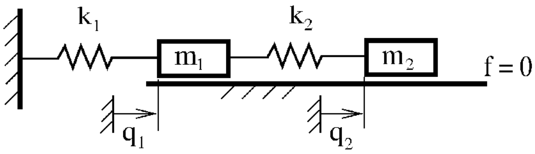
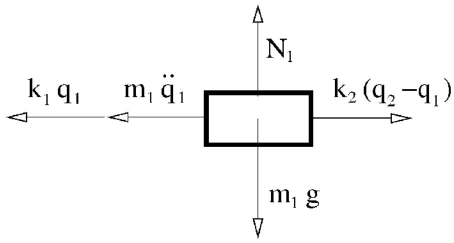
VOLNÉ KMITY ŘETĚZCE SE DVĚMA STUPNI VOLNOSTI

SPECIFIKACE PROBLÉMU

Řešte volné kmitání jedenkrát vetknutého řetězce se dvěma stupni volnosti o parametrech $m_1,\ m_2,\ k_1,\ k_2$ (viz obr.) při počátečních podmínkách $q_1(0) = q_0,\ \ q_2(0) = 0,\ \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2 = 0$.



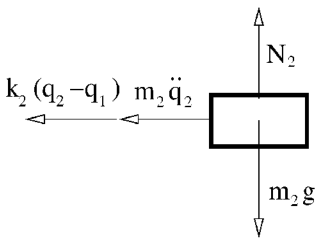
ŘEŠENÍ



Nejprve odvodíme pohybové rovnice ve výchylkách q_1, q_2 kótovaných z volných délek pružin. Použijeme metodu uvolňování. Uvolníme těleso m_1 a popíšeme silové účinky na něj působící (viz obr.). Pohybovou rovnicí je složková podmínka do vodorovného směru. Má tvar

$$m_1\ddot{q}_1 + k_1 q_1 - k_2 (q_2 - q_1) = 0 . \tag{1}$$

Nyní volíme těleso m_2 a rovněž popíšeme na něj působící silové účinky. Složková podmínka



do vodorovného směru zde má tvar

$$m_2\ddot{q}_2 + k_2 (q_2 - q_1) = 0 . \tag{2}$$

(1) a (2) je soustava dvou diferenciálních rovnic druhého řádu. Osamostatněním q_2 z (1) dostaneme

$$q_2 = \frac{m_1}{k_2}\ddot{q}_1 + \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) q_1 .$$

Označme pro jednoduchost kladné konstanty

$$a = \frac{m_1}{k_2}; \qquad b = 1 + \frac{k_1}{k_2} . \tag{3}$$

Potom zřejmě

$$q_2 = a\,\ddot{q}_1 + b\,q_1 . \tag{4}$$

Dvojím derivováním odtud

$$\ddot{q}_2 = a\,q_1^{IV} + b\ddot{q}_1 . \tag{5}$$

Dosazením (4) a (5) do (2) dostáváme jedinou diferenciální rovnici 4. řádu s konstantními koeficienty pro neznámou funkci $q_1(t)$. Tato rovnice je tvaru

$$m_2\,a\,q_1^{IV} + m_2\,b\ddot{q}_1 + k_2\,a\ddot{q}_1 + k_2\,b\,q_1 - k_2\,q_1 = 0 .$$

Vzhledem k (3) ji přepíšeme jako

$$\frac{m_1\, m_2}{k_2} q_1^{IV} + \left[m_2 \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right) + m_1 \right] \ddot{q}_1 + k_1\, q_1 = 0\,.$$

Přenásobením $k_2 \neq 0$ získáme rovnici ve tvaru

$$A q_1^{IV} + B \ddot{q}_1 + C\, q_1 = 0\,, \tag{6}$$

kde kladnými konstantami *A, B, C* jsme označili

$$A = m_1\, m_2\,; \qquad B = m_2\,(k_1 + k_2) + m_1\, k_2\,; \qquad C = k_1\, k_2\,. \tag{7}$$

Charakteristická rovnice k (6) je

$$A\, l^4 + B\, l^2 + C = 0\,.$$

Jedná se o bikvadratickou rovnici s kořeny

$$l_{1,2}^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\,.$$

Protože *A, B, C* jsou kladné, jsou oba tyto kořeny záporné. Proto jsou po odmocnění kořeny l_i ryze imaginární tvaru

$$l_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}} = \pm i\, W_1\,; \qquad l_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}} = \pm i\, W_2\,. \tag{8}$$

