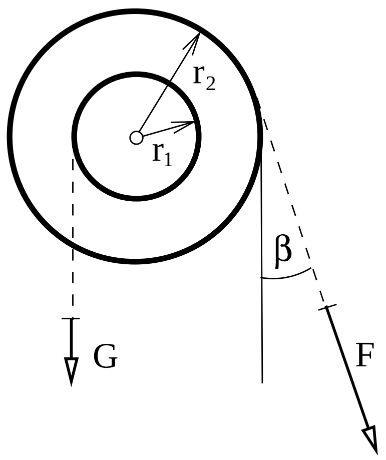
Materiály k 9. cvičení z předmětu KME/MECHB

Zpracoval: **doc. RNDr. Zdeněk Hlaváč, CSc.**

Vyšetřování rovnováhy tělesa v rovině

Metoda fyzikální iterace a stanovení účinnosti

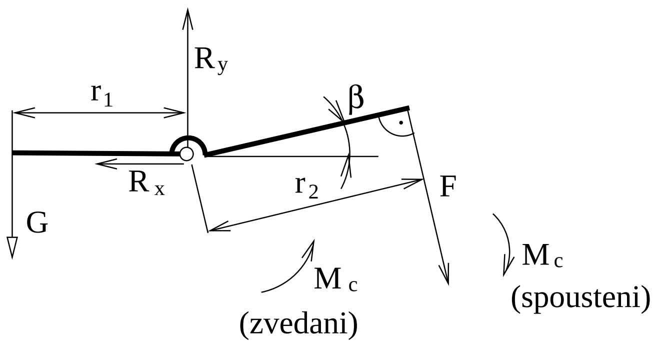


Příklad: Kolo na hřídeli je (jako jedno těleso) uloženo reálnou rotační vazbou k rámu. Na hřídel poloměru r_1 se navíjí lano, ke kterému je připojeno břemeno tíhy Q. Na kolo poloměru r_2 je navinuto lano, prostřednictvím něhož chceme silou F působící pod úhlem β (obecně je $\beta \neq 0$) břemeno rovnoměrně zvedat, eventuálně spouštět. Určete velikost síly F_1 pro spouštění a F_2 pro zvedání, je-li třecí poloměr rotační vazby ρ. Tíhu kola s hřídelem zanedbejte.

Dáno: r_1 =0,2m; r_2 =0,4m; G =100N, $\beta = 30^o$, ρ =0,01m

Řešení: Úlohu budeme řešit analyticky, využitím metody uvolňování. Uvolněním kola s hřídelem od rotační vazby k rámu připojíme reakci $\vec{R}$ touto vazbou přenášenou, kterou rozložíme na vodorovnou složku R_x a svislou složku R_y. Smysly těchto složek lze libovolně volit. Volíme je tedy vlevo (R_x) a vzhůru (R_y). Proti pohybu potom působí moment čepového tření o velikosti

$$M_c = \rho R = \rho\sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$



Silové účinky působící na uvolněné těleso jsou znázorněny na obrázku. Jedná se o rovinnou soustavu silových účinků, pro kterou píšeme tři podmínky rovnováhy, z nichž alespoň jedna musí být momentová. Složkové podmínky do vodorovného směru (x), svislého směru (y) a momentová podmínka ke středu kola S mají tvar

$$\text{x}: \; R_x - F\sin\beta = 0 \tag{1}$$

$$\text{y}: \; R_y - G - F\cos\beta = 0 \tag{2}$$

$$\text{S}: \; Gr_1 - Fr_2 \mp \rho\sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 0 \tag{3}$$

