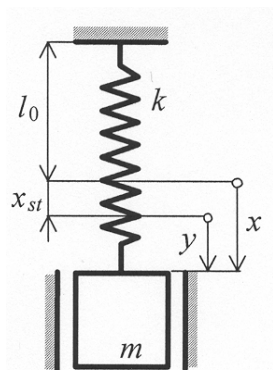


KMITÁNÍ

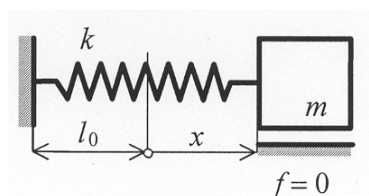
Připojíme-li hmotu m k lineární (po válcové ploše vinuté) pružině o tuhosti k se svislou osou, dostáváme při pohybu hmotnosti vzniklém působením nenulových počátečních podmínek při kótování výchylky od volné délky l_0 pružiny pohybovou rovnicí ve tvaru



$$m\ddot{x} + kx - mg = 0. \quad (1)$$

Tato rovnice vzniklá metodou uvolňování vyjadřuje dynamickou rovnováhu sil na společné svislé nositelce. Síla $m\ddot{x}$ je setrvačná (posuvný pohyb tělesa po svislici), síla kx je **elastická** (vratná) síla v pružině a mg je tíha (která jako jediná ze sil při kótování výchylky x směrem dolů mří proti ostatním silám). Budeme-li osu pružiny situovat vodorovně (viz obr.) dostáváme při zanedbaném tření hmoty na rámu pohybovou rovnicí ve tvaru

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (2)$$



Tíha, jakožto svislá síla, se nyní do směru pohybu nepromítá. Protože obě pohybové rovnice popisují fyzikálně stejný děj (tzv. **volné kmity** vznikající bez působení budících sil), je v rovnici (1) konstantní člen mg navíc. Situace se uvede do souladu kótováním výchylky y (v případě svislé osy pružiny) až od tzv. **statické rovnovážné**

polohy dané parametrem x_{st} (viz obr.). Přivěsíme-li k pružině volné délky l_0 tuhosti k hmotu m a necháme ustálit, dojde k jejímu klidovému protažení právě o hodnotu x_{st} , kdy je v rovnováze vratná síla takto deformované pružiny s tíhou, tedy

$$mg = kx_{st}. \quad (3)$$

Zřejmě z obrázku je patrné, že

$$x = x_{st} + y.$$

Protože x_{st} podle (3) je konstanta, platí

$$\ddot{x} = \ddot{y}$$

Dosazením těchto výrazů do (1) za \ddot{x} a x získáme

$$m\ddot{y} + kx_{st} + ky - mg = 0.$$

Podle (3) však

$$kx_{st} - mg = 0.$$

Předchozí rovnice se tím dostává do tvaru (2) pro výchylku y . Je-li tedy osa pružiny jiná než vodorovná, kótujeme výchylku od statické rovnovážné polohy a příslušnou složku tíhy do rovnováhy sil nezahrnujeme. Pohybová rovnice je tvaru (2) a říkáme jí pohybová rovnice **volných netlumených podélných kmitů**. Podélně kmitající (posouvající se po přímce) hmoty je základním modelem kmitající soustavy s jedním stupněm volnosti. Volné kmity vznikají bez přítomnosti **budící síly**. Vznikají z nenulových počátečních podmínek. Buď tedy pružinu deformují a pustím z klidu (nenulová **polohová počáteční podmínka**) nebo hmotu ze statické rovnovážné polohy „postrčím“ (nenulová **rychlostní počáteční podmínka**) popřípadě

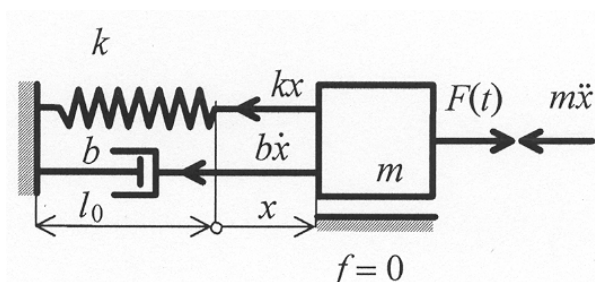
provedu kombinaci obojího. Působí-li na hmotu navíc **budící síla** $F(t)$ dolů pro případ svislé osy pružiny a vpravo pro případ vodorovné osy pružiny, má tato v pohybové rovnici záporné znaménko. Z kladným znaménkem ji obvykle převádíme na pravou stranu. Pohybová rovnice má pak tvar

$$m\ddot{x} + kx = F(t).$$

Jestliže je k pružině paralelně řazen lineární (tzv. **viskózní**) tlumič, působí v něm proti pohybu **tlumicí síla** úměrná rychlosti. Pohybová rovnice **podélných tlumených (obecně buzených) kmitů** má pak tvar

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t). \quad (4)$$

Konstantu b udáváme v $[Ns/m]$ a nazýváme ji **konstantou vazkého tlumení**. Vlivem tlumení se disipuje mechanická energie přeměnou na energii tepelnou. Tlumič může být

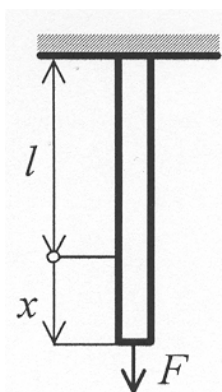


skutečně funkční paralelně připojený k pružině jako na kinematickém schématu na obrázku. Může ale také znázorňovat materiálové tlumení drátu, ze kterého je pružina vyrobena. Model bez tlumení je vždy abstrakce, více nebo méně odlišná od skutečnosti. V případě materiálového tlumení bývá v praxi problémem číselně vyjádřit konstantu b .

1. PŘÍPADY PŘEVEDITELNÉ NA ZÁKLADNÍ MODEL

a) *Případ hmoty na teoreticky nehmotném laně (tyči)*

Vlastnosti lineární podélné pružiny má i prizmatická tyčka (lano) při namáhání na tah. Z Hookeova zákona plyne (Pružnost I) pro deformaci tyče x pod působením osově síly F výraz



$$x = \frac{Fl}{AE}, \quad (5)$$

kde l je délka a A plocha průřezu nezátížené tyče, $E [Pa]$ je modul pružnosti materiálu v tahu. Srovnáním (5) s výrazem lineární závislosti vratné síly v pružině na deformaci $F = kx$ zjišťujeme, že tuhost tyče je

$$k = \frac{AE}{l}. \quad (6)$$

Poznámka: Pohybová rovnice kmitání tyče (lana) s hmotností m na konci je tvaru (2) nebo (4) pro tuhost danou v (6) jen v tom případě, kdy hmotnost tyče (stejně jako pružiny) zanedbáme. Zahrneme-li hmotnost pružiny (tyče) do výpočtu, nutno pro případ předpokládané přímé úměrnosti deformace řezu na poloze řezu ke hmotnosti m připojit třetinu hmotnosti pružiny (tyče). Hmotnost m na hmotné tyči pak nahrazujeme hmotností $m + r \frac{Al}{3}$ na nehmotné tyči o tuhosti (6). Symbol r je hustota materiálu.

b) **Případ spirálové pružiny namáhané silovou dvojicí**

Mějme spirálovou (hodinářskou) pružinu jedním koncem vetknutou do rámu. Namáháme-li silovou dvojicí s vektorem momentu M v ose pružiny její volný konec, natočí se o úhel j . Je-li pružina lineární, vztah mezi momentem M a úhlem j je přímá úměrnost $M = k_t j$. Konstantu k_t v $[Nm/rad]$ nazýváme **torzní tuhost** pružiny. Jestliže od polohy v nezátženém stavu kótujeme úhel natočení kotouče o osovém momentu setrvačnosti I připojeného ke spirálové pružině o torzní tuhosti k_t s tím, že kotouč lze otáčet pouze kolem osy pružiny, je pohybová rovnice tohoto pohybu tvaru

$$I \ddot{j} + k_t j = 0. \quad (7)$$

Tato rovnice vyjadřuje dynamickou rovnováhu silových dvojic k ose pružiny. Dvojice $I \ddot{j}$ je setrvačná (kotouč se otáčí) a dvojice $k_t j$ je **elastická dvojice**. Připojíme-li **silovou dvojici tlumící** modelující materiálové tlumení pružiny a **budící dvojici** o momentu $M(t)$, je pohybová rovnice tvaru

$$I \ddot{j} + b_t \dot{j} + k_t j = M(t). \quad (8)$$

Konstantu b_t udáváme v $[Nms/rad]$ a nazýváme ji **konstantou torzního tlumení**. Srovnáním (8) se (4) zjišťujeme matematicky stejné diferenciální rovnice s následující analogií veličin

