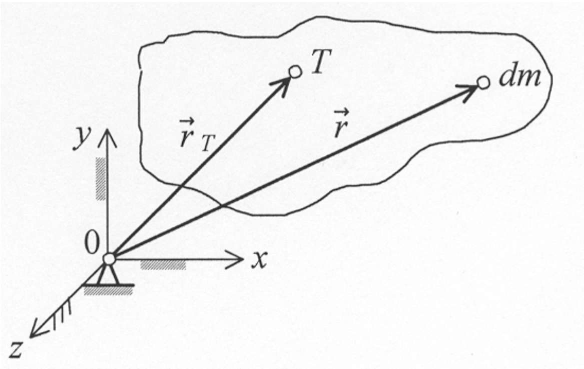
ROZLOŽENÍ HMOTNOSTI TĚLESA VZHLEDEM K SOUŘADNICOVÉMU SYSTÉMU



Zatímco hmotu hmotného bodu charakterizovala jediná fyzikální veličina, a sice hmotnost m, u tělesa je nutno kromě tohoto parametru znát polohu **středu hmotnosti** T a parametry definující **rozložení hmotnosti vůči zvolenému souřadnicovému systému** x, y, z s pevným počátkem 0. Z mechaniky I známe vztah pro polohový vektor $\vec{r}_T$ středu hmotnosti jako

$$m\vec{r}_T = \int_{(m)} \vec{r}\, dm\,. \qquad (1)$$

Polohový vektor $\vec{r}$ je proměnný podle polohy hmotového elementu dm (viz obr.). Integrujeme přes celý objem tělesa (obecně trojný integrál). Jestliže těleso je homogenní (s konstantní hustotou r), dostáváme z (1) po zkrácení hustotou

$$V\vec{r}_T = \iiint_{(V)} \vec{r}\, dx\, dy\, dz\,,$$

kde V je celkový objem tělesa. Pro souřadnici x, y, z vektoru $\vec{r}$ (obecně u) a souřadnici x_T, y_T, z_T vektoru $\vec{r}_T$ (obecně u_T) odtud dostáváme

$$V u_T = \iiint_{(V)} u\, dx\, dy\, dz\,. \qquad (2)$$

Rozložení hmotnosti vůči souřadnicovému systému popisujeme šesti veličinami, které uspořádáváme do tzv. **matice setrvačnosti** $\boldsymbol{I}_{x,y,z}$ příslušející k soustavě x, y, z tvaru

$$\boldsymbol{I}_{x,y,z} = \begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & I_z \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Jedná se o symetrickou čtvercovou matici řádu 3, která na hlavní diagonále obsahuje tzv. **osové momenty setrvačnosti k osám** po řadě x, y, z a mimo diagonálu obsahuje záporně vzaté **deviační momenty k rovinám** (dvojicím os) po řadě xy, xz a yz. Jednotkou (rozměrem) všech těchto veličin je $kg\, m^2$ a jejich definiční výrazy mají tvar

$$I_x = \int_{(m)} \left(y^2 + z^2\right) dm\,; \quad I_y = \int_{(m)} \left(x^2 + z^2\right) dm\,; \quad I_z = \int_{(m)} \left(x^2 + y^2\right) dm\,;$$

$$D_{xy} = \int_{(m)} xy\, dm; \quad D_{xz} = \int_{(m)} xz\, dm; \quad D_{yz} = \int_{(m)} yz\, dm\,. \qquad (4)$$

Pro homogenní tělesa hustoty r lze definiční vztahy přepsat jako

$$I_x = r\iiint_{(V)} \left(y^2 + z^2\right) dx\, dy\, dz\,; \quad I_y = r\iiint_{(V)} \left(x^2 + z^2\right) dx\, dy\, dz\,; \quad I_z = r\iiint_{(V)} \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy\, dz\,;$$

$$D_{xy} = r\iiint\limits_{(V)} xy\,dx\,dy\,dz\,; \quad D_{xz} = r\iiint\limits_{(V)} xz\,dx\,dy\,dz\,; \quad D_{yz} = r\iiint\limits_{(V)} yz\,dx\,dy\,dz\ .$$

Všechny integrály jsou obecně objemové (trojné).

