Materiály ke 4. cvičení z předmětu KME/MECHB

Zpracoval: **doc. RNDr. Zdeněk Hlaváč, CSc.**

Aplikace obecného rozkladu - Coriolisovo zrychlení

Rovnoměrný přímočarý pohyb po povrchu Země z hlediska pozorovatele nezúčastňujícího se rotace Země kolem její osy

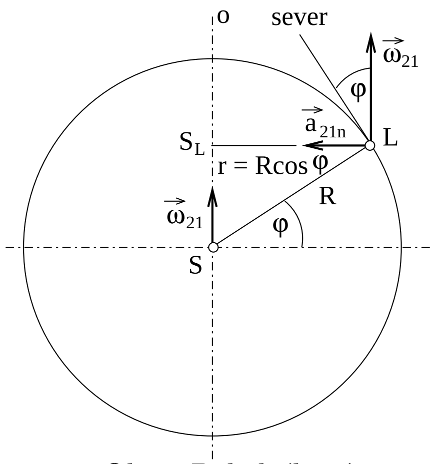
Příklad: V místě o zeměpisné šířce φ (na severní polokouli kladná, na jižní záporná) se posouvá po přímce těleso (např. automobil) směrem, definovaným úhlem A sklonu od severního směru (tzv. **azimutem** - přibývá ve smyslu západ, kdy $A = \frac{\pi}{2}$, jih, kdy $A = \pi$, a východ, kdy $A = \frac{3\pi}{2}$), konstantní rychlostí v vzhledem k Zemi. Určete pro pozorovatele nezúčastňujícího se rotace Země kolem její osy výslednou rychlost a zrychlení libovolného bodu tělesa.

Řešení: Prostor pozorovatele označíme 1, unášivý prostor spojený se Zemí označíme 2 a prostor tělesa označíme 3. Unášivý pohyb 21 je rotace Země kolem osy konstantní úhlovou rychlostí ω_{21}. Druhotný pohyb 32 je posuv po přímce zadaného směru konstantní rychlostí v. Rozklad pohybu 31=21+32 je proto rozkladem obecným.

Určíme nejprve úhlovou rychlost $\vec{\omega}_{21}$. Protože se Země otáčí od západu k východu, má vektor $\vec{\omega}_{21}$ směr zemské osy a podle pravidla pravé ruky míří k severu. Pro jeho velikost zřejmě platí

$$\omega_{21} = \frac{2\pi}{T}\,,$$

kde T je doba otočení Země kolem osy, tedy T =1den= $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$[s]. Proto $\omega_{21} = \frac{2 \cdot 3.14159}{86400} = 7.272 \cdot 10^{-5}$[rad/s].



Obr.1 Poledníkový řez

Nyní určíme výslednou rychlost libovolného bodu tělesa $\vec{v}_{31}$. Platí pro ni

$$\vec{v}_{31} = \vec{v}_{21} + \vec{v}_{32}\,. \tag{1}$$

Popišme nejprve $\vec{v}_{21}$. Při rotaci Země 21 se libovolný bod tělesa pohybuje po kružnici poloměru $r = R\cos\varphi$ (viz obr.1) úhlovou rychlostí ω_{21}. V tomto výrazu R je poloměr Země, $R = 6.378 \cdot 10^6$[m]. Rychlost $\vec{v}_{21}$ v (1) proto leží v tečné rovině k povrchu Země a má východní směr. Její velikost je rovna

$$v_{21} = \omega_{21} R\cos\varphi = K\cos\varphi\,[\mathrm{m/s}]\,,\ K = 463.82\,[\mathrm{m/s}]\,. \tag{2}$$

Rychlost $\vec{v}_{32}$ má zřejmě velikost v a směr daný v tečné rovině k zemskému povrchu azimutem A.