Podélné kmity	m	b	k	$F(t)$	x
Torzní kmity	I	b_t	k_t	$M(t)$	j

Rovnice (7) popisuje **netlumené volné torzní kmity**, rovnice (8) **obecně tlumené, buzené torzní kmity**.

c) **Případ kotouče na teoreticky nehmotném hřídeli**

Vlastnosti lineární torzní pružiny má i hřídel kruhového (mezikruhového) průřezu při namáhání na krut. Z Hookeova zákona pro prostý krut (Pružnost I) pro deformaci (nakroucení) hřídele j pod působením torzního momentu M plyne výraz

$$j = \frac{Ml}{G J_p},$$

kde l je délka, G modul pružnosti materiálu ve smyku a J_p polární kvadratický moment plochy průřezu v $[m^4]$. Srovnáním se vztahem pro úměrnost elastického momentu s úhlem natočení $M = k_t j$ odtud dostaneme pro torzní tuhost hřídele

$$k_t = \frac{G J_p}{l}. \quad (9)$$

Veličina J_p je definována jako $J_p = \int_{(A)} r^2 dA$, kde r je první polární souřadnice s počátkem v těžišti průřezu. Pro mezikruhový průřez o vnějším poloměru R a vnitřním poloměru r platí

$$J_p = \frac{P}{2} (R^4 - r^4). \quad (10)$$

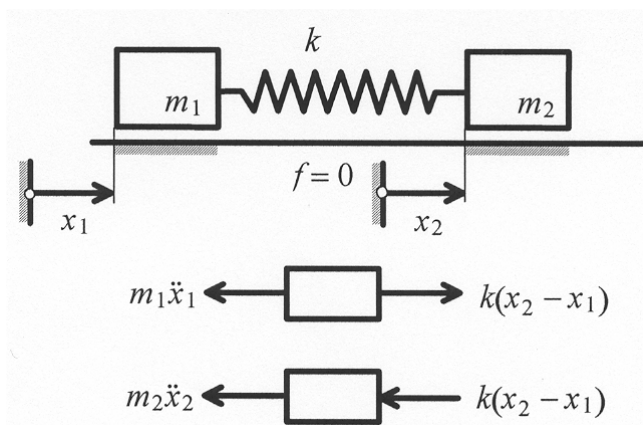
Pohybová rovnice kmitání hřídele s kotoučem na konci má tvar (7) nebo (8), kde torzní tuhost je dána v (9) a polární moment v (10) pro případ zanedbané hmotnosti hřídele. Nelze-li ji zanedbat nahrazujeme osový moment setrvačnosti I na hmotném hřídeli osovým momentem setrvačnosti $I + \frac{I_h}{3}$ na nehmotném hřídeli. Osový moment setrvačnosti hřídele I_h vzhledem k jeho tvaru válce mezikruhového průřezu je

$$I_h = \frac{1}{2} \rho r l (R^4 - r^4), \quad (11)$$

přičemž symbolem r je nyní značena hustota materiálu hřídele.

d) **Případ relativních kmitů dvou izolovaných hmot na pružině**

Mějme dvě hmoty m_1, m_2 (viz obr.) spojeny pružinou tuhosti k . Zřejmě se jedná o soustavu se dvěma stupni volnosti popsanou zobecněnými souřadnicemi x_1 a x_2 . Pohybové rovnice



získáme metodou uvolňování (odpojení hmot od pružiny) za nepodstatného předpokladu např. $x_2 > x_1$, kdy v rovnováze je vždy setrvačná síla od vodorovného posuvu s elastickou silou (viz obr.) ve tvaru

$$m_1 \ddot{x}_1 - k(x_2 - x_1) = 0,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k(x_2 - x_1) = 0.$$

Tyto pohybové rovnice zůstávají v platnosti i pro $x_2 \leq x_1$. Pak jen druhé sčítance změni znaménko

(číselně, kvůli relaci $x_2 \leq x_1$). Přenásobením první rovnice konstantou m_2 , druhé rovnice m_1 a odečtením (vzniklé) první rovnice od druhé získáme

$$m_1 m_2 (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + k(x_2 - x_1)(m_1 + m_2) = 0.$$

Označíme-li $x = x_2 - x_1$, což je relativní výchylka hmoty m_2 vůči pozorovateli nacházejícímu se na hmotě m_1 , je $\ddot{x} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$ a předchozí rovnice má tvar

$$\ddot{x} + k \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} x = 0.$$

Označíme-li m hmotnost, pro kterou

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}, \quad (12)$$

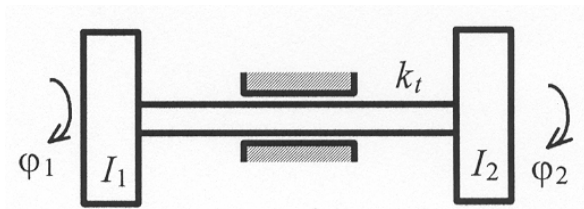
přepíšeme (po přenásobení m) předchozí rovnici na tvar

$$m \ddot{x} + k x = 0,$$

což je rovnice (netlumeného) volného podélného kmitání soustavy s 1 stupněm volnosti.

Poznámka: Analogická situace vznikne u dvou kotoučů, o osových momentech setrvačnosti I_1, I_2 vázaných (teoreticky) nehmotným hřídelcem (viz obr.) o torzní tuhosti k_t . Zavedeme-li úhel nakroucení hřídele $j = j_2 - j_1$ a moment setrvačnosti I vztahem

$$\frac{1}{I} = \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2},$$



dostáváme pohybovou rovnici relativních kmitů kotouče I_2 vůči kotouči I_1 ve tvaru

$$I_2 \ddot{\varphi}_2 + k_t \varphi = 0.$$

Pro uvažování hmotnosti hřídele činíme ekvivalentní soustavu s hmotným

hřídelem se soustavou s kotouči o momentech setrvačnosti $I_1 + \frac{I_h}{6}$ a $I_2 + \frac{I_h}{6}$ spojenými nehmotným hřídelem. I_h je osový moment setrvačnosti hřídele, pro který v případě válce mezikruhového průřezu platí vztah (11).

e) **Ostatní fyzikální modely kmitavých soustav s 1 stupněm volnosti** se převádějí na základní podélně kmitající o pohybové rovnici

$$m_r \ddot{x} + k_r x = 0.$$

Přitom délková souřadnice x je vhodně zvolená souřadnice, jíž najdeme na fyzikálním modelu. Redukovaný hmotový parametr m_r získáme z bilance kinetické energie

$$(E_k =) \frac{1}{2} m_r \dot{x}^2 = \sum_i E_{k_i}, \quad (13)$$

kde E_{k_i} je kinetická energie všech pohybujících se členů soustavy. Redukovaný tuhostní parametr k_r získáme z bilance potenciální energie kumulované pouze v deformovaných pružinách (pružných členech)

$$(E_p =) \frac{1}{2} k_r x^2 = \sum_j E_{p_j}, \quad (14)$$

kde E_{p_j} je potenciální energie všech deformovaných pružných členů soustavy.

Poznámka:

1) Lze rovněž fyzikální model převést na torzně kmitající základní model s pohybovou rovnicí

$$I_r \ddot{j} + k_{tr} j = 0,$$

kde úhlovou souřadnici j nutno najít na původním fyzikálním modelu. Pro I_r pak platí

$$(E_k =) \frac{1}{2} I_r \dot{j}^2 = \sum_i E_{k_i}$$

a pro k_{tr} platí

$$(E_p =) \frac{1}{2} k_{tr} j^2 = \sum_j E_{p_j}.$$

Součty na pravých stranách jsou stejné jako v rovnicích (13) a (14).

2) Jestliže fyzikální model obsahuje kromě pružných členů paralelně řazené tlumicí členy, přibývá k pohybovým rovnicím ještě tlumicí člen tvaru $b_r \dot{x}$ (resp. $b_{rr} \ddot{x}$), přičemž redukované tlumicí parametry určíme ze stejných vzorců jako redukované tuhostní parametry, když místo tuhostí píšeme příslušné tlumicí konstanty.

