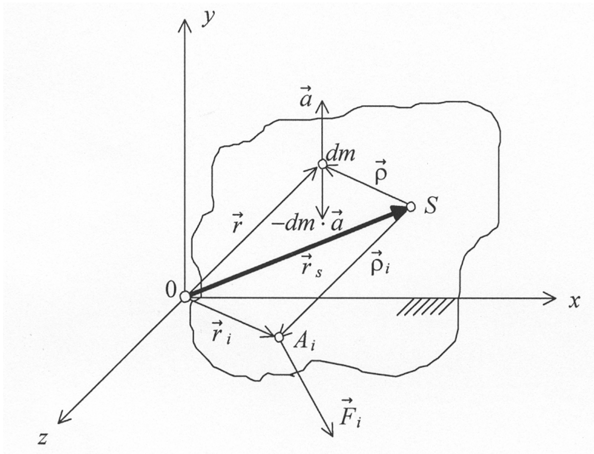
OBECNÉ ZÁKONY DYNAMIKY TĚLESA S APLIKACÍ NA ROVINNÝ POHYB

SPECIFIKACE PROBLÉMU

Mějme obecným pohybem se pohybující těleso (viz obr.) o středu hmotnosti S (polohový vektor $\vec{r}_s$ k nehybnému počátku 0 souřadnicové soustavy x, y, z), na které v bodech A_i (polohové vektory $\vec{r}_i$ vzhledem k 0) působí statické síly $\vec{F}_i$ (i = 1, .., n).

ŘEŠENÍ

Vytkněme na tělese libovolný element hmotnosti dm (polohový vektor $\vec{r}$ vzhledem k počátku 0 a polohový vektor $\vec{r}$ vzhledem ke středu hmotnosti S). Tento element (bod) se pohybuje s okamžitým zrychlením $\vec{a}$.



Podle 2. Newtonova principu na element působí elementární dynamická (setr-vačná) síla

$$d\vec{D} = -\vec{a}\,dm\,.$$

Přesuňme tuto sílu na rovnoběžnou nositelku do počátku 0 za současného připojení elementární silové dvojice (základní věta statiky - Mechanika I)

$$d\vec{M} = -\vec{r} \times \left(\vec{a}\,dm\right).$$

Vzniklé elementární síly a dvojice od všech elementů sečteme (tj. z integrujeme). V nehybném počátku 0 jsme tedy setrvačné účinky nahradili výslednou dynamickou (setrvačnou) silou

$$\vec{D} = \int_{(m)} d\vec{D} = -\int_{(m)} \vec{a}\,dm \tag{1}$$

a setrvačnou dvojicí

$$\vec{M} = -\int_{(m)} d\vec{M} = -\int_{(m)} \vec{r} \times \left(\vec{a}\,dm\right). \tag{2}$$

Podle D´Alembertova principu jsou setrvačné a statické účinky v rovnováze. Platí tedy (statické síly $\vec{F}_i$ rovněž přesouváme do počátku 0 za připojení příslušných dvojic)

$$\sum_i \vec{F}_i + \vec{D} = \vec{0}; \quad \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) + \vec{M} = \vec{0}\,. \tag{3}$$

Derivujeme-li nyní definici středu hmotnosti (3.1) podle času, dostáváme při konstantní hmotnosti postupně

$$m\vec{v}_s = \int_{(m)} \vec{v}\,dm = \int_{(m)} d\vec{H} = \vec{\boldsymbol{H}}\,,$$

což je vlastně analogie první věty o pohybu středu hmotnosti soustavy hmotných bodů, platná pro těleso (jakožto nekonečnou soustavu bodů). Další časovou derivací dostaneme

$$m\vec{a}_s = \int_{(m)} \vec{a}\,dm = -\vec{D} = \sum_i \vec{F}_i \tag{4}$$

podle (1) a (3). Vzniklý výraz nám dává dva výsledky:

1) Říká, že výsledná setrvačná síla (v nehybném počátku) je záporně vzatý hmotnostní násobek zrychlení středu hmotnosti tělesa. Podle tohoto zrychlení určujeme tedy setrvačnou sílu.
2) Rovnici

$$m\vec{a}_s = \sum_i \vec{F}_i$$

lze chápat jako vektorovou silovou pohybovou rovnici pohybu tělesa, protože jejím rozepsáním do směrů souřadnicových os určujeme (při znalosti zatížení $\vec{F}_i$) pohyb středu hmotnosti tělesa.

