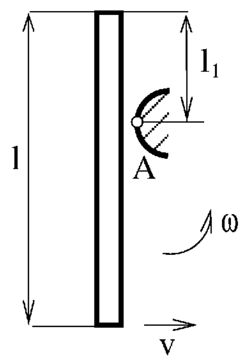
PLASTICKÝ RÁZ TYČE

SPECIFIKACE PROBLÉMU

Homogenní štíhlá tyč délky l se posouvá ve vodorovné rovině po přímce rychlostí v kolmou na tečnu k narážce. V místě daném parametrem l_1 (viz obr.) narazí na narážku plastickým rázem. Společný bod tyče i narážky zůstane v klidu a tyč začne rotovat úhlovou rychlostí w. Určete ji.

ŘEŠENÍ



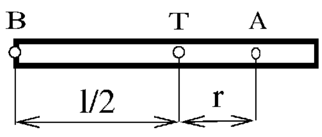
Protože v průběhu rázu působí na těleso pouze tíha a rázová reakce, podle věty o změně momentu hybnosti k ose procházející rázovým bodem A kolmo na rovinu pohybu, moment hybnosti tělesa k této ose se zachovává. Rázová reakce totiž tuto osu protíná a tíha je s ní rovnoběžná. Obě statické síly tedy mají k této ose nulový moment a proto i nulový impuls momentu v průběhu rázového děje. Uvažujme bez újmy na obecnosti, že $l_1 < \frac{l}{2}$. Vzhledem k homogenitě tyče její střed hmotnosti leží ve vzdálenosti $r = \frac{l}{2} - l_1$ od rázového bodu A. Hybnost $\vec{H}$ tělesa před rázem má směr rychlosti $\vec{v}$ a velikost mv. Vzhledem ke kolmému směru rychlosti k tečně k narážce je moment hybnosti k ose procházející bodem A kolmo na rovinu pohybu před rázem roven

$$L_1 = m v r = m v\left(\frac{l}{2} - l_l\right). \tag{1}$$

Po rázu těleso rotuje kolem výše popisované osy rotace úhlovou rychlostí w. Jeho moment hybnosti k této ose je proto

$$L_2 = I w, \tag{2}$$

kde I je osový moment setrvačnosti tyče k téže ose. Označíme-li I_X moment setrvačnosti tyče



k ose kolmé na rovinu pohybu procházející bodem X, dostaneme dvojnásobnou aplikací Steinerovy věty

$$I_B = I_T + m\left(\frac{l}{2}\right)^2; \quad I_A = I_T + m r^2 .$$

vyloučením I_T z této soustavy získáme

$$I_A = I = I_B + m\left[r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]. \tag{3}$$

Protože $I_B = m\frac{l^2}{3}$ a $r = \left(\frac{l}{2} - l_1\right)$ dostáváme dosazením do (3) po úpravě vztah

$$I = m\left(\frac{l^2}{3} + l_1^2 - l\,l_1\right). \tag{4}$$

Dosazením (4) do (2) má věta o zachování momentu hybnosti $L_1 = L_2$ vzhledem k (1) po zkrácení hmotností tělesa tvar

$$v\left(\frac{l}{2} - l_1\right) = w\left(\frac{l^2}{3} + l_1^2 - l\,l_1\right).$$

Odtud

$$w = \frac{3}{2}\frac{l - 2l_1}{l^2 - 3l\,l_1 + 3l_1^2}\,v\,. \tag{5}$$

Označíme-li

$$w_0 = \frac{v}{l}\,. \tag{6}$$

Dostáváme z (5) po úpravě

$$\frac{w}{w_0} = \frac{3}{2}\frac{l - 2l_1}{l - 3l_1 + 3\dfrac{l_1^2}{l}}\,.$$

Rozšířením zlomku na pravé straně tohoto vztahu výrazem $\dfrac{1}{l}$ a zavedením poměru

$$p = \frac{l_1}{l} \tag{7}$$

dostáváme konečný tvar

$$\frac{w}{w_0} = \frac{3}{2}\frac{1 - 2p}{1 - 3p + 3p^2}\,. \tag{8}$$

Tento bezrozměrný vztah platí pro libovolné rychlosti v a délky l tyče. Bezrozměrné parametry jsou definovány podle (6) a (7). Příslušná funkční závislost je uvedena v grafu.