2. VOLNÉ KMITÁNÍ

Řešení pohybové rovnice vysvětlíme na podélném kmitání. Pro torzní kmity zaměníme veličiny výše popsanou analogií.

a) *Netlumená soustava*

Rovnici (2), po prodělení hmotností a zavedením tzv. **vlastní frekvence netlumené soustavy**

$$W = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (15)$$

převědeme do tvaru

$$\ddot{x} + W^2 x = 0. \quad (16)$$

Jedná se o lineární diferenciální rovnici II. řádu s konstantními koeficienty pro neznámou funkci $x(t)$. Řešíme ji při zadaných počátečních podmínkách $x(0) = x_0$ (polohová) a $\dot{x}(0) = v_0$ (rychlostní). Příslušná charakteristická rovnice (viz Matematika II) má tvar

$$I^2 + W^2 = 0,$$

takže má dvojici ryze imaginárních kořenů $I_{1,2} = \pm i W$, kde $i = \sqrt{-1}$ je imaginární jednotka. Obecné řešení diferenciální rovnice (16) je lineární kombinací exponenciálních funkcí (času) s exponenty, jež jsou kořeny charakteristické rovnice. Toto řešení má tvar

$$x(t) = C_1 e^{i W t} + C_2 e^{-i W t}.$$

Protože podle Eulerových vztahů $e^{\pm i W t} = \cos W t \pm i \sin W t$, lze dosazením do obecného řešení a zavedením nových konstant

$$A = C_1 + C_2; \quad B = i(C_1 - C_2)$$

přepsat obecné řešení na tvar

$$x(t) = A \cos W t + B \sin W t. \quad (17)$$

A, B jsou integrační konstanty, které vyčíslíme zohledněním počátečních podmínek. Časovou derivací (17) získáme

$$\dot{x}(t) = W(-A \sin W t + B \cos W t). \quad (18)$$

Dosazením času $t = 0$ do (17) a (18) a zohledněním počátečních podmínek vyjde

$$x(0) = x_0 = A,$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = B W \Rightarrow B = \frac{v_0}{W}.$$

Dosazením zpět do (17) získáme konkrétní řešení pohybové rovnice, splňující zadané počáteční podmínky, ve formě

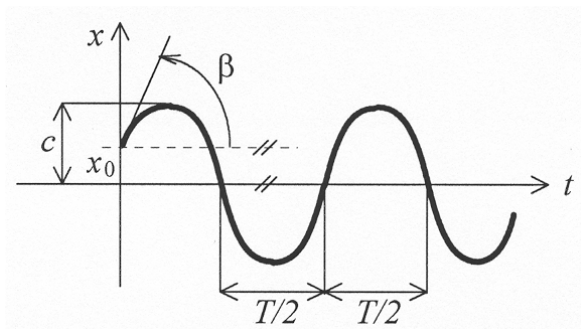
$$x(t) = x_0 \cos Wt + \frac{v_0}{W} \sin Wt. \quad (19)$$

Jedná se o lineární kombinaci harmonických funkcí s vlastní frekvencí W v (15). Tato frekvence je určena v rad/s . Říkáme jí **úhlová frekvence**. K ní příslušná frekvence f v Hertzech (= kmitech za sekundu) je $f = \frac{W}{2\pi}$. Doba kmitu T (doba periody) v sekundách je pak převrácenou hodnotou frekvence f . Tedy

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{W} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (20)$$

Grafem (19) je posunutá sinusoida (viz obr.) s amplitudou

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{1}{W} \sqrt{x_0^2 W^2 + v_0^2}.$$



Pro úhel b z obrázku přitom platí

$$\operatorname{tg} b = v_0,$$

neboť směrnice tečny ke křivce v nulovém čase je rychlostní počáteční podmínkou.

Poznámka: Pro $v_0 = 0$ (natočení pružiny a puštění z klidu) je

$$x(t) = x_0 \cos Wt.$$

Pro $x_0 = 0$ (postrčení hmotnosti rychlostí v_0) ze statické rovnovážné polohy je

$$x(t) = \frac{v_0}{W} \sin Wt.$$

b) Tlumená soustava

Rovnici (4) s nulovou pravou stranou po prodělení hmotností a zavedením vlastní frekvence přidružené netlumené soustavy výrazem (15) a **poměrného útlumu** D vztahem

$$2DW = \frac{b}{m} \Leftrightarrow D = \frac{b}{2\sqrt{km}} \quad (21)$$

převědeme do tvaru

$$m\ddot{x} + 2DW\dot{x} + W^2 x = 0. \quad (22)$$

Jedná se opět o lineární diferenciální rovnici II. řádu s konstantními koeficienty, kde nechybí člen s první derivací. Řešíme ji obecně při počátečních podmínkách $x(0) = x_0$ (polohová) a $\dot{x}(0) = v_0$ (rychlostní). Charakteristická rovnice je

$$I^2 + 2DWI + W^2 = 0.$$

Její diskriminant má hodnotu $2W\sqrt{D^2 - 1}$. Pro další řešení má význam relace poměrného útlumu D vůči jedničce:

1) Pro $D < 1$ (samozřejmě, protože $D = \frac{b}{2\sqrt{km}}$, je to nezáporná hodnota) říkáme, že

soustava je s podkritickým tlumením. Pak odmocnina v diskriminantu je ze záporného čísla, a tedy ryze imaginární. Řešení charakteristické rovnice jsou

$$I_{1,2} = -DW \pm iW\sqrt{1 - D^2}.$$

Označme

$$W_D = W\sqrt{1 - D^2} \quad (23)$$

a nazveme tuto veličinu **vlastní frekvencí (tlumené soustavy)**. Zřejmě $W_D \leq W$ a pro $D = 0$ je $W_D = W$ a pro $D \rightarrow 1$ je $W_D \rightarrow 0$. Kořeny charakteristické rovnice jsou komplexně sdružené a mají tvar

$$I_{1,2} = -DW \pm iW_D.$$

Podobně jako v netlumeném případě obecné řešení pohybové rovnice je

$$x(t) = C_1 e^{(-DW + iW_D)t} + C_2 e^{(-DW - iW_D)t} = e^{-DWt} (C_1 e^{iW_D t} + C_2 e^{-iW_D t}).$$

Zavedeme-li, stejně jako pro netlumenou soustavu, konstanty $A = C_1 + C_2$ a $B = i(C_1 - C_2)$, obdržíme

$$x(t) = e^{-DWt} (A \cos W_D t + B \sin W_D t). \quad (24)$$

Integrační konstanty A , B opět určíme z počátečních podmínek. Pro aplikaci rychlostní podmínky derivujeme (24)

$$\dot{x}(t) = -DW e^{-DWt} (A \cos W_D t + B \sin W_D t) + W_D e^{-DWt} (-A \sin W_D t + B \cos W_D t). \quad (25)$$

Dosazením $t = 0$ do posledních dvou rovnic a zohledněním počátečních podmínek vychází

$$x_0 = A,$$

$$v_0 = -DW A + W_D B.$$

Ze druhé rovnice podle (23) plyne

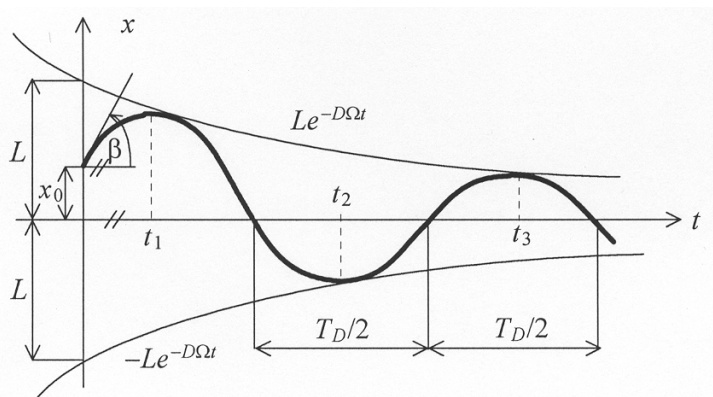
$$B = \frac{v_0}{W_D} + \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}} x_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - D^2}} \left(\frac{v_0}{W} + D x_0 \right).$$

Dosazením do (24) máme konkrétní řešení, které splňuje předepsané počáteční podmínky, ve tvaru

$$x(t) = e^{-DWt} \left[x_0 \cos W_D t + \frac{1}{\sqrt{1 - D^2}} \left(D x_0 + \frac{v_0}{W} \right) \sin W_D t \right]. \quad (26)$$

Jedná se o lineární kombinaci harmonických funkcí s frekvencí W_D (jíž přísluší perioda $T_d = \frac{2\pi}{W_D}$) graficky vepsanou mezi exponenciálně ubývající křivky tvaru $\pm L e^{-DWt}$. Grafem

volných kmitů (26) je na obrázku znázorněná silně vytažená křivka. Vychází z polohové počáteční podmínky $x(0) = x_0$ a směrnice tečny v tomto bodě je rychlostní počáteční podmínka, tedy



Křivka má nekonečné množství nulových bodů vzdálených o $T_D/2$. Prostor, do něhož je křivka vepsána je omezen křivkami $\pm Le^{-D\Omega t}$, kde pro konstantu L platí vztah

$$L^2 = x_0^2 + \frac{\left(Dx_0 + \frac{v}{W}\right)^2}{1 - D^2}.$$

Jedná se o pythagorejský součet koeficientů v lineární kombinaci harmonických funkcí v (26). Křivka má nekonečně mnoho lokálních extrémů, přičemž se střídají maxima (body t_1, t_3, t_5, \dots) s minimy (body t_2, t_4, t_6, \dots). Nutnou podmínkou extrému je nulovost derivace. Označíme-li koeficienty lineární kombinace opět A a B je derivace vyčíslena v (25). Protože exponenciální funkce není nulová pro žádný argument je

$$\dot{x}(t) = 0 \Leftrightarrow (W_D B - D W A) \cos W_D t - (W_D A + D W B) \sin W_D t = 0.$$