Vyjádřeme nyní vektor momentu hybnosti tělesa $\vec{L}_0$ k nehybnému počátku. Podle definice je

$$\vec{L}_0 = \int_{(m)} (\vec{r}\times\vec{v})\,dm\,. \tag{5}$$

Z obrázku je zřejmé, že $\vec{r} = \vec{r}_s + \vec{r}$, takže časovou derivací odtud $\vec{v} = \vec{v}_s + \vec{v}_r$, kde $\vec{v}_r$ je relativní rychlost elementu tělesa vůči pohybujícímu se středu hmotnosti. Dosazením do předchozího výrazu dostáváme postupně

$$\begin{aligned}\vec{L}_0 &= \int_{(m)} (\vec{r}_s + \vec{r})\times(\vec{v}_s + \vec{v}_r)\,dm = \int_{(m)} (\vec{r}_s\times\vec{v}_s)\,dm + \int_{(m)} (\vec{r}_s\times\vec{v}_r)\,dm + \int_{(m)} (\vec{r}\times\vec{v}_s)\,dm + \\ &+ \int_{(m)} (\vec{r}\times\vec{v}_r)\,dm = (\vec{r}_s\times\vec{v}_s)\int_{(m)} dm + \vec{r}_s\times\int_{(m)} \vec{v}_r\,dm + \int_{(m)} \vec{r}\,dm\times\vec{v}_s + \int_{(m)} (\vec{r}\times\vec{v}_r)\,dm,\end{aligned} \tag{6}$$

protože $\vec{r}_s$ a $\vec{v}_s$ jsou na elementu *dm* nezávislé vektory. První sčítanec (6) upravíme jako

$$(\vec{r}_s\times\vec{v}_s)\int_{(m)} dm = \vec{r}_s\times m\vec{v}_s = \vec{r}_s\times\vec{H}$$

podle 1. věty o pohybu středu hmotnosti. Druhý a třetí sčítanec jsou nulové, protože podle definice středu hmotnosti je

$$\int_{(m)} \vec{r}\,dm = m\,\vec{r}_s \Rightarrow \int_{(m)} \vec{v}_r\,dm = m\vec{v}_{sr}\,,$$

kde $\vec{r}_s$ je polohový vektor středu hmotnosti vzhledem ke středu hmotnosti (nulový vektor) a $\vec{v}_{sr}$ je relativní rychlost středu hmotnosti vůči středu hmotnosti (také nulový vektor). Poslední sčítanec (6), označíme jako

$$\vec{L}_s = \int_{(m)} (\vec{r}\times\vec{v}_r)\,dm \tag{7}$$

a má význam momentu hybnosti tělesa vzhledem k pohybujícímu se středu hmotnosti. Celkem po dosazení do (6) vznikne

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_s \times \vec{H} + \vec{L}_s . \qquad (8)$$

Moment hybnosti tělesa k nehybnému počátku je (vektorovým) součtem momentu hybnosti tělesa soustředěného do středu hmotnosti a momentu hybnosti vůči pohybujícímu se středu hmotnosti.

Nyní spočítáme moment hybnosti $\vec{L}_s$. Jestliže rozklad $\vec{v} = \vec{v}_s + \vec{v}_r$ je základní, je druhotná rychlost $\vec{v}_s$ rychlost sférického pohybu se středem ve středu hmotnosti. Existuje tedy vektor $\vec{w}$ úhlové rychlosti tohoto pohybu tak, že $\vec{v}_r = \vec{w} \times \vec{r}$ (viz Mechanika I – kinematika). Dosazením do (7) máme

$$\vec{L}_s = \int_{(m)} [\vec{r} \times (\vec{w} \times \vec{r})] dm = \vec{w} \int_{(m)} r^2 \, dm - \int_{(m)} \vec{r} (\vec{w} \cdot \vec{r}) dm . \qquad (9)$$

Zde bylo použito základního vztahu pro úpravu dvojného vektorového součinu $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, přičemž $\vec{a} = \vec{c} = \vec{r}$, $\vec{b} = \vec{w}$. Symbolem „x“ je označován vektorový součin, symbolem „.“ skalární součin a bez symbolu násobek vektoru skalárem. Navíc vektor $\vec{w}$ je společný pro celé těleso (nezávislý na elementu), takže jej lze vytknout před integrál. Vezměme nyní souřadnicový systém x, h, z s osami rovnoběžnými s nehybným systémem *x, y, z,* který má počátek ve středu hmotnosti a posouvá se s ním. V tomto systému nechť $\vec{w} = [w_x, w_h, w_z]$; $\vec{r} = [x, h, z]$; $\vec{L}_s = [L_{sx}, L_{sh}, L_{sz}]$. Rozpisem posledního vektorového vztahu (9) do takto definovaných složek máme

$$L_{sx} = w_x \int_{(m)} (x^2 + h^2 + z^2) dm - \int_{(m)} x (x w_x + h w_h + z w_z) dm ,$$

$$L_{sh} = w_h \int_{(m)} (x^2 + h^2 + z^2) dm - \int_{(m)} h (x w_x + h w_h + z w_z) dm ,$$

$$L_{sz} = w_z \int_{(m)} (x^2 + h^2 + z^2) dm - \int_{(m)} z (x w_x + h w_h + z w_z) dm .$$