***Poznámky*:**

1) Z předchozích definic ihned plyne, že hmotný bod o hmotnosti *m*, umístěný v souřadnicovém systému *x*, *y*, *z* v poloze dané souřadnicemi x_0, y_0, z_0, má matici setrvačnosti

$$\boldsymbol{I}_{x,y,z} = m\begin{bmatrix} x_0^2 & -x_0\,y_0 & -x_0\,z_0 \\ -x_0\,y_0 & y_0^2 & -y_0\,z_0 \\ -x_0\,z_0 & -y_0\,z_0 & z_0^2 \end{bmatrix}.$$

2) Pro tenké desky (rovinné útvary), umístěné v rovině *xy* zřejmě platí (protože $z \equiv 0$)

$$I_x = r\iint\limits_{(A)} y^2\,dx\,dy\,; \quad I_y = r\iint\limits_{(A)} x^2\,dx\,dy\,; \quad I_z = r\iint\limits_{(A)} \left(x^2+y^2\right)dx\,dy = I_x + I_y\,;$$

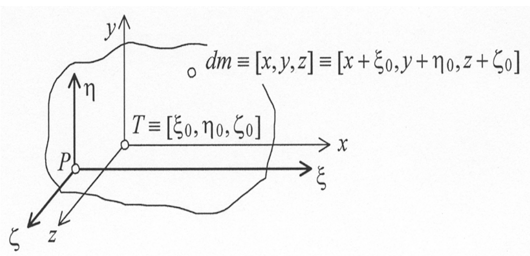
$$D_{xy} = \iiint\limits_{(A)} xy\,dx\,dy\,; \quad D_{xz} = D_{yz} = 0\,.$$

Zde r je měrná plošná hmotnost desky v $kg\,m^{-2}$. Integruje se pouze dvojným integrálem přes plochu *A* desky.

3) Jak u třírozměrných těles, tak u dvourozměrných desek lze často u jednoduchých útvarů vhodnou volbou integračního elementu „fyzikální cestou" převést trojný resp. dvojný integrál na integrál jednorozměrný.

4) Je-li těleso složeno z více dílčích útvarů, jsou prvky matice setrvačnosti dány algebraickými součty příslušných prvků pro tyto dílčí útvary. Jestliže se hmota odebere (odvrtá), nahrazuje se součet rozdílem.

Matice setrvačnosti závisí nejen na tělese samotném, nýbrž i na souřadnicovém systému. Při jeho změně se matice setrvačnosti mění (transformuje). Všimneme si nejprve transformace posunutím. Nechť souřadnicová soustava *x*, *y*, *z* má počátek ve středu hmotnosti *T* tělesa a soustava x, h, z rovnoběžně posunutých os s počátkem *P* (viz obr.). Střed hmotnosti nechť má v souřadnicovém systému x, h, z souřadnice x_0, h_0, z_0. Potom zřejmě podle definice platí



$$I_x = \int\limits_{(m)} \left(h^2+z^2\right)dm = \int\limits_{(m)} \left[\left(y+h_0\right)^2+\left(z+z_0\right)^2\right]dm = \int\limits_{(m)} \left(y^2+2yh_0+h_0^2+z^2+2zz_0+z_0^2\right)dm =$$

$$= \int\limits_{(m)} \left(y^2+z^2\right)dm + 2h_0\int\limits_{(m)} y\,dm + 2z_0\int\limits_{(m)} z\,dm + \left(h_0^2+x_0^2\right)\int\limits_{(m)} dm.$$