Body lokálních extrémů t_i ($i = 1, 2, 3, 4, \dots$) proto splňují podmínku

$$\operatorname{tg} W_D t_i = \frac{W_D B - D W A}{W_D A + D W B}.$$

Odtud

$$t_i = \frac{1}{W_D} \left[\operatorname{arctg} \frac{W_D B - D W A}{W_D A + D W B} + (i-1)p \right],$$

protože funkce tangens je p -periodická. Protože zřejmě $t_{i+1} = t_i + p/W_D$ dva po sobě jdoucí extrémy mají poměr absolutních hodnot

$$\left| \frac{x(t_{i+1})}{x(t_i)} \right| = \left| \frac{e^{-D W (t_i + p/W_D)} [A \cos(W_D t_i + p) + B \sin(W_D t_i + p)]}{e^{-D W t_i} (A \cos W_D t_i + B \sin W_D t_i)} \right|.$$

Poněvadž $A \cos(W_D t_i + p) + B \sin(W_D t_i + p) = -A \cos W_D t_i - B \sin W_D t_i$ (vztahy pro cosinus a sinus součtu), je

$$\left| \frac{x(t_{i+1})}{x(t_i)} \right| = e^{-D W \frac{p}{W_D}}.$$

Vzhledem k (23) je

$$p = \left| \frac{x(t_{i+1})}{x(t_i)} \right| = e^{-p \frac{D}{\sqrt{1-D^2}}}. \quad (27)$$

Tato veličina rozhoduje o velikosti poměrného útlumu. Zjistíme-li experimentálně hodnotu tohoto poměru p , dostáváme z (27)

$$\frac{\ln p}{p} = \frac{D}{\sqrt{1-D^2}},$$

odtud

$$D = \frac{\ln p}{\sqrt{p^4 + \ln^2 p}}.$$

Protože výraz (27) platí pro každé přirozené i , jest

$$\left| \frac{x(t_{i+j})}{x(t_i)} \right| = \left| \frac{x(t_{i+j})}{x(t_{i+j-1})} \right| \cdots \left| \frac{x(t_{i+1})}{x(t_i)} \right| = e^{-jp \frac{D}{\sqrt{1-D^2}}}.$$

Pro $j = 2$ je převrácená hodnota

$$\left| \frac{x(t_i)}{x(t_{i+2})} \right| = e^{2p \frac{D}{\sqrt{1-D^2}}}.$$

Její logaritmus (přirozený) nazýváme **logaritmickým dekrementem tlumení**

$$I = \ln \frac{x(t_i)}{x(t_{i+2})} = 2p \frac{D}{\sqrt{1-D^2}}.$$

2) Pro $D > 1$ říkáme, že **soustava je s nadkritickým tlumením**. Diskriminant charakteristické rovnice je reálný a tato má dvě různá reálná řešení

$$I_{1,2} = -D W \pm W \sqrt{D^2 - 1}.$$

Obecné řešení (4) při označení $W_D = W \sqrt{D^2 - 1}$ pak píšeme jako

$$x(t) = C_1 e^{(-DW+W_D)t} + C_2 e^{(-DW-W_D)t} = e^{-DWt} (C_1 e^{W_D t} + C_2 e^{-W_D t}). \quad (28)$$

Derivací

$$\dot{x}(t) = (W_D - DW)C_1 e^{(-DW+W_D)t} - (W_D + DW)C_2 e^{(-DW-W_D)t}.$$

Dosazením času $t = 0$ do posledních dvou rovnic a zohledněním počátečních podmínek odud dostaneme

$$x(0) = x_0 = C_1 + C_2,$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = (W_D - DW)C_1 - (W_D + DW)C_2.$$

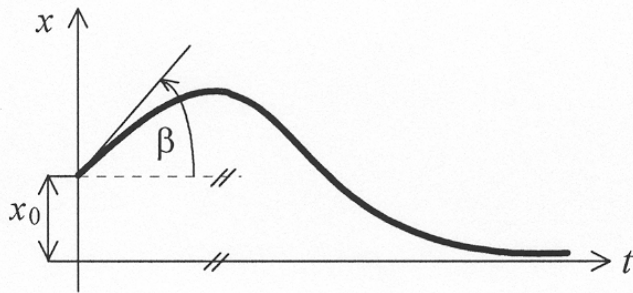
Řešením této soustavy lineárních algebraických rovnic získáme

$$C_1 = \frac{1}{2} \left[x_0 \left(1 + \frac{D}{\sqrt{D^2 - 1}} \right) + \frac{v_0}{W_D} \right]; \quad C_2 = \frac{1}{2} \left[x_0 \left(1 - \frac{D}{\sqrt{D^2 - 1}} \right) - \frac{v_0}{W_D} \right]$$

a dosazením integračních konstant do (28) dostaneme pro konkrétní řešení, splňující předepsané počáteční podmínky, výraz

$$x(t) = \frac{e^{-D W t}}{2} \left\{ \left[x_0 \left(1 + \frac{D}{\sqrt{D^2 - 1}} \right) + \frac{v_0}{W_D} \right] e^{W_D t} + \left[x_0 \left(1 - \frac{D}{\sqrt{D^2 - 1}} \right) - \frac{v_0}{W_D} \right] e^{-W_D t} \right\}. \quad (29)$$

Jedná se o časový průběh nekmitavý. Graf této funkce má (podle velikosti počáteční rychlosti) nejvýše jeden lokální extrém a nejvýše jeden nulový bod. Pro $v_0 > 0$ vypadá podle



následujícího obrázku. Graf opět splňuje počáteční podmínky. Vychází tedy z bodu $[0, x_0]$ a směrnice tečny v bodě $t = 0$ je v_0 , tedy

$$\operatorname{tg} b = v_0.$$

Vzhledem k charakteru pohybu mluvíme též o **přetlumené soustavě**.

3) Pro praxi málo významný případ $D = 1$ nazýváme **soustavou s kritickým tlumením**. Diskriminant charakteristické rovnice je nulový a tato má dvojnásobný kořen $I_{1,2} = -W$. Obecné řešení pohybové rovnice píšeme pak jako

$$x(t) = e^{-W t} (C_1 + C_2 t). \quad (30)$$

Derivací

$$\dot{x}(t) = e^{-W t} [-W(C_1 + C_2 t) + C_2].$$

Dosazením času $t = 0$ do posledních dvou rovnic a zohledněním počátečních podmínek dostaneme

$$x(0) = x_0 = C_1,$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = -W C_1 + C_2.$$

Řešením této soustavy vychází $C_1 = x_0$, $C_2 = W x_0 + v_0$, takže po dosazení do (6.33) konkrétní řešení, splňující zadané počáteční podmínky, je

$$x(t) = e^{-W t} [x_0 + (W x_0 + v_0)t]. \quad (31)$$

Časový průběh výchylky je opět nekmitavý. Grafy funkcí (31) jsou kvalitativně stejné jako pro případ $D > 1$. Pro $x_0 > 0$, $v_0 > 0$ je stav znázorněn na obrázku výše.

3. VYNUCENÉ KMITÁNÍ

Vynucené kmitání vzniká i při nulových počátečních podmínkách vlivem buzení kmitavé soustavy. Buzení se v pohybové rovnici projeví nenulovou pravou stranou. Vysvětlíme-li situaci na podélně kmitající tlumené soustavě, bude pohybová rovnice tvaru

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t),$$

kde $F(t)$ je budicí síla. Tato budicí síla může přímo silově působit ve směru kótování výchylky kmitavé soustavy, nebo se může jednat např. o složku odstředivé síly na nevyváženou rotující hmotnost (nacházející se v rámci hmoty m). V prvním případě hovoříme o **silovém buzení**, ve druhém o **buzení nevyváženou rotující hmotností**. K buzení může dojít rovněž tím, že konec pružiny, jenž je rámem, koná předepsaný pohyb $y(t)$. Tomuto stavu říkáme **kinematické buzení**. Kromě výše popsaného rozdělení buzení **podle fyzikální podstaty jeho vzniku**, můžeme je rozdělit i **podle matematického tvaru budicí funkce** (pravé strany pohybové rovnice). Technicky nejvýznamnější je **harmonické buzení**, kdy pravá strana je lineární kombinací goniometrických funkcí. Důležité je i **buzení skokem** pro konstantní pravou stranu a **impulsní buzení**, kdy časový průběh síly je krátkou dobu trvající vysoká hodnota (s rychlým náběhem z nuly) a poté rychlý pokles k nule. Těmito druhy buzení se budeme v dalším výkladu zabývat.