Roznásobením a sečtením integrandů odtud

$$L_{sx} = w_x \int_{(m)} (h^2 + z^2) dm - w_h \int_{(m)} x h \, dm - w_z \int_{(m)} x z \, dm ,$$

$$L_{sh} = w_h \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm - w_x \int_{(m)} x h \, dm - w_z \int_{(m)} h z \, dm ,$$

$$L_{sz} = w_z \int_{(m)} (x^2 + h^2) dm - w_x \int_{(m)} x z \, dm - w_h \int_{(m)} h z \, dm .$$

Podle definice osových momentů setrvačnosti a deviačních momentů odtud

$$L_{sx} = I_x w_x - D_{xh} w_h - D_{xz} w_z ,$$

$$L_{sh} = -D_{xh} w_x + I_h w_h - D_{hz} w_z ,$$

$$L_{sz} = -D_{xz} w_x - D_{hz} w_h + I_z w_z .$$

Vzhledem k maticovému násobení, zavedením matice setrvačnosti $\boldsymbol{I}_{x,h,z}$ a (sloupcových) vektorů $\boldsymbol{L}_s = [L_{sx}, L_{sh}, L_{sz}]^T$ a $\boldsymbol{\omega} = [w_x, w_h, w_z]$ máme

$$\boldsymbol{L}_s = \boldsymbol{I}\ \boldsymbol{\omega}\,. \tag{10}$$

Vektor momentu hybnosti k posouvajícímu se středu hmotnosti je dán maticovým násobkem matice setrvačnosti a vektorem úhlové rychlosti (okamžité) relativního sférického pohybu. Oba vektory i matice jsou vyjádřeny v systému s počátkem v (pohybujícím se) středu hmotnosti s osami rovnoběžnými s nehybným systémem *x, y, z.*

Derivujme nyní (5) podle času. Získáme

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \int_{(m)} (\vec{v} \times \vec{v})\, dm + \int_{(m)} (\vec{r} \times \vec{a})\, dm\,.$$

První sčítanec jest však nulový, jakožto vektorový součin kolineárních vektorů. Druhý sčítanec upravíme postupně podle (2) a (3). Získáme tak

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = -\vec{M} = \sum_i \left(\vec{r} \times \vec{F}_i\right). \tag{11}$$

Vzniklý výraz nám dává opět dva výsledky:

1) Setrvačná dvojice při náhradě v nehybném počátku je záporně vzatá časová derivace momentu hybnosti tělesa k onomu počátku.
2) Rovnici

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum_i \left(\vec{r} \times \vec{F}_i\right)$$

lze chápat jako vektorovou momentovou pohybovou rovnici, z níž rozepsáním do obecně tří os určujeme při znalosti zatížení veličiny popisující moment hybnosti $\vec{L}_0$.

Derivujeme nyní podle času výraz (8). Získáme

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{v}_s \times m\vec{v}_s + \vec{r}_s \times m\vec{a}_s + \frac{d\vec{L}_s}{dt}\,. \tag{12}$$

První sčítanec je nulový (vektorový součin kolineárních vektorů). Druhý sčítanec má podle (4) hodnotu

$$\vec{r}_s \times m\vec{a}_s = \vec{r}_s \times \sum_i \vec{F}_i\ .$$

Dosadíme-li tento výraz a (11) do (12) obdržíme

$$\sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) = \vec{r}_s \times \sum_i \vec{F}_i + \frac{d\vec{L}_s}{dt}\,,$$

odkud

$$\frac{d\vec{L}_s}{dt} = \sum_i \left[\left(\vec{r}_i - \vec{r}_s\right) \times \vec{F}_i\right] = \sum_i \left(\vec{r}\,'_i \times \vec{F}_i\right) \tag{13}$$

vzhledem k obrázku na straně sedm. Podle D´Alembertova principu je pravá strana (13) setrvačnou dvojicí $-\vec{M}_s$ při náhradě elementárních setrvačných sil v pohybujícím se středu hmotnosti. Výraz (13) lze též chápat jako vektorovou momentovou pohybovou rovnici, ze které při znalosti zatížení určíme parametry druhotného sférického pohybu.