Rovnice (1), (2) a (3) tvoří soustavu rovnic pro neznámé F, R_x, R_y. Horní znaménko ve třetím sčítanci (3) platí pro spouštění a spodní pro zvedání břemene. Vzhledem k neznámým R_x a R_y nacházejícím se v kvadrátu jako argument odmocniny se jedná o soustavu obecně nelineární. Její řešení se provádí metodou postupných lineárních aproximací tvaru $R_x^{(i)}$, $R_y^{(i)}$, $F_1^{(i)}$ (resp. $F_2^{(i)}$), $i = 1, \ldots,$ které v limitě pro $i \to \infty$ dávají přesné řešení soustavy. Tuto metodu nazýváme **metoda fyzikální iterace**. Její princip spočívá v převedení nelineárního členu na pravou stranu rovnice, kde jej vyčíslíme v iteraci o jedničku nižšího pořadí. Nultou iteraci $R_x^{(0)}$, $R_y^{(0)}$, $F_1^{(0)}$ (resp. $F_2^{(0)}$) vyčíslíme při zanedbání tření (tedy nelineárního členu rovnice). Pro tuto iteraci platí soustava

$$R_x^{(0)} = F_{1,2}^{(0)} \sin\beta$$

$$R_y^{(0)} = G + F_{1,2}^{(0)} \cos\beta$$

$$Gr_1 = F_{1,2}^{(0)} r_2$$

Jejím řešení je

$$F_{1,2}^{(0)} = G\frac{r_1}{r_2};\ R_x^{(0)} = G\frac{r_1}{r_2}\sin\beta;\ R_y^{(0)} = G(1 + \frac{r_1}{r_2}\cos\beta) \tag{4}$$

Každou další iteraci $R_x^{(i)}$, $R_y^{(i)}$, $F_1^{(i)}$ (resp. $F_2^{(i)}$), $i = 1, \dots$ určíme z předchozí iterace $R_x^{(i-1)}$, $R_y^{(i-1)}$, $F_1^{(i-1)}$ (resp. $F_2^{(i-1)}$) řešením (opět lineární) soustavy tvaru

$$\begin{aligned} R_x^{(i)} - F_{1,2}^{(i)} \sin\beta &= 0 \\ R_y^{(i)} - G - F_{1,2}^{(i)} \cos\beta &= 0 \\ Gr_1 - F_{1,2}^{(i)} r_2 &= \pm\rho\sqrt{R_x^{(i-1)2} + R_y^{(i-1)2}} \end{aligned} \tag{5}$$

Pro zadané číselné hodnoty má nultá iterace podle (4) tvar

$$F_{1,2}^{(0)} = 100 \cdot \frac{0,2}{0,4} = 50\text{N}\,,\ R_x^{(0)} = 100 \cdot \frac{0,2}{0,4} \sin 30^o = 25\text{N}\,;$$

$$R_y^{(0)} = 100(1 + \frac{0,2}{0,4}\cos 30^o) = 100(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}) \doteq 145\text{N}$$

Soustava (5) pro $i = 1$ a pro případ spouštění břemene (horní znaménko na pravé straně) je potom tvaru

$$R_x^{(1)} - \frac{F_1^{(1)}}{2} = 0$$

$$R_y^{(1)} - \frac{F_1^{(1)}\sqrt{3}}{2} = 100$$

$$F_1^{(1)} \cdot 0,4 = 100 \cdot 0,2 - 0,01\sqrt{25^2 + 145^2}$$

Řešením této soustavy je

$$F_1^{(1)} = 49,632\text{N}\,;\ R_x^{(1)} = 24,816\text{N}\,;\ R_y^{(1)} = 142,98\text{N}$$

Soustava (5) pro spouštění břemene a pro $i = 2$ je tvaru

$$R_x^{(2)} - \frac{F_1^{(2)}}{2} = 0$$

$$R_y^{(2)} - \frac{F_1^{(2)}\sqrt{3}}{2} = 100$$

$$F_1^{(2)} \cdot 0,4 = 100 \cdot 0,2 - 0,01\sqrt{24,816^2 + 142,98^2}$$

Jejím řešením je

$$F_1^{(2)} = 49,637\text{N}\,;\ R_x^{(2)} = 24,819\text{N}\,;\ R_y^{(2)} = 142,99\text{N}$$