Poznámka:

1) V případě torzně kmitající soustavy má pohybová rovnice tvar

$$I\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + k\varphi = M(t),$$

kde $M(t)$ je **budicí silová dvojice (moment)**. Všechny poznatky jsou transformovatelné i na tento případ při výše popsané analogii veličin.

2) Technický význam mají rovněž **buzení polynomiálního charakteru**, kdy budicí funkce je polynom druhého stupně, a **buzení periodickou funkcí**.

HARMONICKÉ BUZENÍ (SILOVÉ)

Budicí funkce má tvar

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t + j_b), \quad (32)$$

kde F_0 je **amplituda buzení**, ω **budicí frekvence** a j_b **fáze buzení**. Pohybová rovnice po prodělení hmotností a zavedení parametrů D a W má tvar

$$\ddot{x} + 2D\dot{x} + W^2 x = f_0 \sin(\omega t + j_b), \quad (33)$$

kde $f_0 = \frac{F_0}{m}$. Pro řešení této rovnice platí

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t), \quad (34)$$

kde $x_H(t)$ je obecné řešení homogenní rovnice s nulovou pravou stranou a $x_p(t)$ je jediné jedno odhadnuté tzv. **partikulární řešení** rovnice (33). Partikulární řešení se obvykle odhaduje v kvalitativně stejném tvaru jako je pravá strana. Pro $D < 1$ je podle podkapitoly 2 $x_H(t)$ dáno v (24). Partikulární řešení je za buzením **fázově zpožděno**. Odhadujeme jej ve tvaru

$$x_p(t) = X \sin(\omega t + j_b - j). \quad (35)$$

Za účelem vyjádření amplitudy X a fázového zpoždění j přepíšeme rovnici (33) i její partikulární řešení (35) v nové nezávisle proměnné t , pro kterou

$$\omega t = \omega t - j \Rightarrow t = t - \frac{j}{\omega}. \quad (36)$$

Zřejmě $\frac{dt}{dt} = 1$, takže pro libovolnou funkci f je $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{df}{dt}$. Tedy i $\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d^2 f}{dt^2}$.

Pohybová rovnice (33) vzhledem k (36) má tvar

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2DW \frac{dx}{dt} + W^2 x = f_0 \sin(\omega t + j_b + j) \quad (37)$$

a její partikulární řešení (35)

$$x_p(t) = X \sin(\omega t + j_b). \quad (38)$$

Partikulární řešení (38) musí být řešením (37). Derivacemi získáme

$$\begin{aligned} \frac{dx_p}{dt} &= X \omega \cos(\omega t + j_b), \\ \frac{d^2 x_p}{dt^2} &= -X \omega^2 \sin(\omega t + j_b). \end{aligned}$$

Dosazením do (37) při použití součtového vzorce pro $\sin\left(\frac{\omega t + j_b}{y} + j\right)$ dostaneme

$$\begin{aligned} -X \omega^2 \sin(\omega t + j_b) + 2DW \omega X \cos(\omega t + j_b) + W^2 X \sin(\omega t + j_b) = \\ = f_0 \cos j \sin(\omega t + j_b) + f_0 \sin j \cos(\omega t + j_b). \end{aligned}$$

Tento vztah musí být splněn pro libovolné t . Musí se proto rovnat koeficienty u $\sin(\omega t + j_b)$ i u $\cos(\omega t + j_b)$. Dostáváme tak rovnice

$$X(W^2 - \omega^2) = f_0 \cos j, \quad (39)$$

$$X 2D W \omega = f_0 \sin j. \quad (40)$$

Umocněním a sečtením se zbavíme fázového opožďení a dostaneme

$$X^2 \left[(W^2 - \omega^2)^2 + 4D^2 W^2 \omega^2 \right] = f_0^2,$$

odkud

$$X = \frac{f_0}{\sqrt{(W^2 - \omega^2)^2 + 4D^2 W^2 \omega^2}}. \quad (41)$$

Amplituda X harmonického partikulárního řešení závisí na vzdálenosti (blízkosti) budicí frekvence ω k vlastní frekvenci W . Graf závislosti $X(\omega)$ je tzv. **amplitudová** (podle staré normy **amplitudo-frekvenční charakteristika**). Protože v (40) jsou všechny veličiny kladné, je $\sin j \geq 0$ a tedy $j \in \langle 0, \pi \rangle$. Z (39) jednoznačně dostáváme

$$j = \arccos \frac{W^2 - \omega^2}{\sqrt{(W^2 - \omega^2)^2 + 4D^2 W^2 \omega^2}}. \quad (42)$$

Také fázové zpoždění závisí na poloze w vůči W . Graf závislosti $j(w)$ se nazývá **fázová** (podle staré normy **fázo – frekvenční**) **charakteristika**. Fázovou charakteristiku lze získat rovněž prodělením rovnice (40) rovnicí (39). Získáme tak

$$\operatorname{tg} j = \frac{2DWw}{W^2 - w^2}.$$

Pro $w^2 < W^2$ ($\Leftrightarrow w < W$) je zlomek vpravo kladný a

$$j = \operatorname{arctg} \frac{2DWw}{W^2 - w^2}. \quad (43)$$

Pro $w^2 > W^2$ ($\Leftrightarrow w > W$) je zlomek vpravo záporný a arkustangenta by byla také záporná. Jak už bylo výše řečeno, $j \in (0, p)$. Proto pro tento případ

$$j = p + \operatorname{arctg} \frac{2DWw}{W^2 - w^2} = p - \operatorname{arctg} \frac{2DWw}{w^2 - W^2}. \quad (43')$$

Jestliže do (41) dosadíme zpět za $f_0 = \frac{F_0}{m}$ dostaneme rozšířením zlomku na pravé straně (41)

výrazem $\frac{1}{W^2}$ a zavedením tzv. **činitele naladění** $h = \frac{w}{W}$ výraz

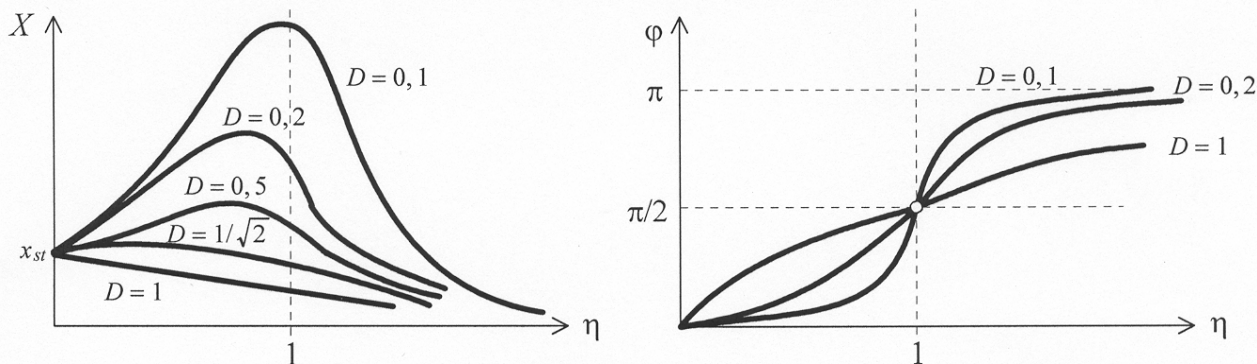
$$X = \frac{\frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{W^2}}{\sqrt{(1-h^2)^2 + 4D^2 h^2}} = \frac{x_{st}}{\sqrt{(1-h^2)^2 + 4D^2 h^2}}. \quad (41')$$

Dosazením za $W^2 = \frac{k}{m}$ vzniká totiž v čitateli $\frac{F_0}{k}$, což jest statická deformace pružiny o tuhosti k při trvalém působení amplitudy F_0 harmonické budicí síly. Tuto veličinu označujeme x_{st} . Rozšířením zlomku (43) výrazem $\frac{1}{W^2}$ a zavedením činitele naladění dostaneme

$$j = \operatorname{arctg} \frac{2Dh}{1-h^2} \quad \text{pro } h < 1,$$

$$j = p + \operatorname{arctg} \frac{2Dh}{1-h^2} \quad \text{pro } h > 1. \quad (43'')$$

Výrazům (41') a (43'') říkáme také amplitudová resp. fázová charakteristika ustálené výchylky. Obě popsané charakteristiky závisejí na parametru h a na poměrném útlumu. Příslušné grafy jsou pro různá D znázorněny na obrázku. Vlevo je amplitudová a vpravo fázová charakteristika.