V tomto výraze je první sčítanec podle definice I_x, integrály ve druhém a třetím sčítanci jsou podle (2) nulové (protože $u_T = 0$) a $\int\limits_{(m)} dm = m$ (celková hmotnost tělesa) Celkem tedy

$$I_x = I_x + m\left(h_0^2 + x_0^2\right).$$

Cyklickou záměnou získáme a zcela analogicky dokážeme

$$I_h = I_y + m\left(x_0^2 + z_0^2\right),$$

$$I_z = I_z + m\left(x_0^2 + h_0^2\right).$$

Dokážeme analogické výrazy i pro deviační momenty. Podle definice je např.

$$D_{xh} = \int\limits_{(m)} x\, h\, dm = \int\limits_{(m)} (x + x_0)(y + h_0)\, dm = \int\limits_{(m)} (xy + x_0\, y + h_0\, x + x_0\, h_0)\, dm =$$

$$= \int\limits_{(m)} xy\, dm + x_0 \int\limits_{(m)} y\, dm + h_0 \int\limits_{(m)} x\, dm + x_0\, h_0 \int\limits_{(m)} dm = D_{xy} + m x_0\, h_0$$

protože vzhledem k (2) jsou integrály v prostředních dvou sčítancích, vzhledem k počátku systému *x, y, z* v těžišti, nulové. Cyklickou záměnou získáme

$$D_{xz} = D_{xz} + m x_0\, z_0,$$

$$D_{hz} = D_{yz} + m h_0\, z_0.$$

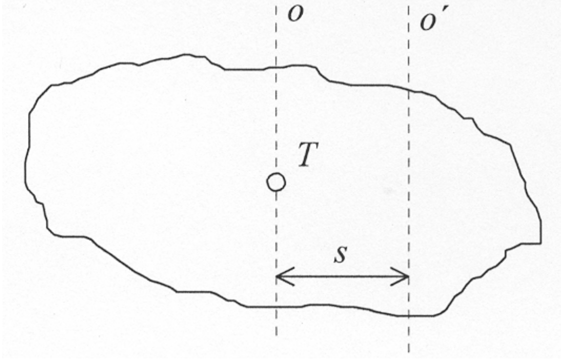
Dáme-li všechny získané výrazy dohromady do matic setrvačnosti, obdržíme vztah

$$\boldsymbol{I}_{x,h,z} = \boldsymbol{I}_{x,y,z} + m \begin{bmatrix} h_0^2 + z_0^2 & -x_0\, h_0 & -x_0\, z_0 \\ -x_0\, h_0 & x_0^2 + z_0^2 & -h_0\, z_0 \\ -x_0\, z_0 & -h_0\, z_0 & x_0^2 + h_0^2 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Odvozenému výrazu (5) říkáme **Steinerova věta**. Její důležitý předpoklad je, že počátek systému *x, y, z* je ve středu hmotnosti tělesa.

Poznámky:

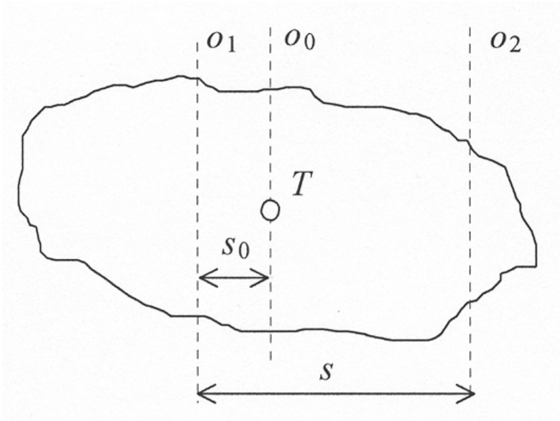
1) Protože podle Pythagorovy věty vždy součet kvadrátů souřadnic na diagonále matic ve vztahu (5) je kvadrát rovnoběžného přesunutí osy „pryč ze středu hmotnosti“, dostáváme specielně pro osové momenty setrvačnosti toto tvrzení: Nechť osa o prochází středem hmotnosti tělesa a osa o' je s ní rovnoběžná ve vzdálenosti *s*. Pak platí (viz obr.)



$$I_{o'} = I_o + m s^2, \qquad (6)$$

kde *m* je hmotnost tělesa. Osový moment setrvačnosti k ose procházející těžištěm je tedy minimální (výraz ms^2 je kladný).