Analogicky řešíme další iterace, jakož i iterace pro rovnoměrné zvedání břemene (spodní znaménko na pravé straně v (5)). Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce

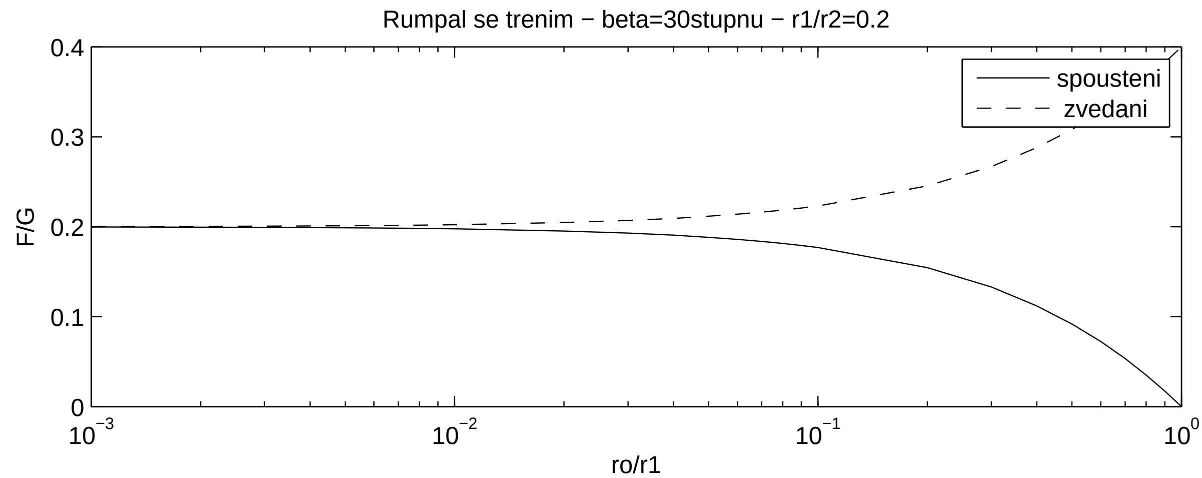
i	Zvedání [N]			Spouštění [N]		
	$F_2^{(i)}$	$R_x^{(i)}$	$R_y^{(i)}$	$F_1^{(i)}$	$R_x^{(i)}$	$R_y^{(i)}$
0	50	25	145	50	25	145
1	50,368	25,184	143,62	49,632	24,816	142,98
2	50,365	25,182	143,62	49,637	24,819	142,99
3	50,365	25,182	143,62	49,637	24,819	142,99

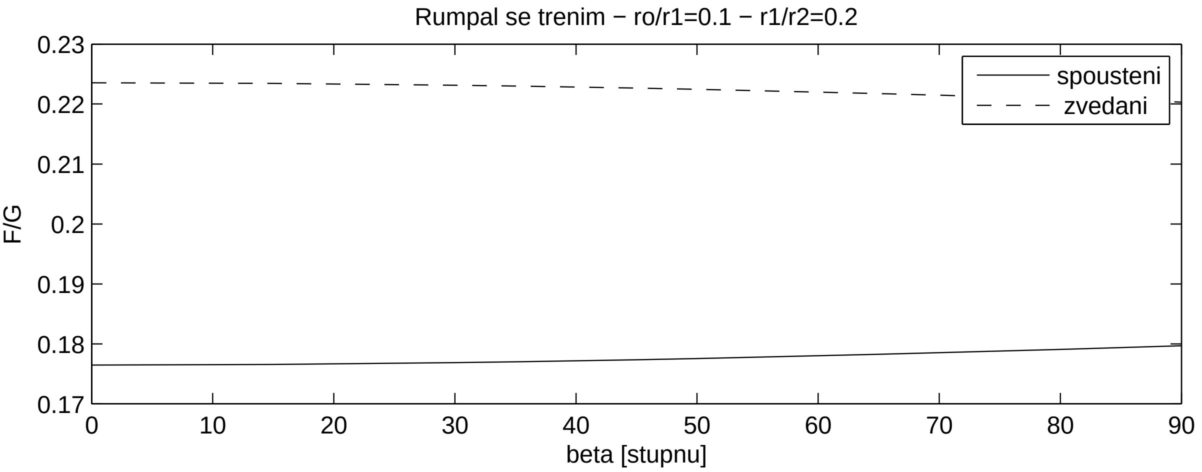
Z tabulky je patrno, že proces v obou případech velmi rychle konvergoval. Již po třech iteracích jej lze ukončit. Obecně se proces ukončuje např. při splnění podmínky