Partikulární řešení má tedy v okolí $w = W$ ($h = 1$) velikou amplitudu (pro malé poměrné útlumy). Jedná se o nebezpečný **stav rezonance**. Pro abstraktní soustavu bez tlumení by pro $h = 1$ ($w = W$) amplituda rostla nade všechny meze.

Poznámka: Partikulární řešení pro $w = W$ a $D = 0$ má tvar $X t \cos(wt + j_b)$. Amplitudy sinu pak rostou lineárně s časem. Protože tento stav je technicky nepravděpodobný ($D = 0$), nebudeme se jím zabývat.

Jestliže $D < 1$ platí pro homogenní řešení vztah (24) (volné kmity). Dosazením (24) a (35) do (34) získáme obecné řešení pohybové rovnice jako

$$x(t) = e^{-Dw t} (A \cos W_D t + B \sin W_D t) + X \sin(wt + j_b - j). \quad (44)$$

Teprve v tomto řešení (nikoliv pouze v homogenním) uplatníme znalost počátečních podmínek $x(0) = x_0$ a $\dot{x}(0) = v_0$. Derivací (44) získáme

$$\dot{x}(t) = [-DW(A \cos W_D t + B \sin W_D t) + W_D(-A \sin W_D t + B \cos W_D t)]e^{-Dw t} + Xw \cos(wt + j_b - j).$$

Dosazením do posledních dvou rovnic $t = 0$ a zohledněním zadaných počátečních podmínek získáme

$$x_0 = A + X \sin(j_b - j),$$

$$v_0 = -DWA + W_D B + Xw \cos(j_b - j).$$

Odtud

$$A = x_0 - X \sin(j_b - j),$$

$$B = \frac{v_0 - Xw \cos(j_b - j)}{W_D} + \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}} (x_0 - X \sin(j_b - j)). \quad (45)$$

Dosazením do (44) bychom získali konkrétní řešení pohybové rovnice splňující zadané počáteční podmínky. Toto řešení popisuje tzv. **přechodový děj**, vznikající jako odezva soustavy na náhlé připojení harmonického buzení. Tento přechodový děj se skládá z tlumeného kmitání vlastní frekvencí W_D (první sčítanec (44)) a netlumeného kmitání budící frekvencí w . Poznamenejme, že první sčítanec se neanuluje ani pro nulové počáteční podmínky jak je vidět v (45). Náhlé připojení buzení (prakticky) vždy způsobí i kmitání vlastní frekvencí. Toto kmitání však vlivem tlumení se po dostatečně dlouhém čase působení buzení utlumí natolik, že nebude vůbec měřitelné (matematicky formulováno – limita prvního sčítance v (44) pro $t \rightarrow \infty$ je nulová). Po tomto čase už soustava kmitá pouze s budící

frekvencí. Jedná se o tzv. **ustálený stav**. Ustálený stav tedy popisuje partikulární řešení pohybové rovnice, zatímco přechodový děj popisuje výsledné řešení. Ustálený stav je nebezpečnější, protože působí trvale. Při naladění soustavy do rezonance je jeho amplituda velká se všemi negativními důsledky (vysoká hlučnost, veliké síly přenášené do rámu). Těmto stavům se v praxi snažíme vyhnout. Lze to udělat naladěním mimo rezonanční oblast, nebo větším zatlumením soustavy.

Zkoumejme ještě v **ustáleném stavu** dynamickou sílu přenášenou pružně – viskózním členem do rámu. Tato síla, s ohledem na pohybovou rovnici a definici ustáleného stavu, má časový průběh

$$F_d(t) = kx_p(t) + b\dot{x}_p(t).$$

Dosazením z (35) získáme

$$F_d(t) = X[k \sin(\omega t + j_b - j) + b\omega \cos(\omega t + j_b - j)].$$

Zavedením amplitudy

$$F_{d0} = X\sqrt{k^2 + b^2 \omega^2} \quad (46)$$

lze tento vztah přepsat na

$$F_d(t) = F_{d0} \sin(\omega t + j_b - j + j_s).$$

Pro fázi dynamické síly j_s platí

$$\sin j_s = \frac{b\omega}{F_{d0}}; \quad \cos j_s = \frac{k}{F_{d0}}.$$

Důležitá je amplituda harmonické (s budicí frekvencí) dynamické síly, daná v (46).

Dosazením za X z (41), kde $f_0 = \frac{F_0}{m}$ získáme

$$F_{d0} = \frac{F_0}{m} \sqrt{\frac{k^2 + b^2 \omega^2}{(W^2 - \omega^2)^2 + 4D^2 W^2 \omega^2}} = F_0 \sqrt{\frac{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega^2}{(W^2 - \omega^2)^2 + 4D^2 W^2 \omega^2}}.$$

Ovšem $\frac{k}{m} = W^2$ a $\frac{b}{m} = 2DW$. Odtud

$$F_{d0} = F_0 \sqrt{\frac{W^4 + 4D^2 W^2 \omega^2}{(W^2 - \omega^2)^2 + 4D^2 W^2 \omega^2}}.$$

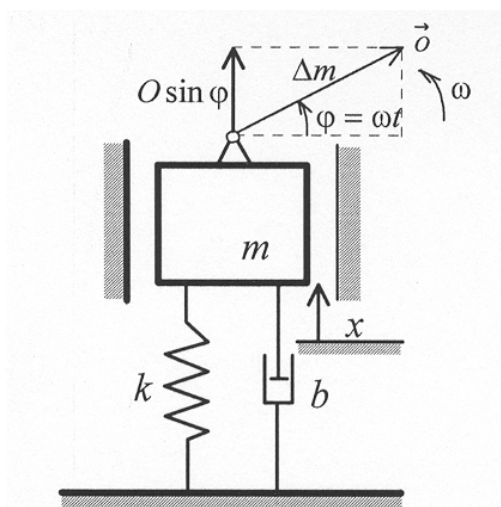
Závislost $F_{d0}(\omega)$ nazýváme **amplitudovou** (podle staré normy **amplitudo-frekvenční charakteristikou síly přenášené do rámu**. Rozšířením posledního zlomku $\frac{1}{W^2}$ (pod odmocninou $\frac{1}{W^4}$) a zavedením činitele naladění h dostaneme

$$F_{d0} = F_0 \sqrt{\frac{1 + 4D^2 h^2}{(1 - h^2)^2 + 4D^2 h^2}} \quad (47)$$

Velikost dynamické síly (amplituda) závisí na amplitudě buzení F_{d0} , na poměrném útlumu D a na naladění soustavy vzhledem k budící frekvenci. Charakteristika je kvalitativně podobná charakteristice výchylky znázorněné na straně 18. Pro malé útlumy lze opět vysledovat stav rezonance, kdy amplituda dynamické síly vysoko překračuje amplitudu buzení (je totiž $F_{d0}(0) = F_0$). Při provozování soustavy v tomto naladění hrozí nebezpečí destrukce pružně – viskózní vazby na rám.

HARMONICKÉ BUZENÍ NEVYVÁŽENOU ROTUJÍCÍ HMOTNOSTÍ

Uvažujme stroj o hmotnosti m pružně-viskózně uložen k rámu vazbou o tlumení b a tuhosti k (viz obr.) Ve stroji rotuje úhlovou rychlostí w nevyvážený (staticky) rotor o hmotnosti Dm s těžištěm vystředěným z osy rotace o výstřednost e . Rotuje-li rotor konstantní úhlovou rychlostí w , působí na něj odstředivá síla $O = Dmew^2$. Její svislá složka $O \sin j$ působí na podélně kmitající stroj jako budící síla. Vodorovná složka je v rovnováze s reakcí ve svislém vedení. Při naznačeném kótování výchylky ze statické rovnovážné polohy snadno odvodíme pohybovou rovnici ve tvaru



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = O \sin j .$$

Protože $w = konst$, uvažujeme-li čas $t = 0$ v okamžiku, kdy $j = 0$, je $j = wt$. Pohybová rovnice má proto tvar