2) Máme-li dvě rovnoběžné osy o_1 a o_2, z nichž žádná neprochází středem hmotnosti (viz obr.), závisí přepočet jejich momentů setrvačnosti nejen na jejich rovnoběžném přesunutí,



ale i na jejich poloze vůči středu hmotnosti tělesa. Je-li situace např. jako na obr., zavedeme s osami o_1 a o_2 rovnoběžnou osu o_0 procházející středem hmotnosti. Mezi o_0 a o_1, stejně jako mezi o_0 a o_2, platí Stejnerova věta (6). Platí tedy

$$I_{0_1} = I_{o_0} + m s_0^2 ,$$

$$I_{o_2} = I_{o_0} + m(s - s_0)^2 .$$

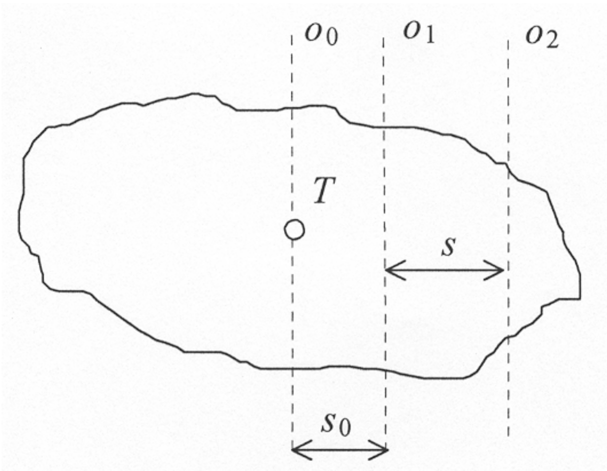
Odečtením těchto rovnic

$$I_{o_1} - I_{o_2} = m s_0^2 - m(s - s_0)^2 ,$$

odkud

$$I_{o_1} = I_{o_2} + m s(2s_0 - s)^2 .$$

Analogicky bychom odvodili vztah pro případ, že osy o_1, o_2 by obě ležely v jedné polovině



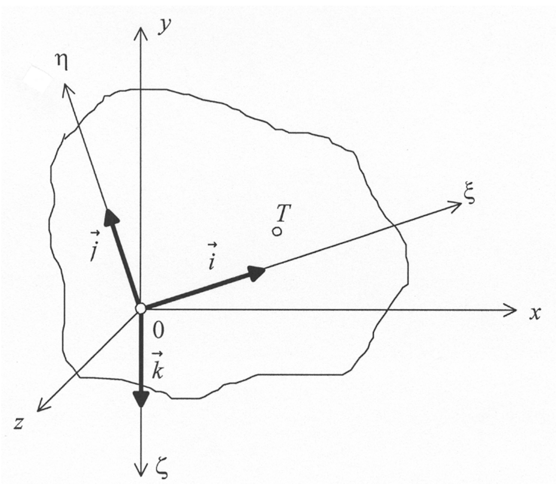
vyťaté doplněnou s nimi rovnoběžnou osou o_0. Platí totiž

$$I_{0_1} = I_{o_0} + m s_0^2 ,$$

$$I_{0_2} = I_{o_0} + m(s_0 + s)^2 .$$

Odečtením a úpravou odtud

$$I_{0_1} = I_{0_2} - m s(s + 2s_0) .$$



Bez důkazu uvedeme vztah pro transformaci matice setrvačnosti při natočení souřadnicového systému. Nechť k původní souřadnicové soustavě (viz obr.) x, y z vykazuje těleso matici setrvačnosti $\boldsymbol{I}_{x,y,z}$. Natočme kolem pevného počátku $0 \neq T$ soustavu do polohy x, h, z, tak, že známe souřadnice nových jednotkových vektorů $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ směrů souřadnicových os ve staré souřadnicové soustavě. Pak k nové soustavě x, h, z vykazuje těleso matici setrvačnosti $\boldsymbol{I}_{x,h,z}$ a platí