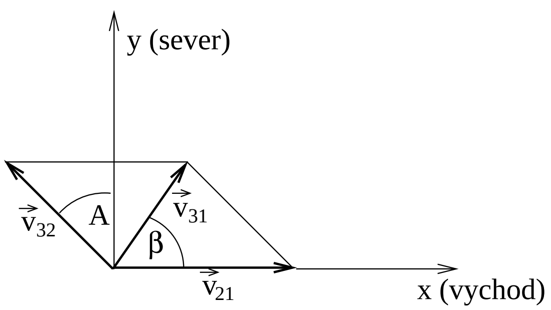
Obě rychlosti v (1) leží tedy v tečné rovině k zemskému povrchu. Při pohledu na tuto rovinu (viz obr.2) je zřejmé, že spolu svírají úhel $\frac{\pi}{2} + A$. Zavedeme-li do tečné roviny k zemskému povrchu souřadnicový systém podle obr.2, dostáváme promítnutím obou sčítanců v (1) do směrů tohoto systému pro velikost výsledné rychlosti v_{31} a směrový úhel β její nositelky od východního směru výrazy

$$v_{31} = \sqrt{(v_{21} - v_{32}\sin A)^2 + v_{32}^2\cos^2 A} = \sqrt{v_{21}^2 + v_{32}^2 - 2v_{21}v_{32}\sin A}\,,$$

$$\cos\beta = \frac{v_{21} - v_{32}\sin A}{v_{31}}\,,\ \sin\beta = \frac{v_{32}\cos A}{v_{31}}\,.$$

Po dosazení $v_{32} = v$ a za v_{21} z (2) dostaneme

$$v_{31} = \sqrt{K\cos\varphi(K\cos\varphi - 2v\sin A) + v^2}\,;\ \cos\beta = \frac{K\cos\varphi - v\sin A}{v_{31}}\,,\ \sin\beta = \frac{v\cos A}{v_{31}}\,. \quad (3)$$

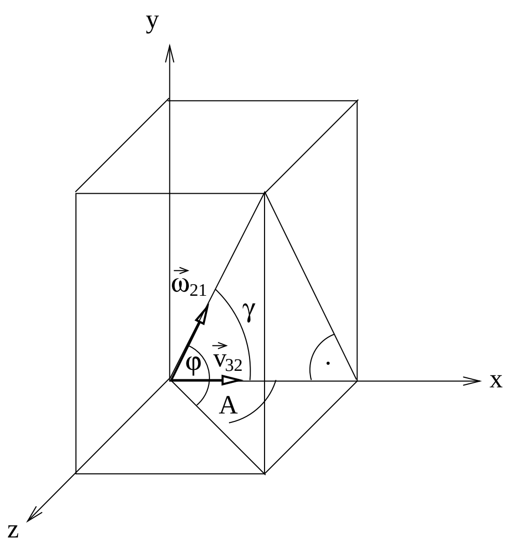


Obr.2 Tečná rovina k povrchu Země

Poznámka: Rychlost $v_{21} = K\cos\varphi$ je obvodová rychlost místa zemského povrchu o zeměpisné šířce φ. Pro padesátou rovnoběžku je rovna 298.14 [m/s]. Je to rychlost řádově převyšující rychlost automobilu. Výsledná rychlost v_{31} se proto nebude příliš lišit od výše popsané hodnoty a úhel β bude též velmi malý. Např. pro v =20[m/s] a $A = 0$ (jízda na sever) vychází v_{31} = 298.81[m/s] a β=3.838 stupňů.

Určíme dále vektor coriolisova zrychlení $\vec{a}_c$. Podle definice je

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{21}\mathrm{x}\vec{v}_{32}\,. \quad (4)$$



Obr.3

V tomto vztahu $\vec{\omega}_{21}$ má směr zemské osy a $\vec{v}_{32}$ leží v tečné rovině k zemskému povrchu odkloněna o úhel A od severního směru. Abychom určili úhel, který dva činitelé v (4) spolu svírají, zavedeme následující kvádr (viz obr.3). Jeho "spodní" podstava představuje tečnou rovinu k zemskému povrchu, tělesová úhlopříčka představuje směr vektoru $\vec{\omega}_{21}$, tedy rovnoběžku se zemskou osou mířící k severu a svírající s tečnou rovinou k zemskému povrch úhel φ (viz obr.3). Směr úhlopříčky "spodní" podstavy kvádru bude představovat severní směr v tečné rovině k povrchu zemskému a směr hrany v ose x kvádru pak směr rychlosti $\vec{v}_{32}$. Úhlopříčka "spodní" podstavy je proto od (kladně orientované) osy x odchýlena o azimut A. Úhel γ, který svírá (kladně orientovaná) osa x s tělesovou úhlopříčkou kvádru je pak úhlem sklonu mezi činiteli ve vztahu (4) (v tam uvedeném pořadí). Pro určení jeho goniometrické funkce kosínus stačí položit délku tělesové úhlopříčky v kvádru rovnu jedné. Délka úhlopříčky "spodní" podstavy potom je $\cos\varphi$ a délka hrany na ose x pak je $\cos\varphi\cos A$. Délka hrany na ose x je ale pravoúhlým průmětem tělesové úhlopříčky kvádru do osy x, tedy přes úhel γ. Proto platí