$$\max\left[\left|\frac{F^{(i)}-F^{(i-1)}}{F^{(i)}}\right|,\left|\frac{R_x^{(i)}-R_x^{(i-1)}}{R_x^{(i)}}\right|,\left|\frac{R_y^{(i)}-R_y^{(i-1)}}{R_y^{(i)}}\right|\right]\le\varepsilon$$

pro vhodně zvolenou relativní chybu ε (nejčastěji v rozmezí 10^{-5} až 10^{-3}).

Poznámka: Z výrazu (5) plyne, že poměr $\frac{F}{G}$ závisí pouze poměru $\frac{\rho}{r_1}$,jenž zohledňuje míru velikosti třecího účinku, dále na poměru $\frac{r_1}{r_2}$ a na úhlu β sklonu nositelky síly $\vec{F}$ od svislice. Bylo zpracováno programové vybavení, prostřednictvím kterého lze závislosti na β a na poměru $\frac{\rho}{r_1}$ znázornit. Jsou uvedeny na obrázku níže.





Poznámka: Soustavu rovnic lze rovněž řešit přímou dosazovací metodou. Dosazením (1) a (2) do (3) získáme jedinou transcendentní rovnici pro neznámou F ve tvaru

$$Gr_1 - Fr_2 = \pm\rho\sqrt{F^2\sin^2\beta + (G + F\cos\beta)^2}$$

Jediný možný postup řešení této rovnice se uskuteční pomocí umocnění a následného řešení vzniklé kvadratické rovnice. Zmíněná cesta však skrývá dvě úskalí. Jednak se umocněním stírá rozdílnost případů zvedání a spouštění břemene a na druhé straně umocnění, jako neekvivalentní úprava, "přidává" původní rovnici jedno fyzikálně neopodstatněné řešení.

Diskuse správnosti získaných výsledků touto cestou by byla značně složitá. Proto se ve všech případech zahrnování třecích účinků v rotačních vazbách používá pouze popsaná metoda fyzikální iterace. Připomínáme rovněž, že moment čepového tření je jediným třecím účinkem, jenž soustavu rovnic činí na každém intervalu zatížení nelineární. Ostatní třecí účinky vnášejí do soustav rovnic nelinearitu pouze vlivem změny smyslu pohybu.

Zcela jiná (a podstatně jednodušší) situace nastane pro případ $\beta = 0$, tedy když silou $\vec{F}$ taháme rovněž ve svislém směru. Soustava rovnic (1), (2) a (3) má potom tvar

$$R_x = 0 \tag{6}$$

$$R_y = F + G \tag{7}$$

$$Gr_1 = Fr_2 \pm \rho R_y \tag{8}$$

Stačí tedy řešit soustavu (7), (8) pro neznámé R_y a F, která je lineární. Dosazením (7) do (8) vzniká

$$Gr_1 = Fr_2 \pm \rho(F + G)$$

odkud

$$G(r_1 \mp \rho) = F(r_2 \pm \rho) \Leftrightarrow F_{1,2} = G\frac{r_1 \mp \rho}{r_2 \pm \rho} \tag{9}$$