Závěrem odvoďme ještě vztahy pro výpočet kinetické energie pohybujícího se tělesa při rozkladu ve středu hmotnosti *S*. Podle definice $E_k = \int\limits_{(m)} d\,E_k = \frac{1}{2}\int\limits_{(m)} v^2\, dm$. Po dosazení vztahu pro rychlost elementu ze základního rozkladu v těžišti postupně máme

$$E_k = \frac{1}{2}\int\limits_{(m)} (\vec{v}_s + \vec{v}_r)\cdot(\vec{v}_s + \vec{v}_r)\,dm = \frac{1}{2}\left[v_s^2 \int\limits_{(m)} dm + 2\vec{v}_s \cdot \int\limits_{(m)} \vec{v}_r\, dm + \int\limits_{(m)} v_r^2\, dm\right],$$

protože rychlost těžiště nezávisí na poloze elementu a tedy je ji možno vytknout před integrál. Druhý sčítanec předchozího výrazu je nulový, protože derivací definičního vztahu pro polohu středu hmotnosti máme

$$\int \vec{v}_r\, dm = \vec{v}_{r\,s}\, m$$

a $\vec{v}_{r\,s} = \vec{0}$, jakožto relativní rychlost těžiště (vzhledem k těžišti). Poslední vztah pro kinetickou energii proto přepíšeme jako

$$E_k = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2}\int\limits_{(m)} v_r^2\, dm\,. \qquad (14)$$

Výraz vyjadřuje tzv. **Königovu větu:** Kinetická energie tělesa při základním rozkladu ve středu hmotnosti (oba předpoklady jsou nutné) je rovna součtu kinetické energie od unášivého posuvu (chápán jako pohyb bodu s hmotností soustředěnou do *S*) a kinetické energie druhotného sférického pohybu. Vyjádříme ještě tuto veličinu. Dosazením $\vec{v}_r = \vec{w}\times\vec{r}$ jen do jednoho činitele a úpravou získáme

$$\frac{1}{2}\int\limits_{(m)} v_s^2\, dm = \frac{1}{2}\int\limits_{(m)} \vec{v}_r \cdot (\vec{w}\times\vec{r})\,dm = \frac{1}{2}\vec{w}\cdot\int\limits_{(m)} (\vec{r}\times\vec{v}_r)\,dm\,.$$

Použili jsme přitom vztahu pro úpravu skalárně – vektorového součinu ve tvaru $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$. Integrál vpravo je podle (7) $\vec{L}_s$. Proto $\frac{1}{2}\int\limits_{(m)} v_r^2\, dm = \frac{1}{2}\vec{w}\cdot\vec{L}_s$ a po dosazení do Königovy věty (14)

$$E_k = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}_s\,.$$

Uvážíme-li vektory $\vec{w}$ a $\vec{L}_s$ ve tvaru sloupcových vektorů (matic), lze předchozí výraz přepsat na

$$E_k = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\, \mathbf{L}_s\,.$$

Po dosazení z (10) konečně

$$E_k = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\, \boldsymbol{I}\, \boldsymbol{\omega}\,. \qquad (15)$$

Druhý sčítanec je kvadratická forma v souřadnicích vektoru $\boldsymbol{\omega}$ s maticí setrvačnosti jakožto maticí této kvadratické formy. Protože výsledkem je skalár, jenž jest nezávislý na volbě souřadnicového systému, platí (15) ať už $\boldsymbol{I}$ a $\boldsymbol{\omega}$ je vyjádřeno v pevném nebo s tělesem spojeném souřadnicovém systému.

APLIKACE PRO ROVINNÉ POHYBY TĚLESA

Řešíme-li pohyb tělesa, postupujeme (podobně jako u bodu) metodou uvolňování. Uvolníme myšlenými řezy těleso od jeho vazeb k rámu a podle vazeb (v rovině rotační, valivá, posuvná a obecná) připojíme příslušné nezávislé složky reakcí. Dále těleso zatížíme statickými akčními účinky (tíhy, třecí účinky, atd.) a podle druhu pohybu připojíme dynamické setrvačné účinky. Statické a dynamické účinky tvoří rovnovážnou silovou soustavu. Podle typu silové soustavy formulujeme patřičný počet podmínek rovnováhy (některé jsou povinně momentové – viz MECHANIKA I). Matematickým vyloučením reakcí z těchto podmínek získáme tzv. **vlastní pohybové rovnice**. Je jich tolik, kolik má těleso stupňů volnosti a jsou to diferenciální rovnice. Jejich vyřešením získáme kinematické veličiny (výchylky, rychlosti, zrychlení) dokonale popisující pohyb tělesa v libovolném čase. Při znalosti těchto kinematických veličin (tedy až při znalosti pohybu), z algebraických rovnic vzniklých vylučováním reakcí, lze získat časové závislosti reakcí ve vazbách. Je tedy patrno, že jak pro řešení pohybu, tak pro řešení reakcí, je nutno znát setrvačné účinky na těleso působící. Pro rovinný pohyb tělesa se vyjádřením setrvačných účinků, podle druhu pohybu, s ohledem na výsledky obecné kapitoly, budeme dále zabývat.

