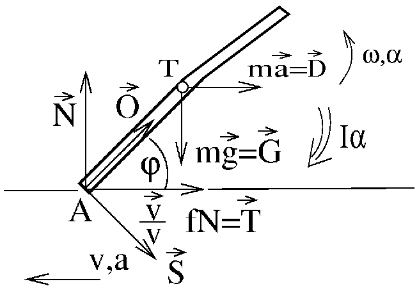
# PÁD TYČE NA REÁLNOU VODOROVNOU ROVINU

## SPECIFIKACE PROBLÉMU

Formulujte pohybové rovnice pádu homogenní štíhlé tyče délky *l*, která se se svým koncem dotýká drsné vodorovné roviny (koeficient tření *f*). Tyto rovnice připravte pro numerickou integraci v prostředí MATLAB.

## ŘEŠENÍ




Pohyb tyče bude zřejmě rovinný v rovině dané bodem *A* dotyku a vektorem tíhy. V bodě *A* působí normálová reakce *N* neznámé velikosti. Jedná se o pohyb se dvěma stupni volnosti. Souřadnice charakterizující polohu (včetně jejich orientace) jsou poloha bodu *A* – parametr *x* a úhel natočení tyče $j$ (viz obr.) Zmíněný rovinný pohyb rozložíme v bodě *A* (který není středem hmotnosti tyče) na unášivý posuv po vodorovné přímce se zrychlením ***a*** a druhotnou rotaci kolem osy kolmé na rovinu pohybu procházející bodem *A* s úhlovým zrychlením $a$ a úhlovou rychlostí $w$. Jediným setrvačným účinkem příslušejícím k unášivému posuvu je ve středu hmotnosti proti pohybu působící vodorovná setrvačná síla velikosti $D = m\,a$. Protože druhotná rotace je kolem necentrální osy, působí kromě setrvačné dvojice o velikosti $I\,a$ (proti smyslu zrychlení $a$) od druhotné rotace na tyč ještě dva silové setrvačné účinky, mající původ v kruhovém pohybu středu hmotnosti *T* kolem středu *A*. Jedná se o v bodě *A* působící odstředivou sílu velikosti $O = m l w^2$ a tečnou setrvačnou sílu (proti smyslu zrychlení $a$) o velikosti $S = m l a$. Statickými účinky jsou tíha ve středu hmotnosti o velikosti *mg*, normálová reakce *N* a třecí síla $T = f\,N$ proti smyslu pohybu působící v bodě *A*. Zmíněná rovinná soustava silových účinků je v rovnováze. Píšeme proto tři podmínky rovnováhy, z nichž alespoň jedna musí být momentová. Pišme složkové podmínky do vodorovného směru *x*, svislého směru *y* a momentovou podmínku k bodu *A*. Dostaneme tak rovnice

$$x:\quad ml w^2 \cos j + ml a \sin j + ma + fN = 0\,, \tag{1}$$

$$y:\quad ml w^2 \sin j - ml a \cos j + N - mg = 0\,, \tag{2}$$

$$A:\quad -m a l \sin j - m g l \cos j - \frac{4}{3} m l^2 a = 0\,. \tag{3}$$

Za moment setrvačnosti k ose procházející bodem *A* bylo dosazeno do (3) $I = \frac{1}{3} m (2l)^2$.

Z (2) plyne

$$N = m\left[g + l\left(a \cos j - w^2 \sin j\right)\right].$$

Dosazením do (1) po zkrácení hmotností získáme po dílčí úpravě

$$a = l\left[w^2 (-\cos j + f \sin j) - a (\sin j + f \cos j)\right] - f\,g\,. \tag{4}$$

Krácením $\frac{ml}{3}$ získáme ze (3) rovnici

$$-3a\sin j - 3g\cos j - 4l a = 0 . \qquad (5)$$

Z (4) a (5) je patrno, že obě pohybové rovnice jsou svázány pouze prostřednictvím zrychlení $a$. Dosazením (4) do (5) tak vznikne jediná pohybová rovnice tvaru

$$-3l\sin j \left[w^2(-\cos j + f\sin j) - a(\sin j + f\cos j)\right] + 3g(-\cos j + f\sin j) - 4l a = 0 .$$

Osamostatněním úhlového zrychlení odtud po úpravě plyne

$$a = \frac{3(-\cos j + f\sin j)\left(g - lw^2\sin j\right)}{l\left[-3\sin j\,(\sin j + f\cos j) + 4\right]} . \qquad (6)$$

Protože podle definice $w = \frac{dj}{dt}$ a $a = \frac{dw}{dt}$, převedeme tuto rovnici druhého řádu na soustavu dvou rovnic prvního řádu tvaru

$$\frac{dj}{dt} = w ,$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{3(-\cos j + f\sin j)\left(g - lw^2\sin j\right)}{l\left[-3\sin j\,(\sin j + f\cos j) + 4\right]} .$$

Tuto soustavu pro vektor neznámých $\mathbf{x} = [j, w]^T$ řešíme při počátečních podmínkách $j(0) = j_0;\ w(0) = 0$ (puštění z klidu). Pro $j_0 = \frac{p}{3}$ je úloha numericky řešena prostřednictvím procedury ODE v prostředí MATLAB. Pokud bychom chtěli znát i pohyb bodu dotyku, je třeba (6) a (4) řešit jako soustavu dvou rovnic druhého řádu. Zavedením funkcí $v$ (rychlosti) a $x$ (proběhnuté dráhy), kdy podle definice $a = \frac{dv}{dt},\ v = \frac{dx}{dt}$ , ji převedeme na soustavu čtyř rovnic prvního řádu

$$\frac{dj}{dt} = w ,$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{3(-\cos j + f\sin j)\left(g - lw^2\sin j\right)}{l\left[-3\sin j\,(\sin j + f\cos j) + 4\right]} \quad (= a) ,$$

$$\frac{dx}{dt} = v ,$$

$$\frac{dv}{dt} = l\left[w^2(-\cos j + f\sin j) - a(\sin j + f\cos j)\right] - fg .$$

Tuto soustavu pro vektor neznámých $\mathbf{x} = [j, w, x, v]$ řešíme při počátečních podmínkách $j(0) = j_0,\ w(0) = 0,\ x(0) = 0,\ v(0) = 0$.