Místo lineární kombinace exponenciál s ryze imaginárními argumenty píšeme obecné řešení (6) ve tvaru kombinace harmonických funkcí obou (kladných) frekvencí W_1 a W_2 v (8) aplikací Eulerových vztahů. Dostaneme

$$q_1(t) = C_1 \cos W_1\, t + C_2 \sin W_1\, t + C_3 \cos W_2\, t + C_4 \sin W_{12}\, t\,. \tag{9}$$

Derivacemi odtud postupně

$$\dot{q}_1(t) = W_1(-C_1 \sin W_1\, t + C_2 \cos W_1\, t) + W_2(-C_3 \sin W_2\, t + C_4 \cos W_2\, t)\,, \tag{10}$$

$$\ddot{q}_1(t) = -W_1^2\,(C_1 \cos W_1\, t + C_2 \sin sW_1\, t) - W_2^2\,(C_3 \cos W_2\, t + C_4 \sin W_2\, t)\,. \tag{11}$$

Dosazením (9) a (11) do (4) vzniká

$$q_2(t) = \left(b - a\, W_1^2\right)(C_1 \cos W_1\, t + C_2 \sin W_1\, t) + \left(b - a\, W_2^2\right)(C_3 \cos W_2\, t + C_4 \sin W_2\, t)\,. \tag{12}$$

Derivací pak

$$\begin{aligned} \dot{q}_2(t) &= \Omega_1 \left(b - a\,\Omega_1^2\right)\left(-C_1 \sin \Omega_1\, t + C_2 \cos \Omega_1\, t\right) + \\ &+ \Omega_2 \left(b - a\,\Omega_2^2\right)\left(-C_3 \sin \Omega_2\, t + C_4 \cos \Omega_2\, t\right) \end{aligned} \tag{13}$$

Ve všech těchto výrazech $C_1 \div C_4$ jsou integrační konstanty, jež určíme z počátečních podmínek. Dosadíme-li do (9), (10), (12) a (13) čas $t = 0$ a zohledníme-li zadané počáteční podmínky, obdržíme

$$q_1(0) = q_0 = C_1 + C_3 \tag{14}$$

$$\dot{q}_1(0) = 0 = C_2\, W_1 + C_4\, W_2 \tag{15}$$

$$q_2(0) = 0 = \left(b - a\, W_1^2\right) C_1 + \left(b - a\, W_2^2\right) C_3 \tag{16}$$

$$\dot{q}_2(0) = 0 = W_1\left(b - a W_1^2\right)C_2 + W_2\left(b - a W_2^2\right)C_4 \qquad (17)$$

(14) ÷ (17) je soustava lineárních algebraických rovnic pro určení konstant $C_1 \div C_4$. Řešíme ji dosazovací metodou. Z (16) plyne

$$C_3 = -\frac{b - a W_1^2}{b - a W_2^2} C_1 . \qquad (18)$$

Dosazením do (14)

$$C_1\left(1 - \frac{b - a W_1^2}{b - a W_2^2}\right) = q_0 \Leftrightarrow C_1 = \frac{b - a W_2^2}{a\left(W_1^2 - W_2^2\right)} q_0 . \qquad (19)$$

Podle (18) potom

$$C_3 = -\frac{b - a W_1^2}{a\left(W_1^2 - W_2^2\right)} q_0 . \qquad (20)$$

Analogicky z (15) plyne

$$C_4 = -\frac{W_1}{W_2} C_2 . \qquad (21)$$

Dosazením do (17)

$$C_2\left[W_1\left(b - a W_1^2\right) - W_2\left(b - a W_2^2\right)\frac{W_1}{W_2}\right] = 0$$

čili

$$C_2\, a\, W_1\left(W_2^2 - W_1^2\right) = 0 .$$

Protože $a \neq 0$, $W_1 \neq 0$ a $W_1 \neq W_2$, plyne odtud $C_2 = 0$ a podle (21) i $C_4 = 0$. Dosazením (19) a (20) do (9) a (12) dostáváme konkrétní řešení, jež splňuje zadané počáteční podmínky ve tvaru

$$q_1(t) = \frac{q_0}{a\left(W_1^2 - W_2^2\right)}\left[\left(b - a W_2^2\right)\cos W_1 t - \left(b - a W_1^2\right)\cos W_2 t\right] , \qquad (22)$$

$$q_2(t) = \frac{q_0\left(b - a W_1^2\right)\left(b - a W_2^2\right)}{a\left(W_1^2 - W_2^2\right)}\left[\cos W_1 t - \cos W_2 t\right] .$$

Konstanty *a, b* jsou dány v (3), frekvence W_1, W_2 v (8), přičemž konstanty *A, B, C* jsou v (7). Grafy popisují závislosti vlastních frekvencí na parametrech soustavy. Animace je popsána funkcemi (22).