1. POSUVNÝ POHYB

V tomto případě nahradíme elementární setrvačné účinky na jednotlivé body ve středu hmotnosti (pohybujícím se). V tomto bodě podle (4) působí setrvačná síla $\vec{D}$. Při tomto pohybu má směr totožný jako zrychlení tělesa (všechny body při posuvu mají stejná zrychlení), smysl opačný než zrychlení a velikost $D = m\,a$. Zrychlení středu hmotnosti (stejně jako všech ostatních bodů) má složky podle křivky, po které se těleso posouvá. Např. při posuvu po kružnici je $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$, kde $\vec{a}_t$ je tečná složka zrychlení o velikosti $a_t = r\,\alpha$ a normálová (dostředivá) složka zrychlení $\vec{a}_n$ má velikost $a_n = r\omega^2$, přičemž r je poloměr kružnice, po níž se těleso posouvá úhlovou rychlostí ω a úhlovým zrychlením α. Příslušné setrvačné účinky jsou tečná setrvačná síla $T = m\,r\,\alpha$, (proti α) a odstředivá síla $O = m\,r\,\omega^2$ (od středu kružnice). Obě síly působí ve středu hmotnosti tělesa.

2. ROTACE KOLEM HLAVNÍ CENTRÁLNÍ OSY SETRVAČNOSTI

Protože osa rotace je centrální, střed hmotnosti se nepohybuje. Jest proto $\vec{a}_s = \vec{o}$ a podle (4) je $\vec{D} = \vec{o}$. Na takto se pohybující těleso působí pouze setrvačná dvojice. Volíme-li střed hmotnosti za počátek nehybné soustavy *x, y, z*, jest podle (13) tato dvojice

$$-\vec{M}_{DS} = \frac{d\vec{L}_s}{dt}. \tag{16}$$

Nechť osa rotace je osa *x*. Volme ještě souřadnicový systém $\xi\,(\equiv x), \eta, \zeta$ jenž bude pevně spojený s tělesem (bude s ním rotovat). Vyjádříme-li vektory $\vec{L}_s$ a $\vec{\omega}$, jakož i matici setrvačnosti $\boldsymbol{I}_{\xi,\eta,\zeta}$ v tomto systému, dostaneme podle (10)

$$\boldsymbol{L}_s = \boldsymbol{I}_{x,h,z}\ \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_h & -D_{hz} \\ 0 & -D_{hz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

protože x je hlavní osa setrvačnosti, a tudíž $D_{xh} = D_{xz} = 0$ a zároveň osa x je osou rotace, takže vektor $\vec{w}$ má pouze x - ovou složku rovnou w. Je tedy

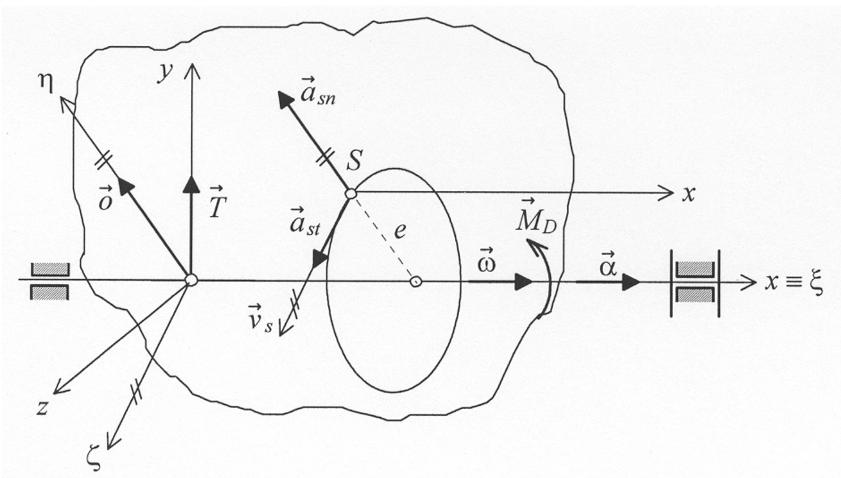
$$\boldsymbol{L}_s = \begin{bmatrix} I_x\, w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Podle (16) je nutno $\vec{L}_s$ derivovat podle času ovšem jakoby $\vec{L}_s$ bylo vyjádřeno v nepohyblivé (nebo jen posouvající se) souřadnicové soustavě. Naše soustava však rotuje. Protože rotace se děje kolem osy $x \equiv x$, která při rotaci nemění svůj jednotkový vektor, má derivace (17) v systému x, h, z stejný tvar jako v systému *x, y, z*. Setrvačná dvojice podle (16) a (17) působí kolem osy rotace x a má velikost $I_x\ a$ a smysl proti kótování úhlového zrychlení.