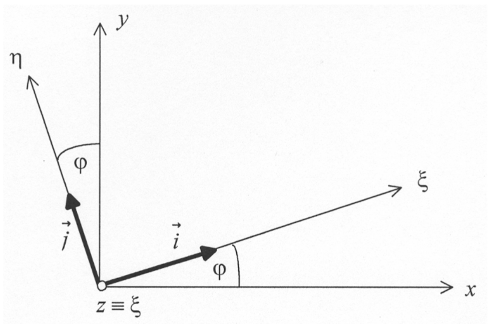
$$\boldsymbol{I}_{x,h,z} = \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{I}_{x,y,z} \boldsymbol{T} , \tag{7}$$

kde transformační matice ***T*** (ortonormální symetrická čtvercová matice řádu 3) má za sloupce souřadnice jednotkových vektorů os (po řadě) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ v systému *x, y, z*. Jestliže např. $u\,m$ označím úhel mezi kladně orientovanými osami $u(= x, y, z)$ a $m(= x, h, z)$, je matice ***T*** složena ze směrových kosinů těchto úhlů. Je totiž

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos\ (xx) & \cos\ (xh) & \cos\ (xz) \\ \cos\ (yx) & \cos\ (yh) & \cos\ (yz) \\ \cos\ (zx) & \cos\ (zh) & \cos\ (zz) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Index *T* ve vztahu (7) značí transpozici matice (tj. záměnu řádků za sloupce a naopak).

Častým případem bývá natočení kolem osy *z* (v rovině *xy*) o úhel j. Pak je (viz obr.) $\vec{i} = [\cos j, \sin j, 0]$; $\vec{j} = [-\sin j, \cos j, 0]$; $\vec{k} = [0, 0, 1]$.



Matice ***T*** má proto tvar

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos j & -\sin j & 0 \\ \sin j & \cos j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Z pravidel pro násobení matic je zřejmé, že prvek na místě (*m, n*) levé strany (7) získáme násobením *m*-té řádky matice $\boldsymbol{T}^T$ (tedy *m*-tého sloupce matice ***T*** zapsaného do řádky), celé matice $\boldsymbol{I}_{x,y,z}$ a *n*-tého sloupce matice ***T***. Vzhledem k uspořádání prvků v matici setrvačnosti tedy platí

$$I_x = \boldsymbol{i}^T \boldsymbol{I}_{x,y,z}\, \boldsymbol{i} ,$$

$$-D_{xh} = \boldsymbol{i}^T \boldsymbol{I}_{x,y,z}\, \boldsymbol{j}; \quad -D_{xz} = \boldsymbol{i}^T \boldsymbol{I}_{x,y,z}\, \boldsymbol{k}; \quad I_h = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{I}_{x,y,z}\, \boldsymbol{j} ; \tag{10}$$

$$-D_{hz} = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{I}_{x,y,z}\, \boldsymbol{k}; \quad I_z = \boldsymbol{k}^T \boldsymbol{I}_{x,y,z}\, \boldsymbol{k} ,$$

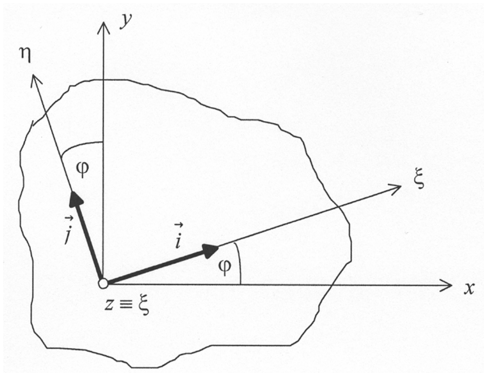
kde ***i, j, k*** jsou souřadnice vektorů $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ve starém systému, ovšem psány jako sloupcové matice (typu 3 x 1).