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = Dmew^2 \sin wt ,$$

neboli

$$\ddot{x} + 2Dw\dot{x} + W^2x = \frac{Dm}{m}ew^2 \sin wt . \quad (48)$$

Srovnáním s rovnicí (33) vidíme, že fáze buzení $j_b = 0$ a **amplituda buzení** $f_0 = \frac{Dm}{m}ew^2$ **závisí**

na kvadrátu budící frekvence. V ustáleném stavu

(běží-li stroj dostatečně dlouhou dobu) má partikulární řešení tvar

$$x_p(t) = X \sin(wt - j) ,$$

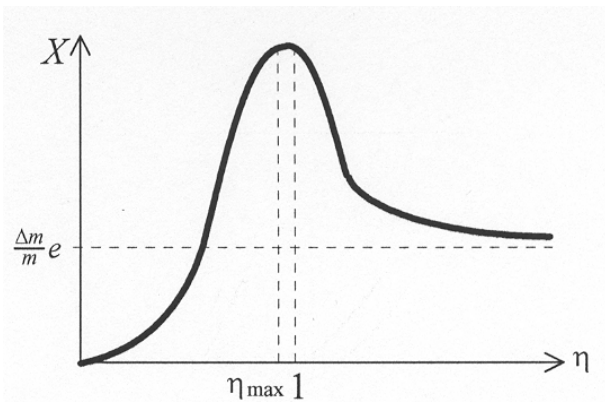
kde pro amplitudu X (srovnáním (33) s (48)s přihlédnutím k (41)) platí

$$X = \frac{\frac{Dm}{m}ew^2}{\sqrt{(W^2 - w^2)^2 + 4D^2 W^2 w^2}} \quad (49)$$

a zavedením činitele naladění

$$X = \frac{\frac{Dm}{m}eh^2}{\sqrt{(1 - h^2)^2 + 4D^2 h^2}} .$$

Tyto závislosti na w (resp. na h) představují amplitudové charakteristiky výchylky. Pro malé tlumení mají charakter znázorněný na obrázku. Jestliže úhlová rychlost rotace je nízká,



výchylka je zanedbatelná. Pro naladění h_{\max} (blízke jedničke) dochází k prudkému nárůstu. Nastává nebezpečný **stav rezonance**. Pak amplituda ustálené výchylky opět klesá (v **nadrezonanční oblasti** $h > 1 \Leftrightarrow w > W$). I pro vysoké rychlosti w však neklesá k nule, protože zřejmě jest

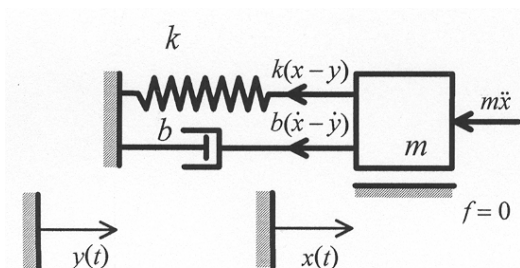
$$\lim_{h \rightarrow \infty} X(h) = \frac{Dm}{m} e.$$

Pro amplitudu síly F_{d0} přenášené do rámu stroje platí podle (46) a (49)

$$F_{d0} = X \sqrt{k^2 + b^2 w^2} = Dm e w^2 \sqrt{\frac{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2 w^2}{(W^2 - w^2)^2 + 4D^2 W^2 w^2}} = O \sqrt{\frac{W^4 + 4D^2 W^2 w^2}{(W^2 - w^2)^2 + 4D^2 W^2 w^2}},$$

protože amplituda odstředivé síly $O = Dm e w^2$. Po zavedení činitele naladění získáme stejnou charakteristiku dynamické síly jako v (47) při $F_0 = O$.

KINEMATICKÉ BUZENÍ



Tento druh buzení vzniká jestliže „s hmotností m nespojený konec pružiny“ **vykonává předepsaný pohyb** $y(t)$ (viz obr.). Síly působící ve směru pohybu na uvolněnou hmotu jsou znázorněny na obrázku. Elastická síla závisí na relativní výchylce (deformaci pružiny) a tlumicí síla na derivaci relativní výchylky (rychlosti deformace pružiny). Pohybová rovnice má tedy tvar

$$m\ddot{x} + b(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0.$$

V absolutní výchylce x (kdy pozorovatel se nachází na rámu) má proto tvar

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = b\dot{y} + ky,$$

neboli

$$\ddot{x} + 2DW\dot{x} + W^2 x = 2DW\dot{y} + W^2 y. \quad (50)$$

V relativní výchylce $z = x - y$ (kdy pozorovatel se nachází „na konci pružiny nespojeném s hmotou“) má stejná rovnice zřejmě tvar

$$m(\ddot{z} + \ddot{y}) + b\dot{z} + kz = 0$$

neboli

$$\ddot{z} + 2DW\dot{z} + W^2 z = -\ddot{y} \quad (51)$$

Častý případ kinematického buzení je harmonické buzení, kdy předepsaný pohyb má tvar

$$y = Y \sin(\omega t + y_b). \quad (52)$$

Zde Y je **amplituda buzení** y_p , **fáze buzení** a ω **budicí frekvence**. Dosazením do (50) získáme pohybovou rovnici v **absolutní výchylce** jako

$$m \ddot{x} + 2D\omega W \dot{x} + W^2 x = Y [2D\omega W \cos(\omega t + y_b) + W^2 \sin(\omega t + y_b)].$$

Harmonickou pravou stranu (buzení) lze přepsat na

$$Y \sqrt{W^4 + 4D^2 W^2 \omega^2} \sin(\omega t + y_b + y),$$

kde pro fázi y platí

$$\sin y = \frac{2D\omega W}{\sqrt{W^4 + 4D^2 W^2 \omega^2}}; \quad \cos y = \frac{W^2}{\sqrt{W^4 + 4D^2 W^2 \omega^2}}.$$

Pohybová rovnice má proto tvar

$$m \ddot{x} + 2D\omega W \dot{x} + W^2 x = Y \sqrt{W^4 + 4D^2 W^2 \omega^2} \sin(\omega t + j_b), \quad (53)$$

kde amplituda buzení je

$$F_0 = Y \sqrt{W^4 + 4D^2 W^2 \omega^2} \quad (54)$$

a fáze buzení

$$j_b = y_b + y.$$

V ustáleném stavu, jemuž odpovídá partikulární řešení (53), má výchylka $x_p(t)$ tvar

$$x_p(t) = X \sin(\omega t + j_b - j),$$

kde pro amplitudu X (jak plyne srovnáním (53) a (33)) podle (54) a (41) platí

$$X = Y \sqrt{\frac{W^4 + 4D^2 W^2 \omega^2}{(W^2 - \omega^2)^2 + 4D^2 W^2 \omega^2}} = Y \sqrt{\frac{1 + 4D^2 h^2}{(1 - h^2)^2 + 4D^2 h^2}}. \quad (55)$$

To je stejný tvar **amplitudové charakteristiky výchylky** jako v (47), při volbě $F_0 = Y_0$. Pro různé poměrné útlumy D je charakteristika znázorněna na obrázku výše. Opět lze vysledovat stav rezonance, kdy amplituda výchylky hmoty X je podstatně větší než amplituda výchylky buzení Y .

Dosazením (52) do (51) získáme pohybovou rovnici v **relativní výchylce** jako

$$m \ddot{z} + 2D\omega W \dot{z} + W^2 z = Y W^2 \sin(\omega t + y_b). \quad (56)$$

Amplituda buzení je závislá na kvadrátu budicí frekvence jako u rovnice (48). Srovnáním zmíněných dvou rovnic dostaneme amplitudu Z relativních výchylek v ustáleném stavu,

jakožto partikulární řešení $Z_p(t) = Z \sin(\omega t + y_b - j)$ podle (49) ve tvaru $\left(Y = \frac{Dm}{me} \right)$

$$Z = \frac{Y W^2}{\sqrt{(W^2 - \omega^2)^2 + 4D^2 W^2 \omega^2}} = \frac{Y h^2}{\sqrt{(1 - h^2)^2 + 4D^2 h^2}}. \quad (57)$$

Amplitudová charakteristika má tvar podle obrázku výše.

Poznámka: Pro dynamickou sílu $F_d(t)$ přenášenou pružně-viskózní vazbou platí vzhledem k pohybové rovnici

$$F_d(t) = k[x(t) - y(t)] + b[\dot{x}(t) - \dot{y}(t)] = -m\ddot{x}(t).$$

V ustáleném stavu má tato síla tvar

$$F_{dp}(t) = -m\ddot{x}_p(t) = -m\omega^2 X \sin(\omega t + j_b - j).$$

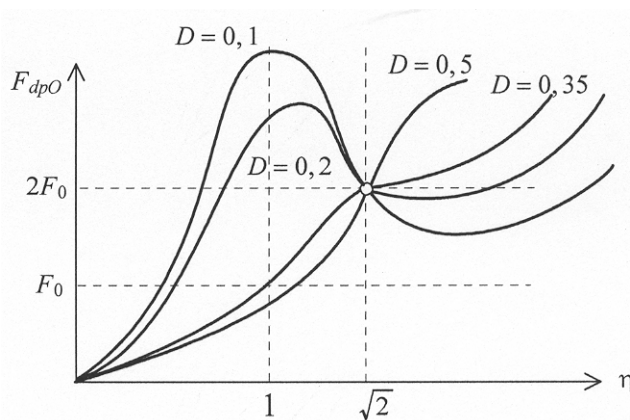
Podle (55) její amplituda

$$F_{dpo} = -m\omega^2 Y \sqrt{\frac{W^4 + 4D^2\omega^2 W^2}{(W^2 - \omega^2)^2 + 4D^2\omega^2 W^2}}.$$

Protože $m = k \cdot \frac{m}{k} = \frac{k}{W^2}$, dostáváme odtud

$$F_{dpo} = Yk \frac{\omega^2}{W^2} \sqrt{\frac{W^4 + 4D^2\omega^2 W^2}{(W^2 - \omega^2)^2 + 4D^2\omega^2 W^2}} = Ykh^2 \sqrt{\frac{1 + 4D^2h^2}{(1 - h^2)^2 + 4D^2h^2}}. \quad (58)$$

Veličina $F_0 = kY$ je síla v pružině deformované o amplitudu Y buzení. Charakteristiky mají



tvar uvedený na obrázku. Až do $D = 0,35$ mají jedno lokální maximum. Pro vyšší D jsou stále rostoucí. S výjimkou $D = 0$ je . Přenášená síla tedy roste s budící frekvencí nade všechny meze. Nebezpečný stav je tedy pro naladění soustavy vysoko v nadrezonanční oblasti. Pro $D = 0$ je $\lim_{h \rightarrow \infty} F_{dpo}(h) = F_0$ a naopak $\lim_{h \rightarrow 1} F_{dpo}(h) = +\infty$. Všechny charakteristiky procházejí bodem $[\sqrt{2}, 2F_0]$.