Kinetická energie je podle Königovy věty pro $\vec{v}_s = \vec{o}$ rovna $E_k = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{I}\, \boldsymbol{\omega}$ takže po vyjádření $\boldsymbol{I}$ i $\boldsymbol{\omega}$ v systému x, h, z odtud

$$E_k = \frac{1}{2} I_\xi\, \omega^2 . \tag{18}$$

3. ROTACE KOLEM HLAVNÍ OSY SETRVAČNOSTI



Střed hmotnosti není na ose rotace, nýbrž je od ní vzdálen o vzdálenost *e*. Proto se tento bod pohybuje po kružnici se středem na ose rotace o poloměru *e*. Podle (4) setrvačná síla (nahrazena v nehybném bodě na ose ≡ počátkem souřadnicového systému *x, y, z*) $\vec{D} = -m\vec{a}_s$. Zrychlení středu hmotnosti $\vec{a}_s$ má při zmíněném pohybu 2 složky $\vec{a}_s = \vec{a}_{st} + \vec{a}_{sn}$. Tečná složka má velikost $a\, e$ a smysl přírůstku a. Normálová složka (dostředivé zrychlení) má velikost ew^2 a smysl do středu kružnice, po které se pohybuje střed hmotnosti. Těmto složkám zrychlení budou odpovídat příslušné složky setrvačné síly. Jedná se o **tečnou setrvačnou sílu**

$\vec{T}$ o velikosti $T = mea$ proti přírůstku a **odstředivou sílu** $\vec{O}$ o velikosti $O = mew^2$ jdoucí od středu kružnice, po níž se pohybuje střed hmotnosti. Obě síly jsou nahrazeny v nehybném počátku souřadnicového systému *x, y, z* (**a tedy nikoliv ve středu hmotnosti**). Protože osa rotace je hlavní osou setrvačnosti, určíme stejně jako v předchozím odstavci, že setrvačná dvojice je $\vec{M}_D = -I_x \vec{a}$ kolem osy *x*. Osa *x* ($\equiv x$ - viz odstavec výše) však neprochází středem hmotnosti. Při znalosti momentu setrvačnosti k ose procházející středem hmotnosti je třeba pro přepočet použít Steinerovu větu. Kinetická energie je podle Königovy věty rovna

$$E_k = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} I_{x'} w^2,$$

kde $\vec{v}_s$ je rychlost středu hmotnosti a w úhlová rychlost druhotné rotace při rozkladu v *S*. Moment setrvačnosti I_x jest k ose *x´* jdoucí rovnoběžně s *x* středem hmotnosti. Zřejmě $v_s = ew$ takže

$$E_k = \frac{1}{2}\left(me^2 + I_{x'}\right) w^2 .$$

Podle Steinerovy věty však $me^2 + I_{x'} = I_x$. Proto pro kinetickou energii platí stejný vztah (18), ovšem osový moment setrvačnosti je ke skutečné ose rotace (tedy k ose zde neprocházející středem hmotnosti).

4. ROTACE KOLEM OBECNÉ OSY

Protože osa rotace není centrální, působí ve zvoleném počátku na ose rotace (viz obr.) tečná setrvačná síla $\vec{T}$ a odstředivá síla $\vec{o}$ od kruhového pohybu středu hmotnosti stejně jako v předchozím odstavci. Setrvačná dvojice však podle (13) má tvar

$$-\vec{M}_D = \frac{d\vec{L}_o}{dt} . \qquad (19)$$

Jestliže zavedeme souřadnicový systém x, h, z spojený s tělesem (viz obr. – osa $x \equiv x$ je osou rotace), má matice setrvačnosti vůči němu, protože osa x není hlavní, obecný tvar. Podle (10), který můžeme ve stejném tvaru odvodit i pro souřadnicovou soustavu neprocházející středem hmotnosti, je v systému x, h, z .

$$L_o = \boldsymbol{I}_{xhz}\, w = \begin{bmatrix} I_x & -D_{xh} & -D_{xz} \\ -D_{xh} & I_h & -D_{hz} \\ -D_{xz} & -D_{hz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x w \\ -D_{xh} w \\ -D_{xz} w \end{bmatrix}, \qquad (20)$$

protože vektor $\vec{w}$ má opět pouze x - ovou složku. Moment hybnosti má však nyní všechny tři složky. Derivaci (19) je proto nutno provést včetně derivace pohybujících se jednotkových vektorů směrů os h a z . V kinematice byl odvozen výraz pro derivaci vektoru $\vec{c}$ v rotujícím souřadnicovém systému (úhlovou rychlostí $\vec{w}$) ve tvaru

$$\left.\frac{d\vec{c}}{dt}\right|_{x,y,z} = \left.\frac{d\vec{c}}{dt}\right|_{x,h,z} + \vec{w} \times \vec{c} .$$