$$\cos\gamma = \cos\varphi\cos A\,. \quad (5)$$

Řešení této rovnice je dvojznačné, a to $\gamma = \pm \arccos(\cos\varphi \cos A)$. Z obr.3 je však patrné, že znaménko plus bude v platnosti pro $\varphi > 0$ (tedy na severní polokouli), zatímco znaménko minus pro $\varphi < 0$ (tedy na jižní polokouli).

Nyní už snadno určíme podle pravidel práce s vektorovým součinem velikost i směr coriolisova zrychlení (4). Pro jeho velikost platí

$$a_c = 2\omega_{21} v_{32} \sin\gamma = 2\omega_{21} v \sin\gamma \,, \tag{6}$$

kde γ je dáno jednoznačným řešením (5). Směr $\vec{a}_c$ je kolmý jak na směr $\vec{\omega}_{21}$, tak na směr $\vec{v}_{32}$. Musí tedy ležet v rovině φ-té rovnoběžky. Od západního směru je odchýlen o azimut A. Nutno připomenout, že azimut se kladně měří přes jih, východ a sever. Také je třeba si uvědomit, že vyjde-li v (6) skalár a_c záporný, mění se jeho zde určený smysl na opačný (což nastane právě jen na jižní polokouli).

Poznámka: Ze vztahů (5) a (6) speciálně plyne, že na rovníku ($\varphi = 0$) je $\gamma = A$, a tedy $a_c = 2\omega_{21} v \sin A$, zatímco na pólu ($\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$) je $\gamma = \frac{\pi}{2}$ (na severním pólu) resp. $\gamma = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ (na jižním pólu). Pro oba případy ale je $a_c = 2\omega_{21} v$. Dále z uvedených výrazů plyne, že pro $A = 0$ (pohyb 32 severním směrem) je $\gamma = \varphi$, a tedy $a_c = 2\omega_{21} v \sin\varphi$ a míří na severní polokouli západním směrem ($a_c > 0$) a na jižní polokouli východním směrem ($a_c < 0$). Pro $A = \pi$ (pohyb 32 jižním směrem) je situace právě opačná. Pro $A = \frac{\pi}{2}$ (pohyb 32 západním směrem) je $\gamma = \frac{\pi}{2}$ (na severní polokouli) a $\gamma = -\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ (na jižní polokouli). Pro tyto případy je $a_c = 2\omega_{21} v$ a jeho směr je v rovině $\varphi-$ té rovnoběžky odchýlený od západního směru o $\frac{\pi}{2}$. Je to tedy směr o φ odchýlený od zenitu na severní polokouli (kdy je $a_c > 0$), resp. od **nadiru** (**podnožníku**, kdy je $a_c < 0$). Pro $A = -\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ (pohyb 32 východním směrem) je situace opačná, kdy severní polokouli zaměníme za jižní a naopak a zenit zaměníme za nadir a naopak. Speciálně pro pohyb západním směrem na rovníku je $a_c = 2\omega_{21} v$ a míří do zenitu, zatímco pro pohyb východním směrem je a_c stejně veliké a míří do nadiru. Pro v =20[m/s] je $a_c = 1.4545 \cdot 10^{-3}$[m/s^2].Toto zrychlení se algebraicky sčítá (odčítá) s gravitačním zrychlením a přidává (ubírá) tíze pohybujícího se tělesa 3.