Jsou-li oba deviační momenty k rovinám obsahujícím danou osu nulové, nazýváme tuto osu **hlavní osou setrvačnosti**. Osa *x* je tedy hlavní, právě když $D_{xy} = D_{xz} = 0$, osa *y* je hlavní právě když $D_{xy} = D_{yz} = 0$. Podobně pro osu *z*. Platí velmi **užitečná postačující podmínka hlavnosti osy**: Nechť těleso má rovinu symetrie. Potom jakákoliv osa na tuto rovinu kolmá je hlavní. Toto tvrzení je zřejmé, protože je-li *xy* rovina symetrie tělesa, pak s jakýmkoliv elementem o souřadnicích *x, y, z* těleso obsahuje i element o souřadnicích *x, y, -z*. Proto $\int\limits_{(m)} xz\, dm = \int\limits_{(m)} yz\, dm = 0$ a osa *z* je podle definice hlavní.

Důsledek předchozího tvrzení: Jsou-li současně dvě souřadnicové roviny rovinami symetrie tělesa, jsou všechny tři souřadnicové osy hlavními osami (a matice setrvačnosti je pak diagonální).

Ověření: Nechť např. roviny *xy* a *yz* jsou rovinami symetrie tělesa. Podle předchozího tvrzení to znamená, že osa z a osa *x* jsou hlavní osy. To podle definice znamená, že $D_{xy} = D_{xz} = 0$ a $D_{zy}(= D_{zx}) = 0$. Všechny tři deviační momenty jsou nulové a matice setrvačnosti je diagonální.

Závěrem této kapitoly dokážeme, že každá deska v rovině *xy* pro libovolný počátek má trojici hlavních os setrvačnosti (viz obr.). Zřejmě osa *z* je (vzhledem k tomu, že rovina *xy* je rovinou symetrie desky) hlavní osou setrvačnosti. Proto jest



$$D_{xz} = D_{yz} = 0 .$$

Ovšem může být $D_{xy} \neq 0$. Matice $\boldsymbol{I}_{x,y,z}$ má tedy tvar

$$\boldsymbol{I}_{x,y,z} = \begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} & 0 \\ -D_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_x + I_y \end{bmatrix}.$$

Najdeme takové natočení j, aby $D_{xh} = 0$. Podle (10) a (9) je

$$0 = -D_{xh} = \boldsymbol{i}^T \boldsymbol{I}_{x,y,z} \boldsymbol{j} = [\cos j, \sin j, 0] \begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} & 0 \\ -D_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin j \\ \cos j \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= [I_x \cos j - D_{xy} \sin j, -D_{xy} \cos j + I_y \sin j, 0] \begin{bmatrix} -\sin j \\ \cos j \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -I_x \sin j \cos j + D_{xy} \sin^2 j - D_{xy} \cos^2 j + I_y \sin j \cos j =$$

$$= \frac{I_y - I_x}{2} 2 \sin j \cos j - D_{xy}\left(\cos^2 j - \sin^2 j\right).$$

Podle součtových vztahů pro goniometrické funkce je

$$2 \sin j \cos j = \sin 2j \, ; \quad \cos^2 j - \sin^2 j = \cos 2j \, .$$

Je tedy

$$0 = \sin 2j \, \frac{I_y - I_x}{2} - \cos 2j \cdot D_{xy},$$

odkud

$$tg 2j = \frac{2D_{xy}}{I_y - I_x}$$

a

$$j = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{2D_{xy}}{I_y - I_x} \right). \qquad (11)$$

Známe-li I_x, I_y a D_{xy} najdeme j tak, že $D_{x\,h} = 0$. Protože osa $z \equiv x$ se neměnila, je $D_{x\,z} = D_{h\,z} = 0$ a systém x, h, z je systém hlavních os setrvačnosti desky.

***Poznámky*:**

1) Existence hlavních os setrvačnosti lze dokázat i pro obecné těleso v libovolném bodě.
2) Prochází-li osa středem hmotnosti tělesa, nazývá se **centrální osou**. Je-li navíc hlavní, nazývá se **hlavní centrální osou setrvačnosti**.