Horní znaménka se týkají spouštění (síla F_1) a spodní zvedání (síla F_2) břemene. Dosazením číselných hodnot dostáváme

$$F_1 = 100 \cdot \frac{0,2 - 0,01}{0,4 + 0,01} = 100 \cdot \frac{0,19}{0,41} = 46,34\text{N}$$

$$F_2 = 100 \cdot \frac{0,2 + 0,01}{0,4 - 0,01} = 100 \cdot \frac{0,21}{0,39} = 53,85\text{N}$$

Ideální případ bez tření (tedy pro $\rho = 0$) dává $F = G\frac{r_1}{r_2}$=50N.

Stanovení účinnosti tohoto stroje

Abychom mohli hovořit o účinnosti jednoduchého stroje, je třeba ještě odvodit kinematické závislosti. Nechť kolo s hřídelem se (jako jediné těleso) natočí o úhel φ. Pak lano na straně břemene změní svoji délku o $s_1 = r_1\varphi$ a na straně síly změní svoji délku o $s_2 = r_2\varphi$. Srovnáním těchto vztahů dostaneme

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{r_1}{r_2} \Leftrightarrow s_1 = s_2 \cdot \frac{r_1}{r_2}$$

Časovou derivací odtud máme

$$v_1 = v_2 \cdot \frac{r_1}{r_2} \tag{10}$$

kde v_1 je rychlost na straně břemene a v_2 rychlost na straně síly. Účinnost η je poměr spotřebovaného ku dodanému výkonu. Výkon (pro případ, kdy síla a rychlost mají týž směr) je roven součinu síly a rychlosti. Pro případ zvedání břemene je výkon břemene spotřebovaný a výkon síly dodaný. Proto pro účinnost platí

$$\eta_2 = \frac{Gv_1}{Fv_2}$$

Po dosazení z (9) a (10) máme

$$\eta_2 = \frac{G \cdot v_2 \cdot \frac{r_1}{r_2}}{G \cdot \frac{r_1+\rho}{r_2-\rho} \cdot v_2} = \frac{r_1 r_2 - r_1\rho}{r_1 r_2 + r_2\rho}$$

Rozšířením tohoto zlomku výrazem $\frac{1}{r_1 r_2}$ získáme konečný tvar

$$\eta_2 = \frac{1-\frac{\rho}{r_2}}{1+\frac{\rho}{r_1}} = \frac{0,975}{1,05} = 0,92857 \doteq 92,9\%$$

Pro případ spouštění břemene je dodáván výkon břemene a spotřebován výkon síly. Příslušná účinnost je proto $\eta_1 = \frac{Fv_2}{Gv_1}$, což podle (9) a (10) dává

$$\eta_1 = \frac{G \cdot \frac{r_1-\rho}{r_2+\rho} \cdot v_2}{G \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot v_2} = \frac{r_1 r_2 - r_2\rho}{r_1 r_2 + r_1\rho}$$

Stejným rozšířením jako výše získáme

$$\eta_1 = \frac{1-\frac{\rho}{r_1}}{1+\frac{\rho}{r_2}} = \frac{0,95}{1,025} = 0,92683 \doteq 92,7\%$$

Vidíme, že pro různé poloměry hřídele a kola je účinnost pro zvedání břemene poněkud odlišná od účinnosti pro jeho spouštění.

Poznámka: Z výrazů pro účinnost v obou případech pohybu plyne, že tato závisí pouze poměru $\frac{\rho}{r_1}$,jenž zohledňuje míru velikosti třecího účinku, dále na poměru $\frac{r_1}{r_2}$. Účinnost nezávisí na úhlu β sklonu nositelky síly $\vec{F}$ od svislice. Bylo zpracováno programové vybavení, prostřednictvím kterého lze závislost účinností na poměru $\frac{\rho}{r_1}$ znázornit. Je uvedena na obrázku níže.