BUZENÍ SKOKEM (KONSTANTOU)

Tento typ buzení vzniká, když na soustavu (zpravidla v klidu ve statické rovnovážné poloze – tedy triviální počáteční podmínky) naráz (skokem) v čase $t = 0$ začne působit konstantní budící síla velikosti F_0 . Pohybová rovnice po zavedení parametrů W a D má tvar

$$\ddot{x} + 2DW \dot{x} + W^2 x = \frac{F_0}{m}. \quad (59)$$

Tuto diferenciální rovnici řešíme při nulových počátečních podmínkách $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Zřejmě pro obecné řešení opět platí

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t), \quad (60)$$

kde homogenní řešení je dáno v (24) (pro $D < 1$). Partikulární řešení odhadujeme jako konstantu $x_p(t) \equiv L$ (ve stejném tvaru, jako je pravá strana). Velikost konstanty L získáme z podmínky, že tato konstanta musí být řešením (59). Musí tedy platit

$$W^2 L = \frac{F_0}{m} \Leftrightarrow L = \frac{1}{W^2} \cdot \frac{F_0}{m} = \frac{m F_0}{k m} = \frac{F_0}{k} = x_{st}, \quad (61)$$

kde x_{st} je deformace pružiny při statickém působení síly F_0 . Dosazením (61) a (24) do (60) dostáváme

$$x(t) = x_{st} + e^{-D W t} (A \cos W_D t + B \sin W_D t). \quad (62)$$

Derivací

$$\dot{x}(t) = e^{-D W t} [-D W (A \cos W_D t + B \sin W_D t) + W_D (-A \sin W_D t + B \cos W_D t)].$$

Dosazením času $t = 0$ do posledních dvou rovnic a zohledněním počátečních podmínek vyjde

$$x(0) = 0 = x_{st} + A,$$

$$\dot{x}(0) = 0 = -D W A + W_D B.$$

Odtud

$$A = -x_{st}; \quad B = \frac{D W A}{W_D} = \frac{-D}{\sqrt{1-D^2}} x_{st}.$$

Dosazením do (62) vzniká

$$x(t) = x_{st} \left[1 - e^{-D W t} \left(\cos W_D t + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin W_D t \right) \right]. \quad (63)$$

Zavedením v kulaté závorce amplitudy \tilde{A} vzorcem

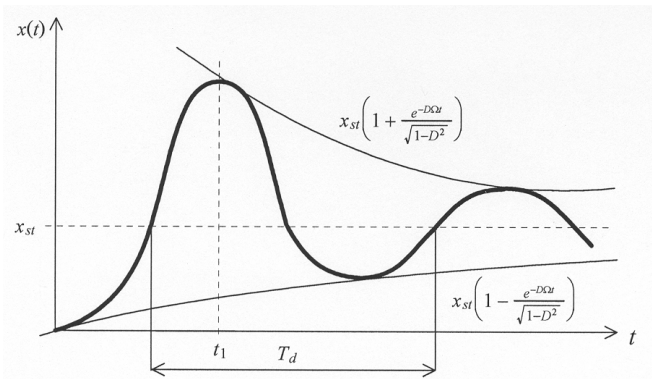
$$\tilde{A} \sqrt{1^2 + \left(\frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-D^2}}$$

a fáze g tak, že

$$\sin g = \frac{1}{\tilde{A}}; \quad \cos g = \frac{D}{\tilde{A} \sqrt{1-D^2}} = \frac{D}{1-D^2}$$

dostaneme konkrétní (triviální počáteční podmínky splňující) řešení ve tvaru

$$x(t) = x_{st} \left[1 - \frac{e^{-D W t}}{\sqrt{1-D^2}} \sin(W_D t + g) \right]. \quad (63')$$



Popsaná závislost $x(t)$ se nazývá **přechodová charakteristika** a má tvar uvedený na obrázku. Tlumená fázově posunutá sinusoida (s periodou $T_d = \frac{2p}{W_d}$) se přibližuje s rostoucím časem k nové statické rovnovážné poloze x_{st} . Určíme ještě největší extrém $x(t_1)$. Nutnou

podmínkou extrému je $\frac{dx}{dt} = 0$. Odtud podle (63)

$$0 = \frac{dx}{dt} = -x_{st} e^{-D W_d t} \left[-D W_d \left(\cos W_d t + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin W_d t \right) + W_d \left(-\sin W_d t + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \cos W_d t \right) \right]$$

Protože $-x_{st} e^{-D W_d t} \neq 0$, musí platit

$$D W_d \left(\cos W_d t + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin W_d t \right) = W_d \left(-\sin W_d t + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \cos W_d t \right),$$

neboli

$$\cos W_d t \left(D W_d - W_d \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \right) + \sin W_d t \left(\frac{D^2 W_d}{\sqrt{1-D^2}} - W_d \right) = 0.$$

Protože koeficient u kosinu je identicky nulový a koeficient u sinu nenulový (rovný $-\frac{W_d}{\sqrt{1-D^2}}$), je podmínkou extrému $\sin W_d t = 0 \Leftrightarrow W_d t_k = k p$ (k celé). Největší extrém nastává pro $k = 1$, takže podle (63)

$$x_{\max} = x \left(\frac{p}{W_d} \right) = x_{st} \left[1 - e^{-D p} \frac{W_d}{W_d} \left(\cos p + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin p \right) \right] = x_{st} \left[1 + e^{-\frac{D}{\sqrt{1-D^2}} p} \right],$$

neboť $\cos p = -1$, $\sin p = 0$ a $W_d = W \sqrt{1-D^2}$. Z určeného poměru (změříme)

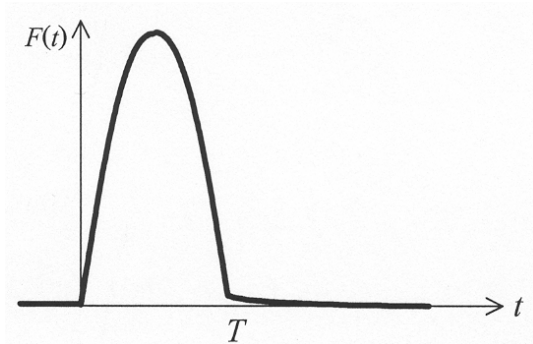
$$p = \frac{x_{\max}}{x_{st}} = 1 + e^{-\frac{D}{\sqrt{1-D^2}} p} \quad (> 1)$$

lze určit poměrný útlum jakožto

$$D = \frac{-\ln(p-1)}{\sqrt{p^2 + \ln^2(p-1)}}.$$

BUZENÍ DIRACOVÝM IMPULSEM

Tento typ tzv. **rázového buzení** vzniká, když síla má průběh pulsu o vysoké hodnotě trvajícího krátkou dobu T (viz obr.), kdy předaný



impuls je $I = \int_0^T F(t) dt$ Newtonsekund. Podle

věty o změně hybnosti při předání impulsu I hmotě m tato dosahuje startovací rychlosti v_0 , pro kterou $mv_0 = I$. Startovací rychlost je počáteční rychlostní podmínkou při řešení volných kmitů. Příslušné řešení při startu ze statické rovnovážné polohy má podle (26) pro $D < 1$ tvar

$$x(t) = \frac{v_0}{W_d} e^{-D\omega t} \sin W_d t.$$

Této závislosti říkáme **impulsní charakteristika**. Jedná se o tlumenou sinusoidu s frekvencí W_d (periodou $T_d = \frac{2\pi}{W_d}$) znázorněnou na posledním obrázku.