Použitím vztahu pro vektor momentu hybnosti $\vec{L}_o$ v (20) máme

$$\left.\frac{d\vec{L}_o}{dt}\right|_{x,y,z} = -\vec{M}_D = \left.\frac{d\vec{L}_o}{dt}\right|_{x,h,z} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ w & 0 & 0 \\ I_x w & -D_{xh} w & -D_{xz} w \end{vmatrix},$$

kde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jsou po řadě jednotkové vektory směrů nepohyblivých souřadnicových os. Rozpisem determinantu podle prvků prvního řádku odtud dostáváme

$$-\vec{M}_D = \begin{bmatrix} I_x a \\ -D_{xh} a \\ -D_{xz} a \end{bmatrix} + \vec{j} D_{xz} w^2 - \vec{k} D_{xh} w^2 .$$

Proto

$$\vec{M}_D = \begin{bmatrix} -I_x a \\ D_{xh} a - D_{xz} w^2 \\ D_{xz} a + D_{xh} w^2 \end{bmatrix}. \qquad (21)$$

Na těleso rotující kolem obecné osy působí pět složek setrvačných účinků. Tečná setrvačná síla $\vec{T}$, odstředivá síla $\vec{o}$ (viz výše) a tři složky setrvačné dvojice do směrů os rotujících s tělesem o velikostech (včetně znamének) daných v (21).

Poznámka: Častým případem je stav, kdy osa rotace x sice není hlavní, ale osa z ano. Jedná se např. o rotaci tyčí či desek umístěných do roviny x, h (obecněji o rotaci těles, pro něž je rovina x, h rovinou symetrie). Pak $D_{xz} = 0$ a setrvačná dvojice má tvar

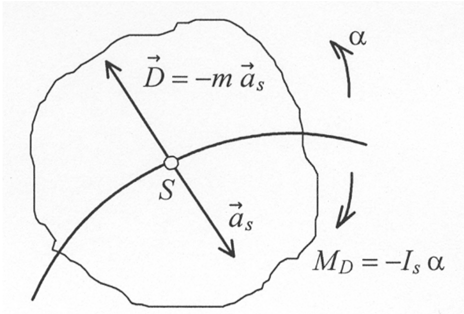
$$\vec{M}_D = \begin{bmatrix} -I_x a \\ D_{xh} a \\ D_{xh} w^2 \end{bmatrix}.$$

Jedná-li se navíc o rovnoměrnou rotaci $(a = 0)$, působí jediná složka setrvačné dvojice kladně kolem osy z o velikosti $D_{xh} w^2$. Kromě toho v případě rovnoměrné rotace působí v počátku souřadnicového systému už pouze odstředivá síla velikosti $O = mew^2$.

5. OBECNÝ ROVINNÝ POHYB

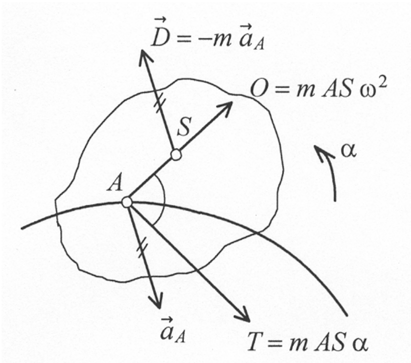
Setrvačné účinky na těleso konající obecný rovinný pohyb jsou zřejmě superpozicí setrvačných účinků od unášivého posuvu a od druhotné rotace při **základním** rozkladu v libovolném referenčním bodě *A*. Uvažujeme-li těleso, kdy rovina pohybu je rovinou symetrie tohoto tělesa, je osa druhotné rotace (která prochází bodem *A* kolmo na rovinu pohybu) vždy hlavní osou setrvačnosti. Je-li bod *A* navíc středem hmotnosti *S*, je dokonce hlavní centrální osou. Proto při tvorbě setrvačných účinků na těleso konající obecný rovinný pohyb rozlišme dva případy podle incidence referenčního bodu *A* rozkladu se středem hmotnosti *S* tělesa.

1) $A \equiv S \Rightarrow$ osa druhotné rotace je hlavní centrální osou setrvačnosti. Jediným setrvačným účinkem od druhotné rotace je setrvačná dvojice $\vec{M}_D = -I_s \vec{a}$ proti smyslu kótování a



(viz obr.). Setrvačným účinkem od unášivého posuvu je ve středu hmotnosti nahrazená setrvačná síla $\vec{D} = -m\vec{a}_s = -m\vec{a}$ (protože při unášivém posuvu zrychlení všech bodů tělesa jsou stejná). Konkrétní složky této síly souvisejí s typem unášivého posuvu (a tedy se složkami zrychlení $\vec{a}$). Je-li např. unášivý posuv po kružnici poloměru r s úhlovou rychlostí ω, a úhlovým zrychlením α^* (jiné než úhlové zrychlení α druhotné rotace), bude setrvačná síla ve středu hmotnosti mít tečnou složku $\vec{T}$ proti smyslu kótování α^* o velikosti $r\,\alpha^*$ a odstředivou složku $\vec{O}$ o velikosti $r\omega^2$.

