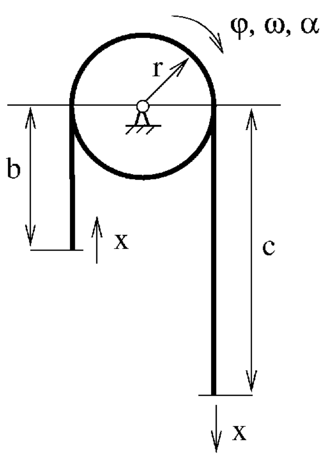
POHYB LANA A KLADKY PŘI UVAŽOVÁNÍ HMOTNOSTI LANA

SPECIFIKACE PROBLÉMU



Přes kladku poloměru r o osovém momentu setrvačnosti I_0 k ose rotace je přehozeno homogenní lano měrné délkové hmotnosti m. Soustava je puštěna z klidu z polohy kdy vpravo je odvinuto c metrů lana a vlevo b metrů $(c > b)$.Popište pohyb soustavy.

ŘEŠENÍ

Použijeme pohybovou rovnici rotačního pohybu kladky ve tvaru

$$I\,a = M\,. \tag{1}$$

Z kladkou současně rotuje lano o délce $p\,r$ (polovina obvodu hraniční kružnice kladky). Tato část má hmotnost $m = p\,r\,m$ a osový moment setrvačnosti k ose rotace $I_{lana} = m r^2$ (jak se snadno přesvědčíme z definice). Osový moment setrvačnosti rotujících hmot je proto

$$I = I_0 + I_{lana} = I_0 + p\;m\,r^3\,. \tag{2}$$

Vnější moment M je tvořen momentem tíhy převislých konců lana k ose rotace v obecné poloze lana dané výchylkou x ze startovací polohy (vlevo nahoru, vpravo dolu – viz obr.). Proto jest

$$M = r\,m\,g\,[(c+x)-(b-x)] = m\,r\,g\,[c-b+2x]\,. \tag{3}$$

Dosazením (2) a (3) do (1) dostaneme

$$\left(I_0 + p\;m\,r^3\right)a = m\,r\,g\,[c-b+2x]\,. \tag{4}$$

Protože lano po kladce neprokluzuje, platí při posuvu jeho konců o míru x pro úhel natočení kladky j vztah

$$r\,j = x\,.$$

Derivací podle času

$$r\,a = a = \frac{d^2x}{dt^2}\,, \tag{5}$$

kde a je zrychlení koncových bodů lana (zrychlení posuvného pohybu svislých partií lana). Dosazením (5) do (4) dostaneme po úpravě pohybovou rovnici posuvu svislých částí lana ve tvaru

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m\,r^2\,g}{I_0 + p\;m\,r^3}(c - b + 2x)\,.$$

Označíme-li konstantu

$$B = \frac{m\,r^2\,g}{I_0 + p\;m\,r^3}\,\left[s^{-2}\right] \;>\; 0\,, \tag{6}$$

přejde pohybová rovnice do tvaru

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2B\,x = B(c - b) = konst.\,, \tag{7}$$

kterou řešíme při triviálních počátečních podmínkách

$$x(0) = 0; \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0\,. \tag{8}$$

Jedná se o lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty a konstantní pravou stranou. Pro její obecné řešení platí

$$x(t) = x_H(0) + x_P(t)\,, \tag{9}$$

kde x_H je obecné řešení homogenní rovnice bez pravé strany a x_P odhadnuté jedno (tzv. partikulární) řešení (7) s pravou stranou. Homogenní řešení určíme přes charakteristickou rovnici. Ta má tvar

$$l^2 - 2B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l_{1,2} = \pm\sqrt{2B}\,.$$

Homogenní řešení píšeme proto ve tvaru

$$x_H(t) = C_1\,e^{\sqrt{2B}\,t} + C_2\,e^{\sqrt{2B}\,t} = D_1\cos\mathrm{h}\sqrt{2B}\;t + D_2\sin\mathrm{h}\sqrt{2B}\;t\,, \tag{10}$$

kde C_1, C_2 či D_1, D_2 jsou integrační konstanty, které na závěr určíme z počátečních podmínek. Protože nula není kořenem charakteristické rovnice, odhadujeme partikulární řešení také jako konstantu. Tato konstanta musí rovnici (7) splňovat. Musí tedy platit

$$x_P(t) \equiv \frac{b - c}{2}\,. \tag{11}$$

Dosazením (10) a (11) do (9) máme řešení (7) ve tvaru

$$x(t) = \frac{b - c}{2} + D_1\cos\mathrm{h}\sqrt{2B}\;t + D_2\sin\mathrm{h}\sqrt{2B}\;t\,. \tag{12}$$

Derivací

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2B}\,\left(D_1\cos\mathrm{h}\sqrt{2B}\;t + D_2\sin\mathrm{h}\sqrt{2B}\;t\right).$$

Dosazením času $t = 0$ do posledních dvou rovnic a zohledněním počátečních podmínek (8) obdržíme

$$\left.\begin{aligned} x(0) = 0 = \frac{b-c}{2} + D_1 \Rightarrow D_1 = \frac{c-b}{2} \\ \frac{dx}{dt}(0) = 0 = \sqrt{2B}\, D_2 \Rightarrow D_2 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

Dosazením (13) do (12) dostaneme konkrétní řešení, splňující zadané počáteční podmínky, jako

$$x(t) = \frac{b-c}{2}\left(1 - \cos\mathrm{h}\sqrt{2B}\,t\right).$$

Časovou derivací získáme rychlost posuvu svislé části lana

$$v(t) = \frac{c-b}{2}\,\sin\mathrm{h}\sqrt{2B}\,t\ ,$$

kde B je dáno v (6). Tím je řešen pohyb soustavy. Pro úhlovou rychlost w kladky platí $w(t) = \dfrac{v(t)}{r}$.