Pro výsledné zrychlení (libovolného bodu) tělesa platí známý vektorový vztah

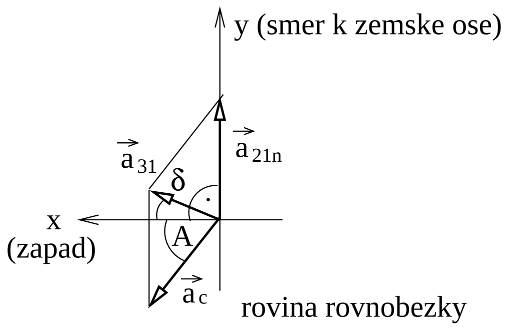
$$\vec{a}_{31} = \vec{a}_{21} + \vec{a}_{32} + \vec{a}_c \,.$$

Protože 32 je posuv po přímce konstantní rychlostí, je $\vec{a}_{32} = \vec{0}$. Zároveň ale pohyb 21 je rotace konstantní úhlovou rychlostí. Zrychlení tohoto pohybu má pouze normálovou (dostředivou) složku. Platí tedy

$$\vec{a}_{31} = \vec{a}_{21n} + \vec{a}_c \,. \tag{7}$$

Složka $\vec{a}_{21n}$ leží v rovině $\varphi-$té rovnoběžky a míří na zemskou osu. Pro její velikost platí

$$a_{21n} = r\omega_{21}^2 = R\omega_{21}^2 \cos\varphi = L\cos\varphi \,; \;\; L = 3.3373 \cdot 10^{-2}[\mathrm{m/s^2}] \,. \tag{8}$$



Obr.4 Rovina rovnoběžky

Složka $\vec{a}_c$ má velikost danou v (6) a sama leží v rovině $\varphi-$té rovnoběžky odchýlena o úhel A od západního směru. Situace tedy pro součet v (7) vypadá jako na obr.4. Vektory na pravé straně v (7) spolu svírají úhel $A + \frac{\pi}{2}$ na severní polokouli a $A + \frac{3\pi}{2} = A - \frac{\pi}{2}$ na jižní polokouli. Zavedeme–li do roviny $\varphi-$té rovnoběžky souřadnicový systém podle obr.4, dostáváme

promítnutím obou sčítanců v (7) do směrů tohoto systému pro velikost výsledného zrychlení

a_{31} a směrový úhel δ jeho nositelky od západního směru výrazy

$$a_{31} = \sqrt{(a_{21n} \mp a_c \sin A)^2 + a_c^2 \cos^2 A} = \sqrt{a_{21n}^2 + a_c^2 \mp 2a_{21n}a_c \sin A}\,;$$

$$\sin\delta = \frac{a_{21n} \mp a_c \sin A}{a_{31}}\,,\ \cos\delta = \frac{a_c \cos A}{a_{31}}\,. \tag{9}$$

Horní znaménka v těchto výrazech platí pro severní a spodní pro jižní polokouli. V těchto výrazech a_{21n} je dáno v (8), a_c v (6) a γ v (5).

Poznámka: I pro stav bez relativního pohybu ($v = 0$), kdy je $\vec{a}_{31} = \vec{a}_{21n}$, představuje pro relativně klidné těleso veličina $-m\vec{a}_{31}$ odstředivou sílu, jež způsobí v obecné poloze odklon výslednice této síly s gravitační silou od směru do středu Země. Pro relativně klidné těleso na rovníku tato odstředivá síla těleso pouze nadlehčuje. Toto nadlehčení pro těleso jednotkové hmotnosti činí L[N]. Jeho gravitační síla je přitom $g = 9.81$[N]. Tento jev způsobuje snižování tíhového zrychlení na rovníku o 0.033[m/s^2] oproti zrychlení na pólu. K tomuto jevu se v případě relativního pohybu vektorově přičítá vliv coriolisova zrychlení. V případě pohybu východním směrem (na rovníku) by se tíhové zrychlení ještě zmenšilo o $2\omega_{21}v$. Pro rychlost $v = 20$[m/s] to je o 0.00145[m/s^2].

Poznámka: V případě relativního pohybu severním směrem na severní polokouli má coriolisova síla $-m\vec{a}_c$ východní směr, což způsobí větší vymílání pravého břehu tímto směrem tekoucích řek. Pro pohyb jižním směrem by se více vymílal břeh levý. Pro řeky na jižní polokouli je situace obrácená. Jev je ovšem třeba zkoumat z hlediska výsledné setrvačné síly $-m\vec{a}_{31}$, jejíž velikost pro těleso jednotkové hmotnosti je dána v (9) a jejíž směr je opačný než je určeno v (9).