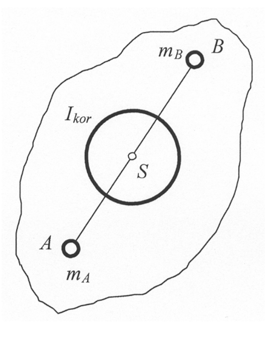
2) $A \neq S \Rightarrow$ osa druhotné rotace je pouze hlavní osou setrvačnosti. Kromě setrvačného účinku $\vec{M}_D = -I_A\vec{\alpha}$ ve formě dvojice proti kótování úhlového zrychlení druhotné rotace



přísluší této druhotné rotaci ještě tečná setrvačná síla $\vec{T}$ kótovaná proti $\vec{\alpha}$ o velikosti $m\,\overline{SA}\alpha$ a odstředivá síla $\vec{O}$ kótovaná od bodu A o velikosti $m\,\overline{SA}\omega^2$. Obě tyto síly působí v bodě *A*. Setrvačným účinkem od unášivého posuvu je stejně jako v předchozím případě ve středu hmotnosti působící setrvačná síla $\vec{D} = -m\vec{a}_A = -m\vec{a}$.

Poznámka: Je-li unášivý posuv po kružnici, působí pak na těleso dvě tečné setrvačné síly a dvě odstředivé síly, jedna skupina ve středu hmotnosti a jedna v počátku *A* (každá ze skupin má obecně jinou velikost).

Pro případ, že těleso je součástí soustavy, kdy dva jeho body se pohybují známým pohybem,



je vhodné těleso konající obecný rovinný pohyb dynamicky ekvivalentně nahradit ve známých postaveních dvěma hmotnými body a tzv. **korekčním momentem setrvačnosti**. Těleso nechť má známou hmotnost *m*, známou polohu středu hmotnosti S vůči zadaným bodům *A, B* prostřednictvím parametrů $\overline{AS} = l_A$ a $\overline{BS} = l_B$ a známý osový moment setrvačnosti I_s k ose kolmé na rovinu pohybu procházející bodem *S*. Toto těleso dynamicky ekvivalentně nahradíme v místech *A, B* hmotnými body o neznámých hmotnostech m_A, m_B a nehmotnou obručí, dodávající pouze tzv. korekční (zatím neznámý) moment setrvačnosti $I_{kor.}$. Pro tyto tři neznámé formulujeme tři podmínky dynamické ekvivalence.

podmínka zachování hmotnosti $\qquad m_A + m_B = m \qquad (22)$

podmínka zachování polohy *S* $\qquad m_A\,l_A = m_B\,l_B \qquad (23)$

podmínka zachování momentu setrvačnosti $$m_A\ l_A^2 + m_B\ l_B^2 + I_{kor.} = I_s \qquad (24)$$

Z (23) plyne

$$m_B = \frac{l_A}{l_B} m_A. \qquad (25)$$

Dosadíme-li (25) do (22) dostaneme

$$m_A\left(1+\frac{l_A}{l_B}\right) = m \Rightarrow m_A = \frac{l_B}{l_A + l_B} m. \qquad (26)$$

Dosazením do (25) pak

$$m_B = \frac{l_A}{l_A + l_B} m. \qquad (27)$$

Po dosazení z (26) a (27) do (24) nakonec

$$I_{kor.} = I_s - \left(l_A^2 \frac{l_B}{l_A + l_B} + l_B^2 \frac{l_A}{l_A + l_B}\right) m = I_s - m\, l_A\, l_B\ . \qquad (28)$$

Setrvačné účinky působící na těleso jsou ekvivalentní setrvačným účinkům působícím na výše popsanou abstraktní náhradu. Známe-li zrychlení bodů m_A, m_B, které nechť jsou po řadě $\vec{a}_A, \vec{a}_B$ (viz obr.) a úhlové zrychlení α druhotné rotace, jsou setrvačné účinky síly $\vec{D}_A = -m_A\, \vec{a}_A$, $\vec{D}_B = -m_B\, \vec{a}_B$ působící v bodech A a B a setrvačná dvojice $\vec{M}_D$ o velikosti $I_{kor.}\, \alpha$ působící proti smyslu kótování α (viz obr.). V případě, že těleso je součástí soustavy, určíme zrychlení $\vec{a}_A, \vec{a}_B$ ze zrychlení „okolních“ členů soustavy, které jsou s „naším“ tělesem vázány prostřednictvím např. rotačních vazeb se středy v popisovaných bodech.